EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 33–43

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Povšina tangentnog i tetivnog mnogougla

Hasan Smajić[a]

[a] *JU OŠ "Malešići", Malešići*

Sažetak: U ovom radu izvedena je formula za izračunavanje površine bicentričnog četverougla (četverougla koji je istovremeno i tangentni i tetivni) pomoću dužine njegovih stranica. Zatim su izvedene različite forme površine tetivnog mnogougla kao i formula za površinu tangentnog mnogougla.

1. Uvod

Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja započetih u ranijim radovima [1],[2],[3] u kojima su dokazani teoremi o potrebnim i dovoljnim uvjetima da bi konveksni mnogougao bio tangentni (može se u njega upisati kružnica), odnosno tetivni (može se oko njega opisati kružnica).
Poznato nam je da se proučavanje površine trougla, četverougla i pravilnog mnogougla može izvesti na više načina (pomoću različitih formula).
Postavlja se pitanje: kako izračunati površinu tangentnog i tetivnog mnogougla koji nisu pravilni? U ovome radu bit će dat odgovor na to pitanje.
Slike urađene u *GeoGebri* služe uglavnom kao provjera tačnosti algebarskih izračunavanja (valjanosti izvedenih formula).
Prije svega, neophodno je podsjetiti se nekih važnih rezultata dobijenih u [1],[2],[3], a koje ćemo koristiti u nastavku.

Teorem 1.1. *Konveksni mnogougao $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ koji ima neparan broj tjemena ($n=2k+1$) je tetivni ako i samo ako vrijedi jednakost*

$$\frac{a_1}{\cos\varphi_1}=\cdots=\frac{a_{n-2}}{\cos\varphi_{n-2}}=\frac{a_{n-1}}{\cos\varphi_{n-1}}=2R\ ,$$

pri čemu su $a_i=A_iA_{i+1}$, $(i=1,2,\dots n-1)$ bilo kojih $n-1$ stranica mnogougla, $\alpha_i=\measuredangle A_i$ uglovi mnogougla,

$$\varphi_1=\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n}{2}\ ,$$

$$\varphi_i=\measuredangle OA_iA_{i+1}=\measuredangle OA_{i+1}A_i=\alpha_i-\varphi_{i-1},(i=2,3,\dots n-1)\ ,$$

R poluprečnik opisane kružnice trougla $A_1A_2A_3$ i O centar te kružnice.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: *Stručno-istraživački rad*
Email adresa: smajic.cico@gmail.com (Hasan Smajić)

Teorem 1.2. *Konveksni mnogougao $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ koji ima paran broj tjemena ($n = 2k$) je tetivni ako i samo ako vrijedi jednakost*

$$\frac{a_1}{\cos\varphi_1} = \cdots = \frac{a_{n-2}}{\cos\varphi_{n-2}} = \frac{a_{n-1}}{\cos\varphi_{n-1}} = 2R \ ,$$

pri čemu su $a_i = A_iA_{i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots n-1)$ bilo kojih $n-1$ stranica mnogougla, $\alpha_i = \measuredangle A_i$ uglovi mnogougla,

$$\varphi_1 = \arctan\frac{a_2 - a_1\cos\alpha_2}{a_1\sin\alpha_2}, 0^\circ < \varphi_1 < 90^\circ \ ,$$

$$\varphi_i = \measuredangle OA_iA_{i+1} = \measuredangle OA_{i+1}A_i = \alpha_i - \varphi_{i-1}, (i = 2, 3, \ldots n-1) \ ,$$

R poluprečnik opisane kružnice sa centrom u tački O.

