

Kosinusni teorem i primjena

Alija Muminagić^a, Jens Carstensen^b

^aDanska

^bDanska

Sažetak: Sinusni teorem i kosinusni teorem imaju vrlo značajnu ulogu u geometriji te im se u nastavi matematike posvećuje posebna pažnja. U ovom radu je dat jedan manje poznat dokaz kosinusnog teorema, kao i njegovo geometrijsko značenje.

1. Kosinusni teorem s manje poznatim dokazom

Teorem 1.1. *Kvadrat dužine jedne stranice trougla jednak je razlici zbira kvadrata dužina drugih dviju stranica trougla i dvostrukog proizvoda dužina tih dviju stranica s kosinusom ugla između njih, to jest*

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dokaz : Teorem se može dokazati na više načina, a mi ovdje dajemo jedan manje poznat dokaz.

a) Dokažimo prvo da vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$ u *oštrougloj* trouglu $\triangle ABC$. Ostale dvije jednakosti se slično dokazuju. U tu svrhu neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Ako su D, E i F dodirne tačke datog trougla i njemu upisane kružnice $k(I, r)$ sa centrom u I i poluprečnika r , tada je $|ID| = |IE| = |IF| = r$. Neka je $|CD| = x$. Na osnovu teorema o jednakosti tangenčnih dužina slijedi da je $|CE| = |CD| = x$.

Sa Slike 1 vidimo da je

$$|AE| = |AF| = b - x, |BF| = |BD| = a - x,$$

pa je

$$c = |AB| = |AF| + |FB| = b - x + a - x,$$

odnosno

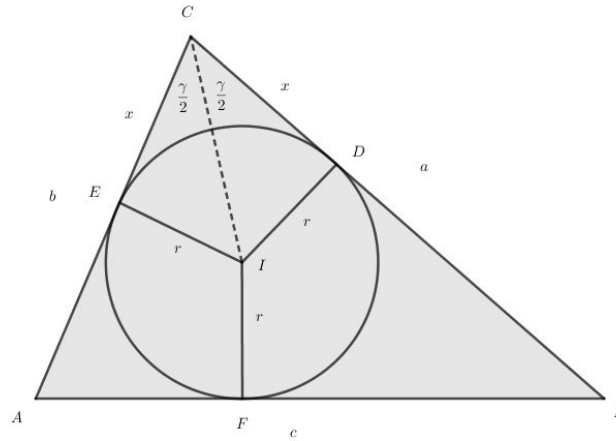
$$x = \frac{a + b - c}{2}. \quad (2)$$

Ciljna skupina: srednja škola

Rad preuzet: 2018.

Kategorizacija: Stručni rad

Email adrese: (Alija Muminagić), (Jens Carstensen)



Slika 1:

Kako je trougao $\triangle IDC$ pravougli, to je $tg \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{x}$, te je

$$x = \frac{r}{tg \frac{\gamma}{2}}. \quad (3)$$

Iz (2) i (3) dobijamo da vrijedi jednakost

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{r}{tg \frac{\gamma}{2}},$$

te imamo da je

$$r = \frac{(a + b - c)}{2} tg \frac{\gamma}{2}. \quad (4)$$

Znamo da je površina trougla $\triangle ABC$ data sa $P_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ i $P_{ABC} = r \cdot s = r \cdot \frac{a + b + c}{2}$, iz čega slijedi da je $\frac{1}{2} ab \sin \gamma = r \cdot \frac{a + b + c}{2}$. Odavde je

$$r = \frac{ab \sin \gamma}{a + b + c} = \frac{2ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{a + b + c}. \quad (5)$$

Konačno, eliminacijom r iz (4) i (5), dobijamo

$$\frac{(a + b - c)}{2} tg \frac{\gamma}{2} = \frac{2ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{a + b + c},$$

odnosno

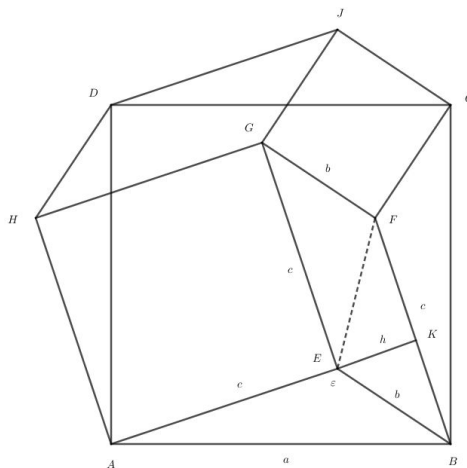
$$(a + b - c)(a + b + c) = 4ab \cos^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Koristeći da je $\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos \gamma}{2}$, posljednja jednakost se može zapisati kao

$$(a + b)^2 - c^2 = 2ab + 2ab \cos \gamma,$$

to jest $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, što je i trebalo dokazati.

