EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 2–10

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Sedam približnih konstrukcija pravilnog sedmougla

Zehra Nurkanović[a], $\boxed{\textbf{Robert Onodi}}$[b]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *1960.-2012. Tuzla*

Sažetak: Poznato je da geometrijska konstrukcija pravilnog sedmougla nije moguća, pa su od posebnog značaja približne konstrukcije. U ovom radu dato je sedam približnih konstrukcija sedmougla i izračunate su greške napravljene u tim konstrukcijama.

1. Uvod

Kao što je poznato pod geometrijskom konstrukcijom podrazumijevamo konstrukciju izvedenu uz pomoć samo šestara i lenjira bez podioka. Nemogućnost konstrukcije pravilnog sedmougla pomoću šestara i lenjira bez podioka slijedi iz nemogućnosti konstrukcije centralnog ugla $\frac{2\pi}{7}$ koji odgovara jednoj stranici pravilnog sedmougla.

Ovaj problem je zaokupljao pažnju matematičara još iz antičkih vremena i dugo nije imao rješenje. Za Thabit ibn Qurru (Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani, 826. Harran, Mezopotamija - danas Turska; 18.02.901. Bagdad), poznatog astronoma i matematičara, veže se i prijevod knjige o konstrukciji pravilnog sedmougla, za koju se pretpostavlja da pripada Arhimedu i koja je bila vjerojatno samo fragment šireg djela. U ovom djelu, koji je prvi zabilježeni sistematski osvrt na ovaj problem, se dokazuje da je moguće izvesti konstrukciju sedmougla ako se na dužoj dijagonali sedmougla znaju presječne tačke sa druge dvije duže dijagonale koje polaze iz tjemena stranice paralelne sa polaznom dijagonalom.

U tom periodu zabilježene su i različite konstrukcije pravilnog sedmougla koje se ne izvode samo upotrebom šestara i lenjira. Između ostalih to su konstrukcije koje se izvode drugim pomagalima ili korištenjem nekih drugih krivih pored kruga.

U literaturi se najčešće pojavljuju jedna ili dvije približne konstrukcije sedmougla. Neke od njih nose nazive po njihovim autorima. U ovom radu je prikazano sedam približnih konstrukcija sedmougla i izračunata pogreška koju činimo pri tim konstrukcijama. Sve konstrukcije izvedene su pomoću programa *GeoGebra 3.2.2.0.* Preciznost približnih konstrukcija ispitivana je pomoću programa Wolfram Mathematica 6.0.0.

2. Dokaz nemogućnosti konstrukcije pravilnog sedmougla

Uvedimo prvo pojam konstruktibilnosti, odnosno kontruktibilnih brojeva (v. [13]).
Svaka geometrijska konstrukcija predstavlja niz koraka od kojih je svaki korak jedan od sljedećih:

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Email adrese: zehra.nurkanovic@untz.ba (Zehra Nurkanović), ($\boxed{\text{Robert Onodi}}$)

1. spajanje dviju tačaka pravom,
2. presječna tačka dviju pravih,
3. kontrukcija kružnice zadanog centra i poluprečnika,
4. presjek dviju kružnica,
5. presjek kružnic i prave.

Uzmimo za početak polje $F_0 = \mathbb{Q}$. Svaka duž dužine $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ može se konstruisati, pa je F_0 brojevno polje (polje zatvoreno u odnosu na geometrijske operacije " $+$ ", " $-$ ", " $\cdot$ " i " $\div$ ").
Neka je sada $k_1 \in \mathbb{Q}$, ali takav da $\sqrt{k_1} \notin \mathbb{Q} = F_0$ i formirajmo polje F_1 (kao proširenje polja F_0):

$$F_1 = F_0\left[\sqrt{k_1}\right] = \{a_1 + b_1 \cdot \sqrt{k_1} \mid a_1, b_1, k_1 \in F_0,\ \sqrt{k_1} \notin F_0\}.$$

