EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 20–26

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Nestandardni dokazi nekih osobina Fibonaccievih brojeva

Ajla Nurkanović[a], Alija Muminagić[b]

[a] *Studentica IV godine, Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *Penzioner, Danska*

Sažetak: Fibonaccievi brojevi posjeduju mnoštvo zanimljivih osobina. Jedna od njih je da se Fibonaccievi brojevi pojavljuju kao koeficijenati u rezultatu i ostatku pri dijeljenju polinoma x^n sa $x^2 - x - 1$. U radu ćemo također uvesti i osnovne pojmove diferentnog računa kako bismo, pored elementarnih metoda, neke od osobina Fibonaccievih brojeva pokazali i metodima diferentnog računa.

1. Uvod

Fibonaccievim brojevima nazivamo članove Fibonaccievog niza koji je definiran kao rješenje linearne diferentne jednadžbe drugog reda

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, F_1 = 1,\ n = 0, 1, 2 \dots \ . \tag{1}$$

Dakle, članovi tog niza, odnosno prvi Fibonaccievi brojevi, su

$$\{F_k\}_{k=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots\} . \tag{2}$$

Rješavanjem diferentne jednadžbe (1) može se doći do eksplicitne formule za opći član Fibonaccievog niza. Naime, iz odgovarajuće karakteristične jednadžbe

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \ ,$$

čiji su korijeni $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, slijedi da je opće rješenje jednadžbe (1) dato sa

$$F_n = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n , \quad n = 0, 1, 2 \dots \ .$$

Koristeći početne vrijednosti $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ dobijamo

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \ ,$$

zbog čega je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right), \quad n = 0, 1, 2 \dots \ , \tag{3}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Email adrese: ajlanurkanovic17@gmail.com (Ajla Nurkanović), (Alija Muminagić)

odnosno

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad n = 0, 1, 2 \ldots ,$$

gdje je $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Interesantno je uočiti da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha ,$$

kao i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\beta. \tag{4}$$

Primijetimo da je broj $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ poznat pod nazivom *zlatni presjek*.
Upoznajmo se i sa nekim osobinama diferentnog računa koji će nam koristiti u kasnijim dokazima (v. [3] i [4]).

Definicija 1.1. *Neka je $x(t)$ funkcija realne ili kompleksne promjenljive t.* ***Diferentni operator*** *(ili razliku prvog reda) definiramo jednakošću*

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t) . \tag{5}$$

Ako je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, kao npr. skup $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, tada umjesto promjenljive t koristimo oznaku n, a umjesto izraza $x(n)$ pišemo x_n, pa jednakost (5) ima oblik

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n .$$

Primjer 1.2. *Neka je a konstanta. Tada vrijedi:*
1° $\Delta a = a - a = 0$,
2° $\Delta a^t = a^{t+1} - a^t = (a-1)a^t$,
3° $\Delta \log at = \log a(t+1) - \log at = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$.

Definicija 1.3. *Ako je X bilo koja funkcija čija je razlika prvog reda funkcija x, tada se X naziva* ***antidiferencijom*** *ili* ***neodređenom sumom*** *od x i označava sa $\Delta^{-1}x$ (ili $\sum x$), to jest*

ako je $\Delta X(t) = x(t)$, *tada je* $\Delta^{-1}x(t) = X(t)$.

Općenito definiramo Δ^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ sa:

$$\Delta^{-n}x(t) = \Delta^{-1}\left(\Delta^{-n+1}x(t)\right) .$$

Primjer 1.4. *Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ funkcija za koju je $\Delta C(t) = 0$. Tada vrijedi:*

$$\Delta^{-1}a^t = \frac{a^t}{a-1} + C(t), \ (a \neq 1) .$$

Lema 1.5. *Za Fibonaccieve brojeve F_k, $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\triangle^{-1} F_k = F_{k+1}. \tag{6}$$

Dokaz : Zaista, koristeći (3), osobine diferentnog operatora i Primjer 1.4, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\triangle^{-1} F_k &= \triangle^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) = F_{k+1}\ .
\end{aligned}$$

□

Sljedeći rezultat je poznat kao *fundamentalni teorem za izračunavanje određenih (konačnih) suma*, koji je analogan fundamentalnom teoremu integralnog računa (za izračunavanje određenih integrala).

Teorem 1.6. *Ako je y_n antidiferencija (neodređena suma) niza x_n i $n \geq m+1$, tada vrijedi*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k = [y_k]_m^n = y_n - y_m\ .$$

Slično metodu parcijalne integracije u integralnom računu imamo metod parcijalnog sumiranja konačnih suma iskazan sljedećim teoremom.