b) Neka je sada trougao $\triangle ABE$ tupougli, to jest neka je u tom trouglu ugao $\varepsilon = \angle AEB$ veći od 90° . Prikažimo geometrijski dokaz. Uvedimo oznake kao na Slici 2, to jest $a = |AB|$, $b = |BE|$, $c = |AE|$ i sa P_{XYZ} označimo površinu trougla $\triangle XYZ$, a sa P_{PQRS} površinu četverougla $PQRS$. Nad stranicom AB konstruišimo kvadrat $ABCD$, a nad stranicama BC , CD i AD trouglove $\triangle BCF$, $\triangle CDJ$ i $\triangle ADH$ podudarne s trouglom $\triangle ABE$ (vidjeti Sliku 2). Tako je $P_{AEB} = P_{DJC}$ i $P_{BCF} = P_{ADH}$. Zato su površine četverougla $ABCD$ i mnogougla $AEBFCJDH$ jednake, to jest $a^2 = c^2 + b^2 + 2P_{BEGF}$.



Slika 2:

Kako je

$$P_{BEGF} = 2P_{BFE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = ch ,$$

to je

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2ch = c^2 + b^2 + 2cb \cos(180^\circ - \varepsilon) ,$$

odnosno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \varepsilon$. Druge dvije jednakosti dokazuju se analogno.

c) U slučaju kada je trougao $\triangle ABC$ pravougli, Teorem 1.1 se svodi na Pitagorin teorem. \square

2. Kosinusni teorem - geometrijsko značenje

Po Teoremu 1.1 imamo da u trouglu $\triangle ABC$ vrijedi jednakost

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha , \tag{6}$$

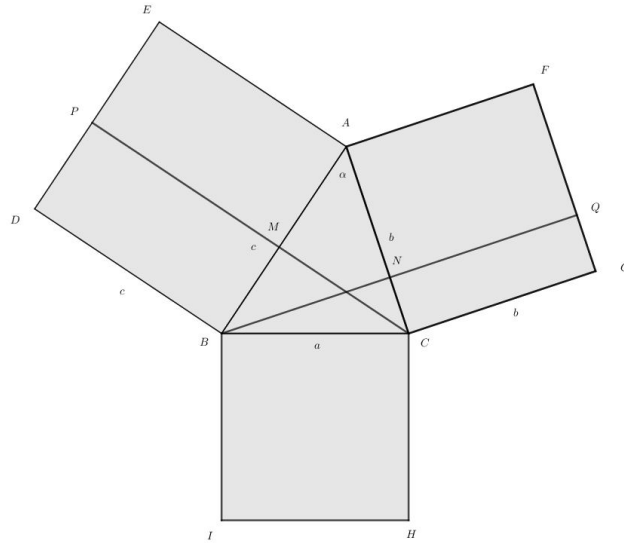
odnosno

$$a^2 = b(b - c \cos \alpha) + c(c - b \cos \alpha) . \tag{7}$$

Pogledajmo šta formula (7) geometrijski predstavlja.

2.1. Trougao $\triangle ABC$ je oštrogli

Nad stranicama datog oštroglog trougla $\triangle ABC$ konstruišimo, redom, kvadrate $ABDE$, $ACGF$ i $BCHI$ (vidjeti Sliku 3). Neka visina povučena iz vrha B datog trougla siječe produžene stranice kvadrata $ACGF$ u tačkama N i Q , a visina povučena iz vrha C siječe produžene stranice kvadrata $ABDE$ u tačkama M i P . Izračunajmo sada koliko je $P_{CNQG} + P_{BMPD}$.



Slika 3:

Znamo da je

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = |CG| \cdot |CN| + |BD| \cdot |BM| = b \cdot |CN| + c \cdot |BM| ,$$

odnosno

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = b(b - |AN|) + c(c - |AM|) .$$

U pravouglom trouglu $\triangle AMC$ je $\cos \alpha = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AM|}{b}$, odnosno $|AM| = b \cos \alpha$. Slično imamo da u pravouglom trouglu $\triangle ANC$ je $\cos \alpha = \frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AN|}{c}$, odnosno $|AN| = c \cos \alpha$. Dakle,

$$P_{CNQG} + P_{BMPD} = b(b - c \cos \alpha) + c(c - b \cos \alpha) . \tag{8}$$

Sada, iz (6),(7) i (8) dobijamo geometrijsko značenje kosinusnog teorema (Teorema 1.1):

Površina kvadrata konstruisanog nad stranicom a jednaka je zbiru površina pravougaonika P_{CNQG} i P_{BMPD} (vidjeti Sliku 3).