Uzmimo $k_2 \in F_1$, takav da $\sqrt{k_2} \notin F_1$, pa možemo formirati novo polje (proširenje polja F_1):

$$F_2 = F_1\left[\sqrt{k_2}\right] = \left\{a_2 + b_2\sqrt{k_2} \mid a_2, b_2, k_2 \in F_1,\ \sqrt{k_2} \notin F_1\right\}.$$

Općenito, ako imamo brojevno polje F_{n-1}, onda za $k_n \in F_{n-1}$, takav da $\sqrt{k_n} \notin F_{n-1}$, možemo formirati polje F_n, kao proširenje polja F_{n-1}:

$$F_n = F_{n-1}\left[\sqrt{k_n}\right] = \left\{a_n + b_n\sqrt{k_n} \mid a_n, b_n, k_n \in F_{n-1},\ \sqrt{k_n} \notin F_{n-1}\right\},$$

i tako dalje.
Sva ova polja F_k $(k \in \{0, 1, 2, \ldots\})$ su brojevna polja i vrijedi

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \tag{1}$$

te svaku dužinu iz datih polja možemo geometrijski konstruisati. Zaključujemo, konstruktibilan broj je broj koji je element nekog od brojevnih polja iz lanca (1) dobijenih na gore opisan način.

Primjer 2.1. *Pokažimo da je broj $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ konstruktibilan.*

Zaista,

$$F_0 = \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin F_0 \Rightarrow F_1 = F_0\left[\sqrt{2}\right],$$

$$2+\sqrt{2} \in F_1,\ \text{ali}\ \sqrt{2+\sqrt{2}} \notin F_1 \Rightarrow F_2 = F_1\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right],$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} \in F_2,\ \text{ali}\ \sqrt{3} \notin F_2 \Rightarrow F_3 = F_2\left[\sqrt{3}\right].$$

Odavde zaključujemo da $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{3} \in F_3$, tj. $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ je konstruktibilan broj. ♣

Za dokaz nemogućnosti konstrukcije pravilnog sedmougla šestarom i lenjirom bez podioka neophodan je sljedeći teorem o kubnoj jednadžbi.

Teorem 2.2. *Ako kubna jednadžba sa racionalnim koeficijentima*

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{2}$$

nema racionalnih korijena, tada nijedan od njenih korijena nije konstruktibilan, polazeći od racionalnog polja $F_0 = \mathbb{Q}$.

Dokaz : Pretpostavimo suprotno, tj. neka je x konstruktibilan korijen jednadžbe (2). Tada x pripada nekom polju iz (1). Pretpostavimo da je k najmanji broj takav da korijen kubne jednadžbe (2) leži u proširenom polju F_k. Broj k mora biti veći od nule jer se u tvrđenju teorema pretpostavlja da nijedan korijen x ne leži u racionalnom polju F_0. Prema tome, x se može predstaviti u obliku

$$x = p + q\sqrt{w}$$

gdje su p, q i w iz polja F_{k-1}, ali $\sqrt{w} \notin F_{k-1}$. Odatle slijedi da je i

$$y = p - q\sqrt{w}$$

korijen jednadžbe (2). Kako je $q \neq 0$, to je i $x \neq y$.
Općenito, ako su x_1, x_2 i x_3 tri korijena kubne jednadžbe, tada je (prema Vietèovim pravilima)

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a. \tag{3}$$

U našem slučaju, primjenom (3), dobijamo treći korijen jednadžbe (2) kao $u = -a - x - y$. Pošto je $x + y = 2p$, to znači da je

$$u = -a - 2p.$$

Dakle, u je broj iz polja F_{k-1}, što je kontradikcija sa hipotezom da je k najmanji broj za koji F_k sadrži korijen jednadžbe (2). $\square$