Teorem 1.3. *Mnogougao koji ima n tjemena je tangentni ako i samo ako vrijedi jednakost*

$$\frac{a_1}{\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cot\frac{\beta_1}{2}} = \cdots = \frac{a_{n-3}}{\cot\frac{\alpha_{n-3}}{2} + \cot\frac{\beta_{n-3}}{2}} = \frac{a_{n-2}}{\cot\frac{\alpha_{n-2}}{2} + \cot\frac{\beta_{n-2}}{2}} = r \ , \tag{1}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}$ bilo kojih $(n-2)$ stranica pri čemu preostale dvije stranice nisu paralelne, α_i i β_i su uglovi na stranici a_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$, a r je poluprečnik upisane kružnice.

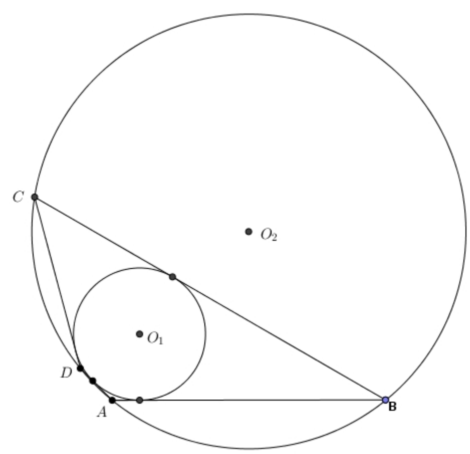
2. Površina bicentričnog četverougla (tangentno-tetivnog)

Na Slici 1 dat je primjer jednog tangentno-tetivnog četverougla, to jest četverougla koji je istovremeno i tangentni i tetivni. Naime, da bi konveksni četverougao $ABCD$ bio bicentrični mora ispunjavati dva uvjeta:

a) zbirovi suprotnih stranica su jednaki, to jest $a + c = b + d$ (uvjet tangentnosti),

b) zbirovi suprotnih uglova su jednaki, to jest $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ (uvjet tetivnosti).

Međutim, prije nego pristupimo postupku izračunavanja površine bicentričnog četverougla, navest ćemo dokaz za izračunavanje površine tetivnog četverougla pomoću dužina njegovih stranica.



Slika 1: Tangentno-tetivni četverougao

Teorem 2.1. *Ako su a, b, c i d dužine stranica tetivnog četverougla, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, tada se njegova površina P_{ABCD} izražava formulom*

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ .$$

Dokaz : Neka je četverougao $ABCD$ tetivni. Vidjeti Sliku 1. Tada je $\alpha + \gamma = 180°$ i

$$\sin\gamma = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha\ .$$

Dalje, imamo da je

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BDC} = \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin\gamma}{2} = \frac{(ad+bc)\sin\alpha}{2} = \frac{(ad+bc)\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2}\ .$$

Kako je

$$\cos\gamma = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\ ,$$

primjenom kosinusnog teorema na trougao ABD i trougao BCD (koristeći da je $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $\cos\gamma = -\cos\alpha$), dobijamo

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha\ ,$$

odnosno

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\ .$$

Zamjenom ovako izračunatog $\cos\alpha$, dobijamo da je

$$P_{ABCD} = \frac{(ad+bc)\sqrt{1-\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}}{4}\ ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \sqrt{\tfrac{-a+b+c+d}{2}\cdot\tfrac{a-b+c+d}{2}\cdot\tfrac{a+b-c+d}{2}\cdot\tfrac{a+b+c-d}{2}} \\ &= \sqrt{\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-a\right)\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-b\right)\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-c\right)\left(\tfrac{a+b+c+d}{2}-d\right)}\ , \end{aligned}$$

to jest

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Zanimljivo je da će formula za površinu bicentričnog četverougla pomoću dužina njegovih stranica imati sličnu, ali jednostavniju formu nego u slučaju tetivnog četverougla.

