EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 44–54

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Metoda Georgya Pólyae

Elvir Mujkić[a]

[a]*Srednja škola, Kalesija*

Sažetak: Vrlo često na različitim nivoima obrazovanja susrećemo se sa problemom da učenici ne znaju kako započeti zadatak, kako ga rješavati i kada su stigli do rješenja, i da li je to rješenje zaista rješenje zadatka. Namjera nam je u ovom radu da nastavnicima i profesorima matematike i učenicima prikažemo metodu kojom se uči metoda rješavanja zadataka, što će biti predstavljeno kroz određen broj primjera sa različitih nivoa obrazovanja.

1. Uvod

George Pólya (mađarski Pólya György, Budimpešta, 13.decembar 1887 godine - Palo Alto, 7. septembar 1985 godine) je bio mađarski matematičar [9]. Nakon završene osnovne škole upisuje gimnaziju gdje najviše interesovanja pokazuje za jezike. Poslije srednje škole prvo upisuje pravo na Budimpeštanskom univerzitetu, ali to brzo napušta i upisuje jezike. Potom vrlo brzo postaje profesor latinskog i mađarskog jezika. Veoma brzo se počeo zanimati za filozofiju, te na nagovor profesora filozofije upisuje tečaj matematike i fizike, kako bi bolje razumio filozofiju. Međutim, uviđa da je matematika ono čime bi se volio baviti. Godine 1910/1911 studirajući na Bečkom Univerzitetu, povremeno uči barunovog sina, provodeći mnogo vremena istražujući načine kako bi mu objasnio matematiku. Nakon toga doktorira u Budimpešti, te odlazi u Zürich da radi na Univerzitetu, između ostalih njegovi studenti su bili Röntgen i Einstein. Poslije toga odlazi na Oxford i Cambridge na godinu dana, a onda zajedno sa suprugom 1940 godine emigrira u Palo Alto, u SAD, zbog svojih židovskih korijena. Tamo objavljuje više knjiga iz matematike, a najznačajnije je pomenuti da je 1945 godine objavio knjigu "How to solve it" koja je prodana u više od milion primjeraka, a prevedena je na 17 svjetskih jezika (između ostalih je i srpko-hrvatski jezik, a prevod je objavljen 1966 godine u izdanju zagrebačke "Školske knjige").

2. Kako riješiti problem

Moderna nastava matematike se obično opisuje kao nastava orijentirana prema učenicima, što znači da se dosadašnja dominantna uloga nastavnika stavlja u drugi plan, a povećava se učenička aktivnost u nastavi matematike. Time nastavnik nije više u poziciji glavnog aktera prijenosa znanja, već postaje koordinator i organizator nastavnog procesa. Pored toga, tendencija je poticati odgovornost učenika za vlastiti uspjeh i napredovanje u matematici. Eksperimentalan rad ima važno mjesto u metodici matematike jer je povezan s heurističkim strategijama i idejama. Heuristička metoda se odnosi na vođenje, poticanje i usmjeravanje

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Email adresa: eelvir.mujkic@yahoo.com (Elvir Mujkić)

učeničkih ideja na pronalaženje rješenja problema i otkrivanje novih sadržaja. To nastavnikovo vođenje i usmjeravanje se uglavnom ostvaruje kroz razgovor, osim spomenutih metodičkih rješenja komuniciranja i vođenja učenika tokom nastavnog sata do korištenja svih novih komunikacijskih medija. Kroz sve ove metode se može implementirati i metoda George Pólya koju je on opisao u svojoj knjizi "*How to solve it*".

Naime, George Pólya je sredinom prošlog vijeka istraživao nastavu matematike orijentisanu ka učeniku. U tom istraživanju je došao do algoritma za rješavanje matematičkih zadataka koji se sastoji od četiri koraka, a to su: Razumjeti problem (Izvorno: Understanding the problem), Izradite plan (Devising a plan), Izvršavanje plana (Carrying out the plan) i Pogled unazad i provjera (Looking back) [4].