Pokažimo sada nemogućnost konstrukcije pravilnog sedmougla. Posmatrajmo jednadžbu $z^7 - 1 = 0$, koju još možemo zapisati i kao

$$z = \sqrt[7]{1}.$$

Njena rješenja su data sa

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 6).$$

Upravo, tačke z_k $(k = 0, 1, \ldots, 6)$ predstavljene u kompleksnoj ravni leže na jediničnoj kružnici i odgovaraju vrhovima pravilnog sedmougla. Očigledno je jedan korijen ove jednadžbe $z = 1$, pa, dijeleći sa $z - 1$, dobijamo jednadžbu

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \tag{4}$$

odnosno

$$(4) \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 \Leftrightarrow (z^3 + \frac{1}{z^3}) + (z^2 + \frac{1}{z^2}) + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0.$$

Uvodeći smjenu $z + \frac{1}{z} = y$ dobijamo da je $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$ i $z^3 + \frac{1}{z^3} = y^3 - 3y$. Zbog toga je

$$(4) \Leftrightarrow y^3 - 3y + y^2 - 2 + y + 1 = 0,$$

odnosno,

$$y^3 + y^2 - 2y + 1 = 0. \tag{5}$$

Također,

$$y = z + \frac{1}{z} = z + z^{-1} = (\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}) + (\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}) = 2\cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\phi.$$

Očito je da kubna jednadžba (5) ima racionalne koeficijente. Prema teoremu o kubnoj jednadžbi dovoljno je pokazati da nijedno rješenje jednadžbe nije racionalno jer u tom slučaju sva rješenja bi bila nekonstruktibilni brojevi. Stoga, pretpostavimo suprotno, tj. neka je $y = \frac{r}{s}$ $(r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N},\ (r,s) = 1)$ rješenje kubne jednadžbe (5). Zamjenom $y = \frac{r}{s}$ u (5) dobijamo kubnu jednadžbu

$$r^3 + r^2 s - 2rs^2 - s^3 = 0.$$

Odavde onda slijedi da je

$$r^3 = s(s^2 + 2sr - r^2) \Rightarrow s|r^3 \Rightarrow s|r \Rightarrow s = 1,$$

ali i

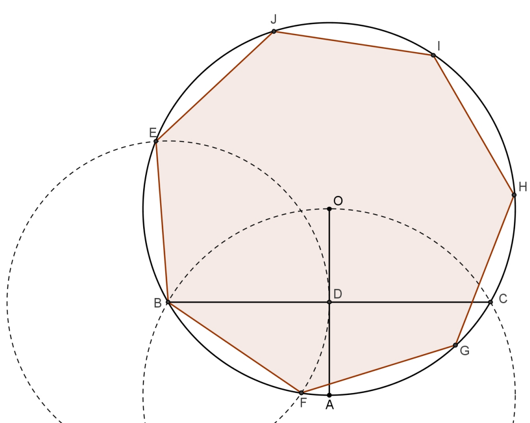
$$s^3 = r(r^2 + rs - 2s^2) \Rightarrow r|s^3 \Rightarrow r|s \Rightarrow r \in \{-1, 1\}.$$

Prema tome, $y \in \{-1, 1\}$. Neposredno se provjerava da $y = -1$ i $y = 1$ nisu rješenja jednadžbe (5). Zaključujemo da broj $y = 2\cos\phi$ nije konstruktibilan pa ni $\cos\phi$ nije konstruktibilan broj.
To znači da nije moguće izvršiti geometrijsku konstrukciju ugla $\phi = \frac{2\pi}{7}$, a samim tim onda i geometrijska konstrukcija pravilnog sedmougla nije moguća.