Teorem 2.2. *Neka su a, b, c i d dužine stranica bicentričnog četverougla $ABCD$. Tada je njegova površina data sa*

$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd}\ .$$

Dokaz : Za bicentrični četverougao $ABCD$ i $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ znamo da je $a + c = b + d$ i da je površina data sa

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ .$$

Kako je

$$\begin{aligned} s-a &= \tfrac{a+b+c+d}{2} - a = \tfrac{2(a+c)}{2} - a = c, \quad s-b = \tfrac{a+b+c+d}{2} - b = \tfrac{2(b+d)}{2} - b = d, \\ s-c &= \tfrac{a+b+c+d}{2} - c = \tfrac{2(a+c)}{2} - c = a, \quad s-d = \tfrac{a+b+c+d}{2} - d = \tfrac{2(b+d)}{2} - d = b\ , \end{aligned}$$

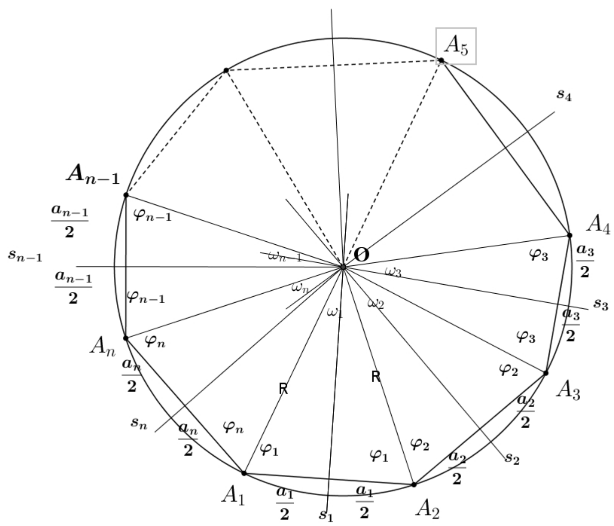
dobijamo da je

$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd}\ ,$$

površina bicentričnog četverougla $ABCD$. □

3. Površina tetivnog mnogougla

Na Slici 2 dat je primjer jednog tetivnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$.



Slika 2: Tetivni mnogougao

Teorem 3.1. *Površina tetivnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ koji ima n tjemena data je sa*

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n\right)}{2} \ ,$$

gdje je $\alpha_i = \sphericalangle A_i,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n}{2}, \quad za \quad n = 2k+1 \ ,$$

i

$$\varphi_1 = \arctan \frac{a_2 - a_1 \cos\alpha_2}{a_1 \sin\alpha_2}, \quad za \quad n = 2k \ ,$$

a

$$\varphi_i = \measuredangle OA_iA_{i+1} = \measuredangle OA_{i+1}A_i = \alpha_i - \varphi_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \ .$$

Dokaz : Kako je

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = P_{OA_1A_2} + P_{OA_2A_3} + \cdots + P_{OA_{n-1}A_n} \ ,$$

to je

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} &= \frac{R^2\sin\omega_1}{2} + \frac{R^2\sin\omega_2}{2} + \cdots + \frac{R^2\sin\omega_n}{2} = \frac{R^2\left(\sin\omega_1 + \sin\omega_2 + \cdots + \sin\omega_n\right)}{2} \\ &= \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n\right)}{2} = \frac{R^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \sin 2\varphi_k}{2} \ . \end{aligned}$$

Ovdje smo koristili poznatu jednakost

$$\sin\omega_i = \sin(180^\circ - 2\varphi_i) = \sin 2\varphi_i \ ,$$

koja vrijedi za uglove ω_i i φ_i u trouglu $\triangle OA_iA_{i+1}$. $\square$

Izvedimo sada formulu za površinu tetivnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ u funkciji stranica $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i uglova $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Kako je $\cos\varphi_i = \frac{\frac{a_i}{2}}{R}$, to je $R^2 = \frac{a_i^2}{4\cos^2\varphi_i}$ i