Prvi korak

Razumjeti problem: Često prilikom rješavanja zadataka učenici i ne razumiju postavljeni zadatak [8]. Tako da je potrebno prvo sa učenicima razjasniti šta je traženo zadatkom, mada to nekada izgleda tako jednostavno. U svrhu toga George Pólya u svojoj knjizi [4], nam nudi određen broj pitanja koja trebamo postavljati učenicima kako bi provjerili da li razumiju zadatak. Ta pitanja su: *Šta je nepoznato? Šta je zadato? Kako glasi uslov? Da li je moguće zadovoljiti uslov? Da li je uslov dovoljan za određivanje nepoznate? Ili nije dovoljan? Ili preodređen? Ili kontradiktoran? Nacrtaj sliku! Uvedi prepoznatljive oznake! Rastavi razne dijelove uslova? Da li ih možeš napisati?*
Pored navedenih pitanja u kontekstu zadatka i razumijevanja istog nastavnik može dodati još neko pitanje?

Drugi korak

Izradite plan: U ovom dijelu potrebno je potražiti vezu između zadatog i nepoznatog. Ako nije moguće naći neposrednu vezu, onda se moraju razmotriti i neki drugi pomoćni zadaci koji su vezani za zadate odnosno nepoznate veličine. U svrhu toga možemo se poslužiti slijedećim pitanjima: *Da li si zadatak već vidio? Ili si isti zadatak vidio u nešto drugačijem obliku? Znaš li neki srodni zadatak? Da li znaš teoremu koja bi mogla pomoći? Razmotri nepoznatu! Pokušaj da se sjetiš nekog poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznatu! Evo zadatka koji je sličan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti? Možeš li primijeniti njegov rezultat? Možeš li primijeniti metodu kojom je zadatak riješen? Da li možeš da uvedeš neki pomoćni element koji bi ti olakšao upotrebu tog zadatka? Možeš li da drugačije formulišeš zadatak? Da li ga je moguće izraziti na još neki način? Vrati se na definicije!* [4]
Na kraju treba napraviti plan kako bi se zadatak trebao riješiti.
Ako ne možeš da riješiš postavljeni zadatak pokušaj prvo da riješiš neki srodan zadatak! Možeš li da se sjetiš nekog lakšeg zadatka koji mu je sličan? Opštiji zadatak? Specifičniji zadatak? Analogan zadatak? Možeš li da riješiš dio zadatka? Zadrži samo jedan dio uslova, a odbaci drugi dio; kada je tako nepoznata određena kako se može mijenjati? Da li iz datih podataka možeš izvući nešto upotrebljivo? Da li možeš da se sjetiš nekih drugih podataka koji ti mogu pomoći u određivanju nepoznate? Možeš li da promijeniš nepoznatu, ili date podatke, ili ako treba i jedno i drugo tako da nova nepoznata i novi podaci budu međusobno bliži? Da li si iskoristio sve zadato? Da li si iskoristio uslov u potpunosti? Da li si uzeo sve bitne pojmove koji se nalaze u zadatku? [4]

Treći korak

Izvršavanje plana: Ovdje učenici treba da izvrše naznačene radnje u *izradi plana*. Takođe se mogu dati konstatacije i postaviti pitanja kako bi se olakšalo izvršavanje plana. Evo nekih od njih: *Kada koristiš plan rješavanja, kontroliši svaki korak! Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan? Možeš li pokazati da je ispravan?*

Četvrti korak

Pogled unazad i provjera: Kada je zadatak riješen treba se osvrnuti na zadatak odnosno na postupak rješavanja zadatka, provjeriti i diskutovati rješenje zadatka. Sve ovo se može uraditi kroz pitanja: *Možeš li provjeriti rezultat? Možeš li provjeriti dokaz? Možeš li rješenje izvesti na drugi način? Možeš li ga uočiti na prvi pogled? Možeš li zadatak ili rezultat upotrijebiti na nekom drugom zadatku?* [4]
Ovakav način rješavanja zadataka neće dati rezultat ako se ne bude koristio češće. Naime, potrebno je od ranih razreda početi sa primjenom ovog algoritma za rješavanje zadataka, pa čak i od prvog razreda osnovne škole, kako bi učenici razvili ovaj algoritam što bolje. Možemo zaključiti: *"Da bi učenje bilo učinkovito, učenik se mora zainteresirati za gradivo koje uči, nalaziti zadovoljstvo u samom procesu učenja gradiva,* [5]*."*
U cilju promocije ovakvog načina učenja, ovdje ćemo dati jedan pregled upotrebe ovog algoritma kroz zadatke od ranih razreda osnovne škole do srednje škole.