3. Približne konstrukcije

3.1. Približna konstrukcija br. 1

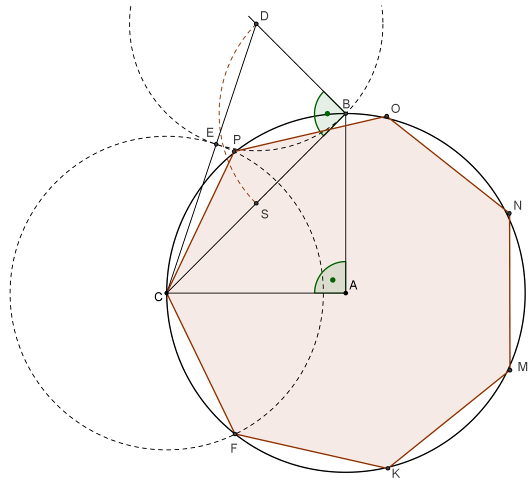
Nacrtajmo kružnicu sa centrom u tački O i poluprečnikom $\overline{OA}$ (vidjeti Sliku 1). U tački A nacrtajmo kružnicu jednakog poluprečnika kao kod polazne kružnice. Ona siječe polaznu kružnicu u tačkama B i C. Duž $\overline{BC}$ siječe poluprečnik $\overline{OA}$ u tački D. Kružnica sa centrom u tački B i poluprečnika $\overline{BD}$ siječe polaznu kružnicu u tačkama E i F. Duži $\overline{BE}$ i $\overline{BF}$ su približne stranice traženog sedmougla.



Slika 1: Konstrukcija sedmougla br. 1

3.2. Približna konstrukcija br. 2

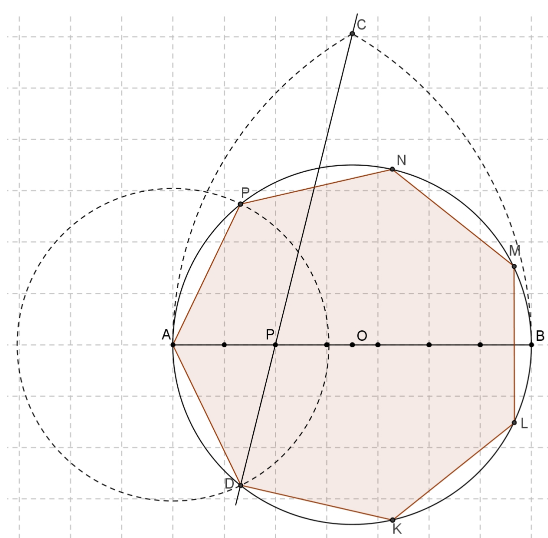
Konstruirajmo kružnicu sa centrom u tački A i dva okomita prečnika $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ (vidjeti Sliku 2). Tačka S je sredina duži $\overline{BC}$. U tački B podižemo okomicu na duž $\overline{BC}$, a tačku D nalazimo tako da je $|BS| = |BD|$. Kružnica sa centrom u tački D i poluprečnika $\overline{BD}$ siječe duž $\overline{CD}$ u tački E. Tačke F i P presjeka kružnice (sa centrom u tački C) poluprečnika $\overline{CE}$ i polazne kružnice su tjemena sedmougla. Duži $\overline{CP}$ i $\overline{CF}$ su približne stranice traženog sedmougla.



Slika 2: Konstrukcija sedmougla br. 2

3.3. Približna konstrukcija br. 3

Prečnik $\overline{AB}$ kružnice sa centrom u tački O podijelimo na sedam jednakih dijelova (vidjeti Sliku 3). Tačku C dobijamo u presjeku dvije kružnice poluprečnika $\overline{AB}$ i centrima u tačkama A i B. Tačka P se nalazi na drugom dijelu podjele prečnika $\overline{AB}$. Prava CP siječe polaznu kružnicu u dvije tačke, a dalju od tačke C obilježimo sa D. Duž $\overline{AD}$ je stranica približno jednaka stranici traženog sedmougla.