$$R^2\sin 2\varphi_i = \frac{a_i^2}{4\cos^2\varphi_i}\cdot 2\sin\varphi_i\cos\varphi_i = \frac{a_i^2\sin\varphi_i}{2\cos\varphi_i} = \frac{a_i^2\tan\varphi_i}{2} \ .$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} &= \frac{R^2(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n)}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1^2\tan\varphi_1}{2} + \frac{a_2^2\tan\varphi_2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2\tan\varphi_{n-1}}{2} + \frac{a_n^2\tan\varphi_n}{2}}{2} \ , \end{aligned}$$

odnosno

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{a_1^2\tan\varphi_1 + a_2^2\tan\varphi_2 + \cdots + a_{n-1}^2\tan\varphi_{n-1} + a_n^2\tan\varphi_n}{4} \ ,$$

to jest

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\tan\varphi_k \ .$$

Na kraju, izvedimo formulu za površinu tetivnog mnogougla $A_1\cdots A_{n-1}A_n$ u funkciji stranica $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i poluprečnika R.

Označimo sa h_i visine trouglova OA_iA_{i+1} na stranice a_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ i sa h_n visinu trougla OA_nA_1 na stranicu a_n. Kako je

$$\sin 2\varphi_i = 2\sin\varphi_i\cos\varphi_i = 2\cdot\frac{h_i}{R}\cdot\frac{\frac{a_i}{2}}{R} = \frac{a_i\sqrt{R^2-\frac{a_i^2}{4}}}{R^2} = \frac{a_i\sqrt{4R^2-a_i^2}}{2R^2} \ ,$$

to imamo da je površinu tetivnog mnogougla data sa

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} &= \frac{R^2(\sin 2\varphi_1+\sin 2\varphi_2+\cdots+\sin 2\varphi_{n-1}+\sin 2\varphi_n)}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1}{2}\sqrt{4R^2-a_1^2}+\frac{a_2}{2}\sqrt{4R^2-a_2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}\sqrt{4R^2-a_{n-1}^2}+\frac{a_n}{2}\sqrt{4R^2-a_n^2}}{2} \ , \end{aligned}$$

odnosno

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{4R^2-a_k^2} \ .$$

4. Površina tangentnog mnogougla

Uočimo da relacija (1) vrijedi i kad umjesto $n-2$ stavimo n.

Teorem 4.1. *Površina tangentnog mnogougla $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ izražava se formulom*

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = r\cdot s = r^2\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right) \ ,$$

pri čemu je r poluprečnik upisane kružnice, a α_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ su uglovi mnogougla.

Dokaz : Neka su α_i, α_{i+1} uglovi na stranici a_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, α_n, α_1 uglovi na stranici a_n i r poluprečnik upisane kružnice tangentnog mnogougla. Iz

$$\frac{a_1}{\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cot\frac{\alpha_2}{2}} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{\cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}} = \frac{a_n}{\cot\frac{\alpha_n}{2} + \cot\frac{\alpha_1}{2}} = r \ ,$$

dobijamo da vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 &= r\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cot\frac{\alpha_2}{2}\right), \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= r\left(\cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right), \\ a_n &= r\left(\cot\frac{\alpha_n}{2} + \cot\frac{\alpha_1}{2}\right) \ , \end{aligned}$$

pa je

$$s = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{2} = r\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right) \ .$$

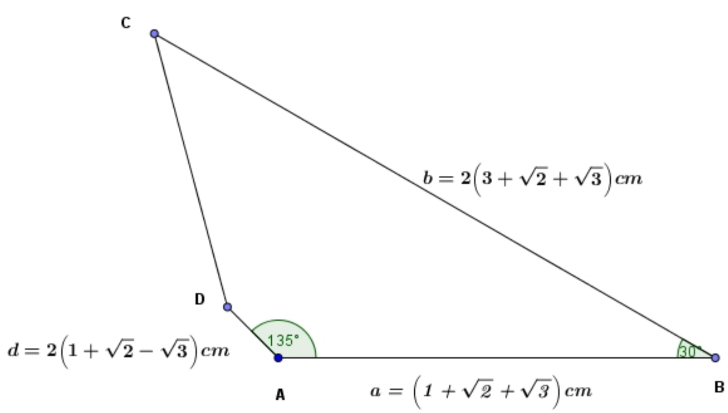
Dakle, formulom

$$P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n} = r \cdot s = r^2\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \cot\frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot\frac{\alpha_n}{2}\right) \ ,$$