3. Primjeri

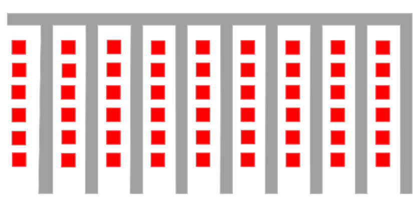
U svakom primjeru ćemo pored postavljanja pitanja za razrađivanje plana rješavanja zadataka, pisati i pretpostavljene odgovore od strane učenika.
Prvi zadatak je iz matematike za treći razred devetogodišnje osnovne škole [6], iz nastavne oblasti *Tablica množenja i dijeljenja.*

Primjer 3.1. *U naselju su* 54 *kuće. Sve kuće su jednako podijeljene u* 9 *ulica. Koliko je kuća u svakoj ulici?*

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Postavljamo pitanje sebi i učenicima:
Nastavnik: Šta znamo?
Učenik: Znamo da je u naselju ukupno 54 kuće i da su raspoređene u 9 ulica. Svaka ulica ima isti broj kuća.
Nastavnik: Kako možemo preformulisati pitanje?
Učenik: Ako je u naselju 9 ulica i u svakoj ulici jednak broj kuća, koliko kuća ima u svakoj ulici, ako naselje ima ukupno 54 kuće?
Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Kako izraditi plan?
Učenik: Kako u naselju ima ukupno 54 kuće, a u svakoj od 9 ulica jednak broj kuća, to ćemo ukupan broj kuća podijeliti sa brojem 9 i dobiti broj kuća u svakoj ulici.
Korak 3.: Izvršavanje plana

$$54 : 9 = 6\ .$$

Nastavnik: Odgovor je:
Učenik: U svakoj ulici ima po 6 kuća.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Da bi provjerili rezultat i da li smo upotrijebili sve zadate elemente trebamo pomnožiti broj ulica sa brojem kuća u ulici, tako dobijemo ukupan broj kuća u naselju. Ako se rezultat poklapa sa datim brojem kuća u naselju onda smo tačno izvršili zadatak: $9 \cdot 6 = 54$.
Što možemo prikazati i slikovito, a znači da smo dobro odredili broj kuća u pojedinoj ulici. □



Slika 1: Naselje sa ulicama

Drugi zadatak je iz matematike za treći razred devetogodišnje osnovne škole [6], iz nastavne oblasti *Sabiranje više brojeva sa upotrebom zagrada.*

Primjer 3.2. *Izračunati vrijednost izraza:* $(91 - 5) - 3$.

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta trebamo izračunati?
Učenik: Trebamo izračunati razliku, broja u zagradi (91-5) i umanjioca (3).
Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Koju operaciju ćemo prvo rješavati?
Učenik: Prvo rješavamo onu operaciju koja se nalazi u zagradi.

Nastavnik: Kakvi su brojevi u zagradi?
Učenik: Jedan broj je dvocifren, a drugi broj je jednocifren. Umanjenik je dvocifren broj 91, a umanjilac je jednocifren broj 5.
Nastavnik: Da li smo rješavali slične zadatke?
Učenik: Da, jesmo.
Nastavnik: Na koji način smo određivali razliku takvih brojeva?
Učenik: Ovakvu razliku određujemo tako što od cifre jedinica umanjenika oduzmemo umanjilac. Ako je cifre jedinica umanjenika manja od umanjioca, tada uz cifru jedinica pišemo deseticu 1, a cifru desetica umanjimo za 1. Tako dobijamo broj između 10 i 19, koji je sigurno veći od umanjioca, pa možemo izvršiti oduzimanje.
Nastavnik: Šta nam preostaje?
Učenik: Na kraju od dobivene razlike brojeva iz zagrade oduzmemo broj koji se nalazi iza zagrade (3).