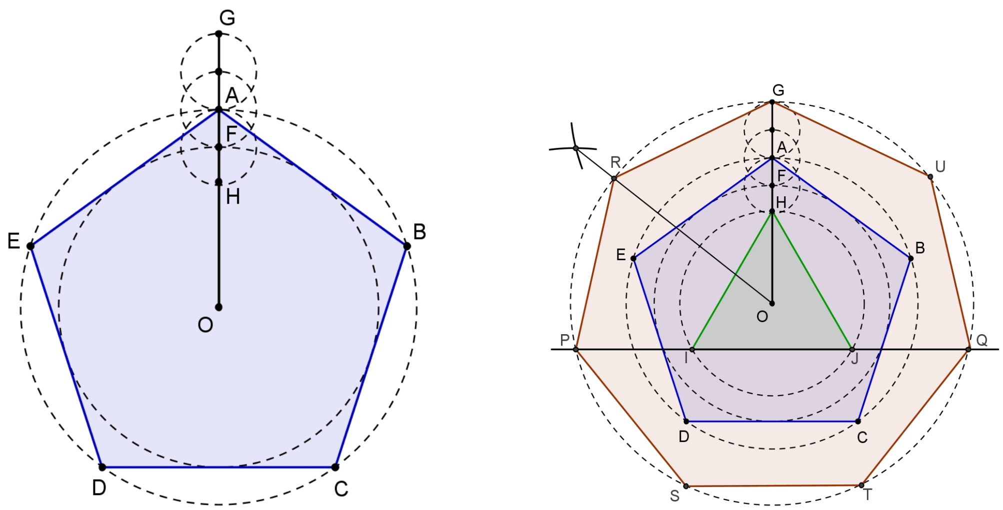


Slika 3: Konstrukcija sedmougla br. 3

3.4. Približna konstrukcija br. 4

Konstrukciju sedmougla br. 4 izvodimo iz konstrukcije petougla (vidjeti Sliku 4).
Neka nam je dat petougao $ABCDE$ i kružnice opisane i upisane u njega. Poluprečnik $\overline{OA}$ siječe kružnicu upisanu u petougao u tački F. Tačke H i G dobijamo tako da je $|AF| = |FH|$ i $|AG| = 2 \cdot |AF|$.

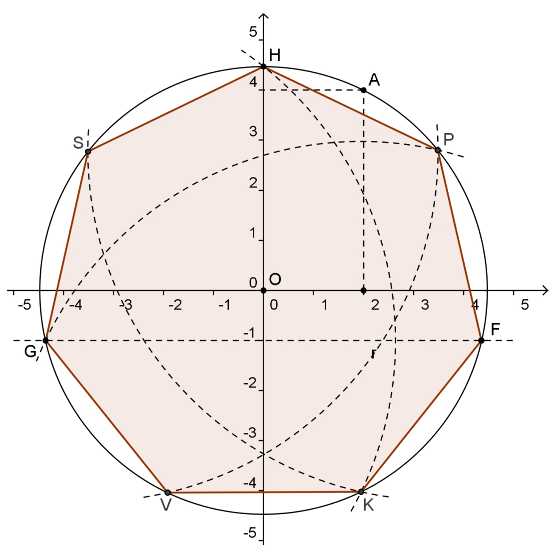
U kružnicu poluprečnika $\overline{OH}$ sa centrom u O upisan je jednakostranični trougao ΔHIJ. Prava IJ siječe kružnicu sa centrom u tački O i poluprečnika $\overline{OG}$ u tačkama P i Q. Tačka R se dobije polovljenjem luka $\widehat{PG}$. Duž $\overline{PR}$ je stranica približno jednaka stranici traženog sedmougla.



Slika 4: Konstrukcija sedmougla pomoću petougla

3.5. Približna konstrukcija br. 5

Za ovu jednostavnu konstrukciju nam je potrebna mreža koordinatnog sistema (vidjeti Sliku 5).