izražava se površina tangentnog mnogougla. □

5. Primjeri primjene dobijenih rezultata

Primjer 5.1. *Na Slici 3 dat je četverougao $ABCD$. Pokazati da je dati četverougao bicentričan. Zatim odrediti dužinu stranice $c = CD$, uglove $\gamma = \measuredangle BCD$ i $\delta = \measuredangle ADC$, poluprečnik upisane kružnice r i poluprečnik opisane kružnice R, te površinu P_{ABCD}.*



Slika 3: Četverougao $ABCD$

Rješenje: Da je dati četverougao tetivan dovoljno je pokazati da su uglovi $\omega = \measuredangle ACB$ i $\tau = \measuredangle ADB$ jednaki. Primjenom kosinusnog teorema na trouglove ACB i ADB za $a = |AB| = 2\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$, $b = |BC| = 2\left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$, $d = |AD| = 2\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$ dobijamo

$$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(30°)}, \quad |BD| = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos(135°)} \ ,$$

$$|AC| = 2\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{2}}, \quad |BD| = 4\sqrt{4+\sqrt{2}}\ ,$$

te primjenom sinusnog teorema imamo da je

$$\frac{|AB|}{\sin\omega} = \frac{|AC|}{\sin(30^\circ)}, \quad \frac{|AB|}{\sin\tau} = \frac{|BD|}{\sin(135^\circ)}\ .$$

Sada je

$$\sin\omega = \frac{|AB|\cdot\sin(30^\circ)}{|AC|} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}},$$
$$\sin\tau = \frac{|AB|\cdot\sin(135^\circ)}{|BD|} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}}\ .$$

Dakle, dobili smo da je $\omega=\tau$, pa je četverougao $ABCD$ tetivni.

Kako je četverougao $ABCD$ tetivni, to je $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. Sada je

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2(\beta+\delta) = 360^\circ\ ,$$

odnosno

$$\alpha+\gamma = 180^\circ,$$
$$\beta+\delta = 180^\circ,$$

te je

$$\gamma = 180^\circ-\alpha = 180^\circ-135^\circ = 45^\circ,$$
$$\delta = 180^\circ-\beta = 180^\circ-30^\circ = 150^\circ\ .$$

Pokažimo sada da je dati četverougao i tangentni. Prema Teoremu 1.3 dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\frac{a}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{b}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}}\ .$$

Kako je

$$\frac{a}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\cot\frac{135^\circ}{2}+\cot\frac{30^\circ}{2}} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}+2\right)} = 2\ ,$$

i

$$\frac{b}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\cot\frac{30^\circ}{2}+\cot\frac{45^\circ}{2}} = \frac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)+\left(\sqrt{2}+1\right)} = 2\ ,$$

to je tačno. Dakle, četverougao je tangentni i poluprečnik upisane kreužnice je $r=2$. Za stranicu $c=|CD|$ imamo da je

$$c = r\left(\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}\right) = 2\left(\cot\frac{45^\circ}{2}+\cot\frac{150^\circ}{2}\right) = 2\left(\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\ ,$$

to jest $c = 2\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$.