Korak 3.: Izvršavanje plana

Učenici izvršavaju plan, a jedan od njih to radi na tabli:

$$(91-5)-3=$$
$$(80+11-5)-3=$$
$$86-3=83\ .$$

Korak 4.: Pogled unazad i provjera

Nastavnik: Možemo li provjeriti tačnost?
Učenik: Možemo! Tako što na razliku dodamo umanjioce, prvo onaj izvan zagrade (3), pa zatim i onaj u zagradi (5):

$$(83+3)+5=86+5=91\ .$$

□

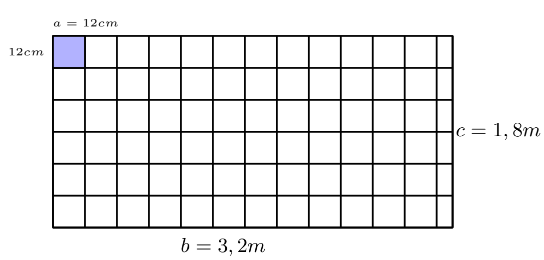
Treći zadatak je iz matematike za sedmi razred devetogodišnje osnovne škole [3], iz nastavne oblasti *Površina pravougaonika, kvadrata i paralelograma*.

Primjer 3.3. *Koliko je potrebno pločica oblika kvadrata stranice* $12cm$*, da se poploča pod kupatila dimenzija: dužine* $2,3m$ *i širine* $1,8m$*?*

Rješenje:

Korak 1.: Razumjeti problem

Nastavnik: Šta znamo?
Učenik: Znamo da su pločice u obliku kvadrata čija je stranica $a=12cm$, i znamo dimenzije kupatila $b=2,3m$ i $c=1,8m$, koje je u obliku pravougaonika.
Nastavnik: Šta trebamo odrediti?
Učenik: Trebamo odrediti koliko komada pločica će biti potrebno da se poploča pod kupatila.
Nastavnik: Nacrtajmo skicu kako bi to izgledalo.



Slika 2: Raspored pločica

Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Kako ćemo to odrediti, možemo se poslužiti i skicom?
Učenik: Odrediti ćemo površinu koju pokriva jedna pločica, i površinu kupatila. Onda ćemo površinu kupatila podijeliti sa površinom jedne pločice. Označimo sa P_k površinu kupatila, a sa P_p površinu pločice.
Nastavnik: Kako ćemo izračunati površine pločice i kupatila?
Učenik: Površine pločice odnosno kupatila ćemo izračunati kao površine kvadrata odnosno pravougaonika, to jest $P_p = a^2$, odnosno, $P_k = b \cdot c$.
Nastavnik: O čemu moramo voditi računa?
Učenik: Moramo paziti da jedinica mjere površine kupatila bude ista jedinici mjere površine jedne pločice.
Nastavnik: Šta ako nisu iste jedinice mjere površina?
Učenik: Potrebno ih je pretvoriti u iste jedinice mjere.
Nastavnik: Da li je bitno koju jedinicu mjere odabrati u koju ćemo izvršiti pretvaranje i zašto?
Učenik: Ne, nije bitno koja je jedinica mjere, zato što će omjeri mjernih brojeva tih površina biti jednaki bez obzira na jedinicu mjere.
Korak 3.: Izvršavanje plana

$$P_k = b \cdot c = 2,3m \cdot 1,8m \ ,$$
$$P_k = 4,14m^2 \ .$$
$$P_p = a^2 = (12cm)^2 = 144cm^2 \ .$$

Kako je $1m^2 = 100^2cm^2 = 10000cm^2$, tada je

$$P_k = 4,14m^2 = 4,14 \cdot 1000cm^2 \ ,$$
$$P_k = 41400cm^2 \ .$$

Dakle, odnos površine kupatila i površine jedne pločice je,

$$P_k : P_p = 41400c^2 : 144cm^2 = 287,5 \ .$$

Za popločavanje poda kupatila dimenzija, dužina $2,3m$ i širine $1,8m$, potrebno je 287,5 komada pločica, čija je stranica $12cm$.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Provjerimo tačnost rezultata? Kako? Jesmo li iskoristili sve zadane podatke?
Učenik: Pomnožimo li mjerni broj površine jedne pločice sa brojem pločica dobićemo površinu koju će pokriti taj broj pločica. Ako ta površina bude jednaka površini kupatila, naš način računanja će biti ispravan i tačan.