Teorem 1.7. *Ako je $m < n$, tada je*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k \Delta y_k = [x_k y_k]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta x_k)\, y_{k+1}\ . \tag{7}$$

2. Neke osobine Fibonaccievih brojeva i primjena na računanje suma

Jedna vrlo zanimljiva osobina Fibonaccievih brojeva može se dobiti dijeljenjem polinoma, kao u sljedećem slučaju. Naime, nije teško provjeriti da je

$$x^7 = \left(x^2 - x - 1\right)\left(\mathbf{1}\cdot x^5 + \mathbf{1}\cdot x^4 + \mathbf{2}\cdot x^3 + \mathbf{3}\cdot x^2 + \mathbf{5}\cdot x + \mathbf{8}\right) + \mathbf{13}\cdot x + \mathbf{8}\ . \tag{8}$$

Uočavamo da su koeficijenti (podebljano) na desnoj strani jednakosti (8) brojevi **1**, **1**, **2**, **3**, **5**, **8**, **13** i **8** a oni pripadaju skupu (2), tj. to su Fibonaccievi brojevi: F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7 i F_6.
Pokažimo sada da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi generalizacija formule (8).

Lema 2.1. *Vrijedi*

$$x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(F_1 x^{n-2} + F_2 x^{n-3} + \cdots + F_{n-2} x + F_{n-1}\right) + F_n x + F_{n-1}\ , \tag{9}$$

gdje su F_n $(n \in \mathbb{N})$ Fibonaccievi brojevi.

Dokaz : Zaista, nakon množenja desna strana formule (9) postaje

$$\begin{aligned} &F_1x^n + F_2x^{n-1} + F_3x^{n-2} + \cdots + F_{n-2}x^3 + F_{n-1}x^2 \\ &\qquad - F_1x^{n-1} - F_2x^{n-2} - \cdots - F_{n-3}x^3 - F_{n-2}x^2 - F_{n-1}x \\ &\qquad\qquad - F_1x^{n-2} - \cdots - F_{n-3}x^3 - F_{n-3}x^2 - F_{n-2}x + F_nx \ , \end{aligned}$$

odnosno
$F_1x^n + (F_2 - F_1)\, x^{n-1} + (F_3 - F_2 - F_1)\, x^{n-2} + \cdots + (F_{n-1} - F_{n-2} - F_{n-3})\, x^2 + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})\, x.$
Koristeći relacije (1) dobijamo da je desna strana u (9) jednaka x^n. □
Uočimo da dijeljkenje polinoma x^n sa x^2-x-1 nije slučajno jer se polinom x^2-x-1 javlja u karakterističnoj jednadžbi diferentne jednadžbe (1).
Sljedeća osobina za Fibonaccieve brojeve je dobro poznata, ali ćemo za njen dokaz ovdje koristiti nestandardan metod, to jest jednakost (9).

Lema 2.2. *Za zbir prvih n Fibonaccievih brojeva $F_1, F_2, \ldots F_n$ vrijedi sljedeće:*

$$S_n = F_{n+2} - 1 \ . \tag{10}$$

Dokaz : Ako u (9) umjesto x stavimo 1, dobijamo

$$1^n = \left(1^2 - 1 - 1\right)(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1}) + F_n + F_{n-1} \ ,$$

odnosno

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} - 1 \ .$$

Sada, koristeći (1), dobijamo da je

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1} = F_{n+1} - 1 \ .$$

Ako sada dodamo F_n na obje strane, imamo

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n = F_{n+1} + F_n - 1$$

i ponovo, koristeći (1), dobijamo da je

$$S_n = F_{n+2} - 1 \ .$$

□
Sljedeća osobina može jednostavno se dokazati matematičkom indukcijom (što ostavljamo čitaocu za vježbu). Međutim, pokazat ćemo da se dokaz može izvesti i na dva nova načina: primjenom jednakosti (6), te primjenom diferentnog računa (metodom parcijalnog sumiranja).

Teorem 2.3. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi formula*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 \ . \tag{11}$$

Dokaz : Dokažimo formulu (11) na dva načina.

I način: Koristeći (10) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
T_n &= 1 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2 + \cdots + n \cdot F_n \\
&= (F_1 + F_2 + \cdots + F_n) + (F_2 + \cdots + F_n) + \cdots + (F_{n-1} + F_n) \\
&= S_n + (S_n - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\
&= nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} (F_{k+2} - 1) \\
&= nS_n - (F_3 + F_4 + \cdots + F_{n+1} - (n-1)) \\
&= nS_n - (S_{n+1} - (F_1 + F_2) - (n-1)) \\
&= nS_n - (S_{n+1} - 2 - (n-1)) \\
&= nS_n - S_{n+1} + n + 1 = n(F_{n+2} - 1) - (F_{n+3} - 1) + n + 1 \\
&= nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 \; .
\end{aligned}$$

II način: Primjenom Teorema 1.7 dobijamo da je

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} kF_k = \left| \begin{array}{lll} k = x_k & \Rightarrow & \triangle x_k = 1 \\ F_k = \triangle y_k & \Rightarrow & y_k = \triangle^{-1} F_k \end{array} \right| \\
&= \left[k \triangle^{-1} F_k \right]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \triangle^{-1} F_{k+1} \; .
\end{aligned}$$

Sada, koristeći (6), imamo da je

$$\begin{aligned}
T_n &= [kF_{k+1}]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} F_{k+2} = (n+1) F_{n+2} - F_2 - (F_3 + F_4 + \cdots + F_{n+2}) \\
&= (n+1) F_{n+2} - F_2 - (S_{n+1} + F_{n+2} - F_1 - F_2) = nF_{n+2} - S_{n+1} + F_1 \; .
\end{aligned}$$

Kako je

$$F_1 = 1 \quad \text{i} \quad S_{n+1} = F_{n+3} - 1 \; ,$$

to je

$$T_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 \; .$$

□

Sljedeći primjer nam ilustrira još neke vrlo zanimljive osobine Fibonaccievih brojeva.