2.2. Trougao $\triangle ABC$ je tupougli

Neka je u trouglu $\triangle ABC$ ugao $\alpha > 90^\circ$ (vidjeti Sliku 4). Visine datog trougla iz vrhova B i C sijeku prave AC i AB u tačkama N i M . Na taj način dobijamo opet pravougaonike $CNQG$ i $BMPD$ koji sadrže kvadrate $ACGF$ i $BAED$, tj. kvadrate sa dužinama stranica $|AC| = b$ i $|AB| = c$. U pravouglom trouglu $\triangle AMC$ je

$$\cos \angle MAC = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AM|}{b} ,$$

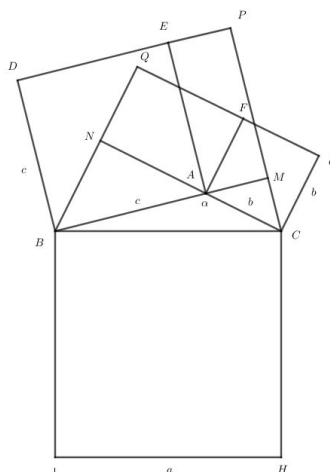
to jest $|AM| = -b \cos \alpha$.

Sada je

$$|BM| = |AB| + |AM| = c - b \cos \alpha ,$$

kao i u slučaju kada je $\triangle ABC$ oštrogli. Jedina razlika je što je sada $|BM| > c$. Dakle, vrijedi da je

$$P_{BMPD} = |BD| \cdot |BM| = c(c - b \cos \alpha) .$$



Slika 4:

Slično se pokaže da je i

$$P_{CNQG} = |CG| \cdot |CN| = b(b - c \cos \alpha) .$$

Dakle, i u ovom slučaju dobijamo isto geometrijsko značenje kosinusnog teorema (Teorema 1.1):

Površina kvadrata konstruisanog nad stranicom a jednaka je zbiru površina pravougaonika P_{CNQG} i P_{BMPD} (vidjeti Sliku 4).

2.3. Trougao $\triangle ABC$ je pravougli

Neka je u trouglu $\triangle ABC$ ugao $\alpha = 90^\circ$. Tada se pravougaonici $CNQG$ i $BMPD$ poklapaju sa kvadratima $CAFG$ i $BAED$ i Teorem 1.1 se poklapa sa Pitagorinim teoremom.

3. Tri rješenja jednog primjera

Primjer 3.1. Dokazati da u svakom trouglu vrijedi jednakost

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cos \alpha + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cos \beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cos \gamma = 3 . \quad (9)$$

Rješenje:

Rješenje 1: Primjenom kosinusnog teorema (Teorem 1.1) dobijamo da je

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

te je

$$\begin{aligned} (9) &\Leftrightarrow \frac{(b^2 + c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2)}{2b^2c^2} + \frac{(a^2 + c^2)^2 - b^2(a^2 + c^2)}{2a^2c^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2 - c^2(a^2 + b^2)}{2a^2b^2} = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{b^4 + 2b^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2}{2b^2c^2} + \frac{a^4 + 2a^2c^2 + c^4 - b^2a^2 - b^2c^2}{2a^2c^2} + \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^2a^2 - c^2b^2}{2a^2b^2} = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2}{2c^2} + 1 + \frac{c^2}{2b^2} - \frac{a^2}{2c^2} - \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2c^2} + 1 + \frac{c^2}{2a^2} - \frac{b^2}{2c^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{a^2}{2b^2} + 1 + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c^2}{2b^2} - \frac{c^2}{2a^2} = 3, \\ &\Leftrightarrow 3 = 3 . \end{aligned}$$

Rješenje 2: Primjenom projekcionih relacija

$$a = c \cos \beta + b \cos \gamma,$$

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha,$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha,$$

(dokazati) dobijamo da je

$$\begin{aligned} (9) &\Leftrightarrow \left(\frac{b \cos \alpha}{c} + \frac{c \cos \alpha}{b} \right) + \left(\frac{c \cos \beta}{a} + \frac{a \cos \beta}{c} \right) + \left(\frac{a \cos \gamma}{b} + \frac{b \cos \gamma}{a} \right) = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{c \cos \beta + b \cos \gamma}{a} + \frac{a \cos \gamma + c \cos \alpha}{b} + \frac{a \cos \beta + b \cos \alpha}{c} = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 3, \text{ što je tačno.} \end{aligned}$$

Rješenje 3: Primjenom Sinusnog teorema dobijamo da je

$$\begin{aligned} (9) &\Leftrightarrow \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right) \cos \beta + \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \cos \gamma = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \gamma \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\sin \gamma} = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin \alpha} + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \beta} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \gamma} = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} + \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin \beta} + \frac{\sin(180^\circ - \gamma)}{\sin \gamma} = 3, \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \beta}{\sin \beta} + \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = 3, \text{ što je tačno.} \end{aligned}$$

□

Literatura

- [1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Zanimljiv dokaz kosinusova poučka*, Miš, broj 81/godina 17./ listopad 2015.
- [2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Matematiske miniaturer*, 1. oplag, Fredniksberg, 2004.
- [3] J. Carstensen: *Cosinusrelationen-et par bemerkninger*, LMFK-bladet Nr. 2, maj 2018.
- [4] V. Pavković: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [5] B.A. Kpeymar: *Zadačnik po algebre*, Hayka, Moskva, 1968.