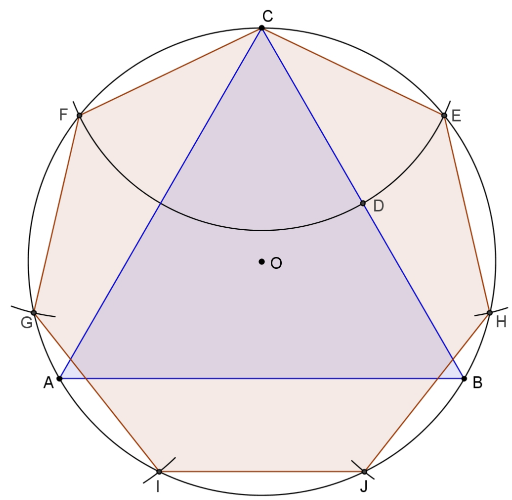


Slika 5: Konstrukcija sedmougla pomoću koordinatne mreže

Nacrtajmo kružnicu sa centrom u koordinatnom početku O tako da prolazi tačkom $A(2, 4)$. Tjemena G i F nalazimo u presjeku kružnice i prave $y = -1$. Zajedno sa tačkom H imamo tri tjemena, a ostala četiri je lako konstruisati pomoću odgovarajućih lukova.

3.6. Približna konstrukcija br. 6

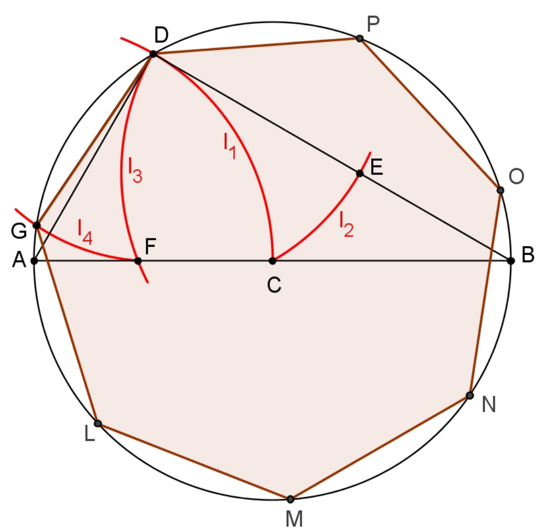
Veoma jednostavnu i elegantnu približnu konstrukciju sedmougla je dao Albrecht Dürer (vidjeti Sliku 6). Oko jednakostraničnog trougla ΔABC opisana je kružnica. Tačka D je sredina stranice $\overline{BC}$. Kružnica sa centrom u tački C i poluprečnika $\overline{CD}$ siječe početnu kružnicu u tačkama E i F. Sa tačkom C to su tri tjemena traženog sedmougla. Vrijednost centralnog ugla ovako konstruisanog sedmougla je približno $51°19'$, što je dobra aproksimacija za vrijednost centralnog ugla pravilnog sedmougla od $\frac{360°}{7} \approx 51°26'$.



Slika 6: Konstrukcija sedmougla Albrechta Dürera

3.7. Približna konstrukcija br. 7

Ova elegantna konstrukcija sedmougla izvodi se pomoću četiri luka (vidjeti Sliku 7).



Slika 7: Konstrukcija sedmougla pomoću četiri luka

U tački A kružnice prečnika $\overline{AB}$ sa centrom u C konstruirajmo luk l_1 poluprečnika $\overline{AC}$. U tački D presjeka luka l_1 i početne kružnice konstruiramo drugi luk l_2, istog poluprečnika, koji siječe duž $\overline{BD}$ u tački E. Tačka E je centar trećeg luka l_3 poluprečnika $\overline{ED}$ koji siječe poluprečnik $\overline{AC}$ u tački F. Očigledno je

$$|AC| = |AD| = |DC| = |DE| = |EF| \ .$$

Četvrti luk je sa centrom u tački D i poluprečnika $\overline{DF}$ i siječe polaznu kružnicu u tački G. Duž $\overline{DG}$ je stranica približno jednaka stranici traženog sedmougla.
Po konstrukciji je

$$\sphericalangle GCD = \sphericalangle FED = 120^\circ - \arccos(\sin(60^\circ) - \sin(30^\circ)).$$

4. Pogreška u konstrukcijama

Greške koje činimo u gore navedenim približnim konstrukcijama sedmougla date su u Tablici 1. Prikazane su u procentima odstupanja vrijednosti centralnog ugla sedmougla u približnim konstrukcijama od tačne vrijednosti tog ugla kod pravilnog sedmougla.