Odredimo dužinu poluprečnika R opisane kružnice. Kako je $n=4$ paran broj, to prema Teoremu 1.2 imamo da je

$$\varphi_1 = \arctan\frac{b-a\cos\beta}{a\sin\beta} = \arctan\frac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos 30^\circ}{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sin 30^\circ}$$
$$= \arctan\frac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{1}{2}} = \arctan\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+4\right) = \arctan(1.\,232\,7)\ ,$$

odnosno $\varphi_1 \approx 50.95°$. Sada je

$$R = \frac{a}{2\cos\varphi_1} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\cos 50.95°} \approx \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\cdot 0.63},$$

to jest $R \approx 6.581\,4$. Dalje,

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \beta - \varphi_1 \approx 30° - 50.95° = -20.95°,\\
\varphi_3 &= \gamma - \varphi_2 \approx 45° + 20.95° = 65.95°,\\
\varphi_4 &= \delta - \varphi_3 \approx 150° - 65.95° = 84.05° .
\end{aligned}$$

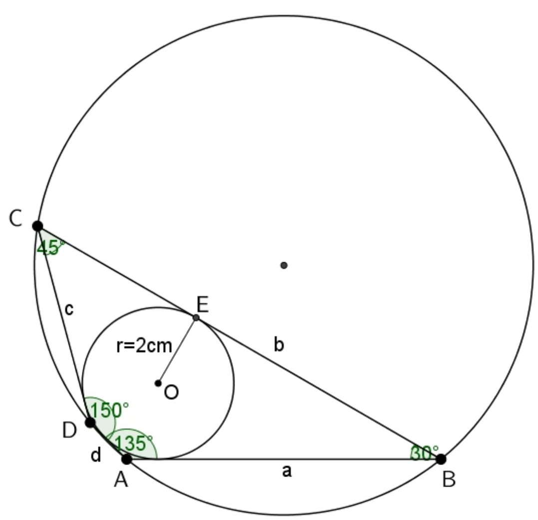
I konačno, izračunajmo površinu bicentričnog četverougla

$$\begin{aligned}
P_{ABCD} &= \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \sin 2\varphi_4\right)}{2}\\
&\approx \tfrac{(6.581\,4)^2(\sin 2(50.95°)+\sin 2(-20.95°)+\sin 2(65.95°)+\sin 2(84.05°))}{2},
\end{aligned}$$

odnosno $P_{ABCD} \approx 27.314$. Isti rezultat dobijamo i ako koristimo sljedeću formulu $P_{ABCD} = \sqrt{abcd}$. Zaista,

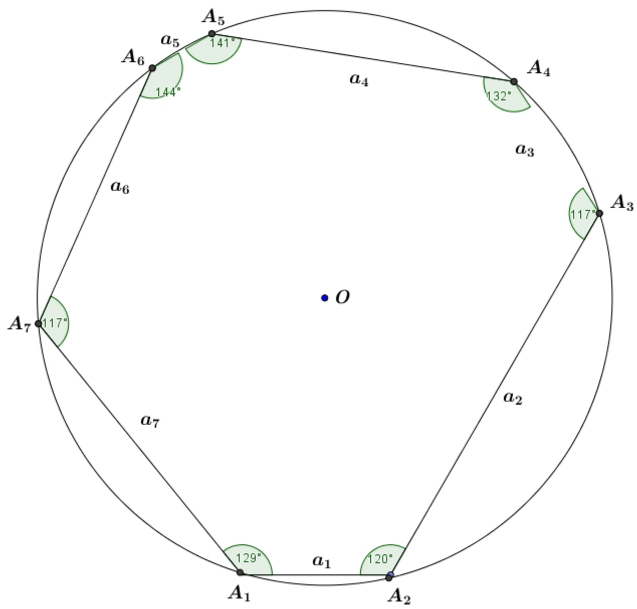
$$\begin{aligned}
P_{ABCD} = \sqrt{abcd} &= \sqrt{2^4\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}\\
&= 4\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3\right)\left(\left(3+\sqrt{2}\right)^2-3\right)} = 8\sqrt{6+4\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

to jest $P_{ABCD} \approx 27.314$ (Vidjeti sliku 4). □



Slika 4: Bicentrični četverougao $ABCD$

Primjer 5.2. *Na Slici 5 dat je sedmougao. Odrediti obim i površinu sedmougla upisanog u kružnicu poluprečnika* $R = 3cm$ *čiji su uglovi redom* $\alpha_1 = 129°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = 117°$, $\alpha_4 = 132°$, $\alpha_5 = 141°$, $\alpha_6 = 144°$, $\alpha_7 = 117°$.