Primjer 2.4. *Ako je sa F_n dat $n-$ti Fibonacciev broj, pokazati da tada vrijedi sljedeća jednakost*

$$\frac{(-1)^n}{F_{2n}} = \frac{F_{n-1}}{F_n} - \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \; . \tag{12}$$

a) Izračunati sumu $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}}$ i provjeriti tačnost te formule za $n = 2, 3, 4$.

b) Izračunati sumu reda $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$.

Rješenje: Kako je F_n dato sa (3), to je

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n-1}}{F_n} - \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(-\sqrt{5}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}\left(-\sqrt{5}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right)} = \frac{(-1)^n}{F_{2n}}\ ,
\end{aligned}$$

odnosno vrijedi (12).

a) Izračunajmo sada sumu $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}}$. U tu svrhu koristit ćemo jednakost (12) za $n = 2^{k-1}$:

$$\frac{(-1)^{2^{k-1}}}{F_{2\cdot 2^{k-1}}} = \frac{F_{2^{k-1}-1}}{F_{2^{k-1}}} - \frac{F_{2\cdot 2^{k-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{k-1}}}\ ,$$

odnosno, kako je n paran broj, dobijamo

$$\frac{1}{F_{2\cdot 2^{k-1}}} = \frac{F_{2^{k-1}-1}}{F_{2^{k-1}}} - \frac{F_{2\cdot 2^{k-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{k-1}}}\ .$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{1}{F_{2^0}} + \frac{1}{F_{2^1}} + \frac{1}{F_{2^2}} + \frac{1}{F_{2^3}} + \frac{1}{F_{2^4}} + \cdots + \frac{1}{F_{2^{n-2}}} + \frac{1}{F_{2^{n-1}}} + \frac{1}{F_{2^n}} \\
&= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_{2\cdot 2}} + \frac{1}{F_{2\cdot 4}} + \frac{1}{F_{2\cdot 8}} + \cdots + \frac{1}{F_{2\cdot 2^{n-3}}} + \frac{1}{F_{2\cdot 2^{n-2}}} + \frac{1}{F_{2\cdot 2^{n-1}}}\ ,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \left(\frac{F_1}{F_2} - \frac{F_3}{F_4}\right) + \left(\frac{F_3}{F_4} - \frac{F_7}{F_8}\right) + \left(\frac{F_7}{F_8} - \frac{F_{15}}{F_{16}}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{F_{2^{n-3}-1}}{F_{2^{n-3}}} - \frac{F_{2\cdot 2^{n-3}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-3}}}\right) + \left(\frac{F_{2^{n-2}-1}}{F_{2^{n-2}}} - \frac{F_{2\cdot 2^{n-2}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-2}}}\right) + \left(\frac{F_{2^{n-1}-1}}{F_{2^{n-1}}} - \frac{F_{2\cdot 2^{n-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-1}}}\right) \\
&= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{F_1}{F_2} - \frac{F_{2\cdot 2^{n-1}-1}}{F_{2\cdot 2^{n-1}}}\ .
\end{aligned}$$

Kako je $F_1 = F_2 = 1$, to je

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}\ . \tag{13}$$

Uvjerimo se u tačnost formule (13) za $n = 2, 3, 4$. Koristit ćemo članove Fibonaccievog niza date u (2). Za $n = 2$ imamo

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} ,$$

ali i

$$3 - \frac{F_{2^2-1}}{F_{2^2}} = 3 - \frac{F_3}{F_4} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} .$$

Za $n = 3$ imamo

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{50}{21} ,$$

ali i

$$3 - \frac{F_{2^3-1}}{F_{2^3}} = 3 - \frac{F_7}{F_8} = 3 - \frac{13}{21} = \frac{50}{21} .$$

Za $n = 4$ imamo

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_8} + \frac{1}{F_{16}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} = \frac{2351}{987} ,$$

ali i

$$3 - \frac{F_{2^4-1}}{F_{2^4}} = 3 - \frac{F_{15}}{F_{16}} = 3 - \frac{610}{987} = \frac{2351}{987} .$$

Dakle, formula (13) je tačna za $n = 2, 3, 4$.

b) Izračunajmo sada red $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$. Koristeći (13) i (4) dobijamo sljedeće

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} \overset{(13)}{=} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} \overset{(4)}{=} 3 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \approx 2.3820 .$$

□

Literatura

[1] J. Carstensen: *Blandet om Fibonacci-og Lucastal*, Matematik Magasinet, 68/2013.

[2] T. Koshy: *Trigonometric Functions and Fibonacci and Lucas Arrays*, Mathematical Spectrum, Vol. 42, Number 3, 2009.-2010.

[3] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe - Teorija i zadaci s primjenom*, PrintCom, Tuzla, 2016.