Konstrukcija	Centralni ugao	Greška
Pravilan sedmougao	51.428571°	0.000%
Konstrukcija 1	51.317812°	0.215%
Konstrukcija 2	51.827292°	0.775%
Konstrukcija 3	51.518222°	0.174%
Konstrukcija 4	51.460483°	0.062%
Konstrukcija 5	51.460500°	0.062%
Konstrukcija 6	51.316667°	0,218%
Konstrukcija 7	51.470701°	0.082%

Tablica 1: Pogreške pri gore navedenim približnim konstrukcijama sedmougla

Literatura

[1] A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics*, Washington, Math. Assoc. Amer., 1964.
[2] L. Bankoff, J. Garfunkel: The Heptagonal Triangle*., Math. Mag. 46*, 1973.
[3] V. Benčić: *Elementarna geometrija*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
[4] B. Bold: *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, New York: Dover, 1982.
[5] J. L. Coolidge: *The mathematics of great amateurs*, Oxford, University Press, 1950.
[6] J. C. Cortés: *Estudio matemático del trazado general de polígonos regulares*, Epsilon 39, 1997.
[7] R. Courant, H. Robbins: *Šta je matematika?*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
[8] R. Courant, H. Robbins: *The Regular Heptagon, An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, 1996.
[9] Ž. Hanjš: Približne konstrukcije nekih pravilnih mnogokuta, *MFL 1*, 1993/94.
[10] R. Hartshorne: *Geometry Euclid and Beyond*, Springer, New York, 2000.
[11] Z. Lučić: *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Sl. glasnik, Beograd, 2009.
[12] G. E. Martin: *Geometric Constructions*, Springer-Verlag, New York, 1998.
[13] M. Nurkanović: *Elementarna matematika sa stanovišta više matematike*, 2018. (skripta).
[14] R. Onodi: *Različiti algebarski i geometrijski aspekti konstrukcije pravilnih poligona*, Magistarski rad, PMF Tuzla, 2010.
[15] Đ. Paunović: *Pravilni poligoni*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.
[16] J. Stillwell: *Mathematics and Its History*, Springer-Verlag, New York, 1989.
[17] D. Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, London, 1991.

Sjećanje na Roberta

Rad, koji ste upravo pročitali, nije slučajno prvi rad u drugom broju časopisa. Na ovaj način smo htjeli da odamo poštovanje i oživimo uspomenu na našeg, rano preminulog, kolegu matematičara Onodi Roberta (1960. – 2012.). Sjećam se, kada sam došao na studij matematike na PMF Sarajevo, da smo sve studente starijih godina studija posmatrali sa poštovanjem i respektom, a kolegu Roberta niste mogli ne primijetiti. Odavao je neku vrstu sigurnosti i smirenosti, visok, ozbiljan, uvijek spreman pomoći i nasavjetovati. Takav je bio kasnije i u životu i u poslu, i kao profesor matematike i kao savjetnik za matematiku u Pedagoškom zavodu Tuzla. Vrijedno i odgovorno radio je na stalnom uzdizanju matematičkih vrijednosti kod drugih, na propagiranju važnosti matematike unutar obrazovnog sistema, organizirao takmičenja iz matematike i uvijek bio dostupan i kolegama i učenicima za priču o matematici.
Sarađivali smo sa Robertom i na Odsjeku matematika PMF u Tuzli, pomagao je, izvodio vježbe na mnogim predmetima, uvijek bio spreman da pomogne razvoju Odsjeka matematika i same matematike na ovoj regiji. Na ovom fakultetu je upisao i postdiplomski studij i uspješno magistrirao, pod mentorstvom uvažene kolegice Zehre Nurkanović. Ovaj rad koji ste imali priliku da pročitate je upravo izvod iz Robertovog magistarskog rada.
Na žalost, opaka bolest je prekinula sve njegove planove.
Dragi Roberte, bilo je veliko zadovoljstvo i privilegija poznavati te i raditi s tobom.
Tvoji matematičari te nisu zaboravili. Počivaj u miru, dobri čovječe.

Prof. dr. Enes Duvnjaković