Slika 5: Sedmougao

Rješenje: Kako je $n = 7$ neparan broj imamo da je

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7}{2} = \frac{129^\circ + 120^\circ - 117^\circ + 132^\circ - 141^\circ + 144^\circ - 117^\circ}{2} = 75^\circ \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \alpha_2 - \varphi_1 = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ, \\
\varphi_3 &= \alpha_3 - \varphi_2 = 117^\circ - 45^\circ = 72^\circ, \\
\varphi_4 &= \alpha_4 - \varphi_3 = 132^\circ - 72^\circ = 60^\circ, \\
\varphi_5 &= \alpha_5 - \varphi_4 = 141^\circ - 60^\circ = 81^\circ, \\
\varphi_6 &= \alpha_6 - \varphi_5 = 144^\circ - 81^\circ = 63^\circ, \\
\varphi_7 &= \alpha_7 - \varphi_6 = 117^\circ - 63^\circ = 54^\circ \ .
\end{aligned}$$

Stranice sedmougla su

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2R\cos\varphi_1 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 75^\circ \approx 1.552\,9cm, \\
a_2 &= 2R\cos\varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ \approx 4.242\,6cm, \\
a_3 &= 2R\cos\varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 72^\circ \approx 1.854\,1cm, \\
a_4 &= 2R\cos\varphi_4 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \approx 3.0cm, \\
a_5 &= 2R\cos\varphi_5 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 81^\circ \approx 0.938\,61cm, \\
a_6 &= 2R\cos\varphi_6 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 63^\circ \approx 2.723\,9cm, \\
a_7 &= 2R\cos\varphi_7 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 54^\circ \approx 3.526\,7cm,
\end{aligned}$$

a obim

$$\begin{aligned}
O &\approx (1.552\,9 + 4.242\,6 + 1.854\,1 + 3.0 + 0.938\,61 + 2.723\,9 + 3.526\,7)\,cm, \\
O &\approx 17.839cm \ .
\end{aligned}$$

I konačno,

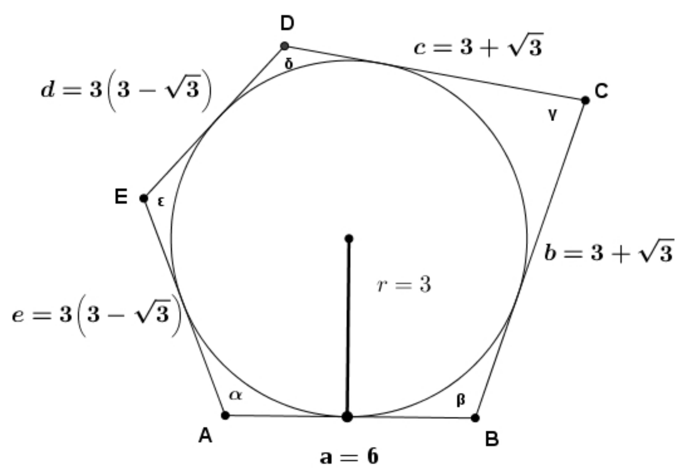
$$P = \frac{R^2\left(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \sin 2\varphi_4 + \sin 2\varphi_5 + \sin 2\varphi_6 + \sin 2\varphi_7\right)}{2} \ ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} P &\approx \tfrac{3^2(\sin 2(75^\circ)+\sin 2(45^\circ)+\sin 2(72^\circ)+\sin 2(60^\circ)+\sin 2(81^\circ)+\sin 2(63^\circ)+\sin 2(54^\circ))}{2} \\ &= \tfrac{9(\sin 150^\circ+\sin 90^\circ+\sin 144^\circ+\sin 120^\circ+\sin 162^\circ+\sin 126^\circ+\sin 108^\circ)}{2} \\ &= \tfrac{9(\sin 30^\circ+1+\sin 36^\circ+\sin 60^\circ+\sin 18^\circ+\sin 54^\circ+\sin 72^\circ)}{2} \\ &= \tfrac{9\left(\frac{1}{2}+1+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)}{2} \\ &\approx 22.603\ . \end{aligned}$$

□

Primjer 5.3. *Na Slici 6 dat je tangentni petougao $ABCDE$ površine $P_{ABCDE} = 3\left(15 - 2\sqrt{3}\right)$. Odrediti njegove uglove.*



Slika 6: Tangentni petougao

Rješenje: Koristeći podatke sa slike i Teorem 4.1 dobijamo da za uglove α_i, α_{i+1} na stranici a_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ i α_5, α_1 uglove na stranici $a_5 = e = 3\left(3 - \sqrt{3}\right)$ i $r = 3$ poluprečnik upisane kružnice tangentnog mnogougla vrijedi

$$\cot\frac{\alpha_i}{2} + \cot\frac{\alpha_{i+1}}{2} = \frac{a_i}{r} \ ,$$

$$\cot\frac{\alpha_5}{2} + \cot\frac{\alpha_1}{2} = \frac{a_5}{2} \ ,$$

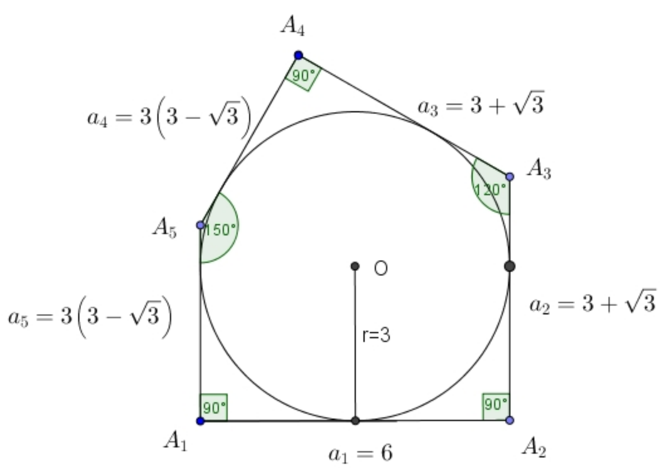
odnosno vrijedi

$$\begin{aligned}
\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2} &= \frac{6}{3}\ ,\\
\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\ ,\\
\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2} &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\ ,\\
\cot\frac{\delta}{2}+\cot\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}\ ,\\
\cot\frac{\varepsilon}{2}+\cot\frac{\alpha}{2} &= \frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}\ .
\end{aligned} \tag{2}$$

Sabiranjem gornjih jednakosti dobijamo

$$2\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\delta}{2}+\cot\frac{\varepsilon}{2}\right)=10-\frac{4\sqrt{3}}{3}\ . \tag{3}$$

Sada koristeći drugu i četvrtu jednadžbu iz (2) u (3) dobijamo da je $\cot\frac{\alpha}{2}=1$, odnosno $\alpha=90°$. Uvrštavajući ovu vrijednost za α prvu jednadžbu sistema (2) dobijamo da je i $\beta=90°$, te iz druge jednadžbe sistema (2) dobijamo $\gamma=120°$, iz treće $\delta=90°$ i iz četvrte $\varepsilon=150°$. Vidjeti rezultate na Slici 7. □



Slika 7: Tangentni petougao

Literatura

[1] H. Smajić: *Tangentni mnogougao*, Didaktički putokazi, Zenica, 2011.
[2] H. Smajić: *Tetivni mnogougao*, Didaktički putokazi, Zenica, 2016.
[3] H. Smajić: *Tetivni mnogougao koji ima paran broj tjemena*, Didaktički putokazi, Zenica, 2017.