$$144cm^2 \cdot 287,5 = 41400cm^2 = 4,14m^2 \ .$$

Nastavnik: Odakle zaključujemo da smo ispravno postupili u planu i tačno izvršili račun.
Takođe, vidimo da smo iskoristili sve zadane vrijednosti iz postavke zadatka. □

Četvrti zadatak je iz matematike za sedmi razred devetogodišnje osnovne škole [3], iz nastavne oblasti *Površina pravougaonika, kvadrata i paralelograma.*

Primjer 3.4. *Osnovica paralelograma je* $3,56m$*, a njegova površina* $6,28m^2$*. Kolika je udaljenost između osnovica paralelograma?*

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta nam je poznato?
Učenik: Poznate su nam osnovica paralelograma i njegova površina.
Nastavnik: Šta predstavlja udaljenost između osnovica?

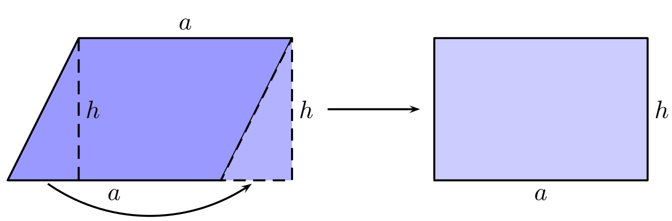
Učenik: Udaljenost između osnovica predstavlja visinu paralelograma.
Nastavnik: Kako možemo preformulisati zadatak?
Učenik: Kolika je visina paralelograma kod kojeg znamo da je osnovica $3,56m$ i površina paralelograma $6,28m^2$?

Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Pomoću koje poznate veličine paralelograma možemo odrediti visinu paralelograma?
Učenik: Pomoću površine i osnovice paralelograma.
Nastavnik: Kako se računa površina paralelograma?
Učenik: Površina paralelograma se računa pomoću formule $P = a \cdot h$, gdje je a osnovica paralelograma, a h je visina paralelograma na tu osnovicu.
Uvrštavanjem poznatih veličina dobijamo prostu linearnu jednačinu, koju treba riješiti.
Korak 3.: Izvršavanje plana

$$\begin{aligned} P &= a \cdot h \ , \\ 6,28m^2 &= 3,56m \cdot h / : 3,56m \ , \\ h &= 6,28m^2 : 3,56m \ , \\ h &= 1,33...m \ . \end{aligned}$$

Visina odnosno udaljenost između osnovica paralelograma je $h = 1,33...m$.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Da bismo provjerili tačnost ovog zadatka konstruišimo paralelogram osnovice a i visine h, a zatim taj paralelogram treba pretvoriti u pravougaonik, koji će imati površinu jednaku površini paralelograma. Kao što možemo vidjeti na sljedećoj slici:

$\square$



Slika 3: Odnos paralelograma i pravougaonika

Peti zadatak je iz matematike za deveti razred devetogodišnje osnovne škole [1], iz nastavne oblasti *Razlomljeni racionalni izrazi.*

Primjer 3.5. *Izvršiti naznačene operacije s racionalnim algebarskim izrazima:*

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{3a}{a^2-b^2}$$

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta trebamo uraditi sa racionalnim algebarskim izrazima?
Učenik: Trebamo izvršiti naznačene operacije, odnosno trebamo izvršiti oduzimanje datih razlomaka.
Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Kako se vrši oduzimanje algebarskih razlomaka?
Učenik: Oduzimanje algebarskih razlomaka se vrši dovođenjem na isti zajednički imenilac, a zatim brojnike oduzimamo.
Nastavnik: Znamo li zajednički imenilac?
Učenik: Ne znamo.

Nastavnik: Kako određujemo zajednički imenilac?
Učenik: Zajednički imenilac određujemo na osnovu prostih faktora svih imenilaca.
Nastavnik: Šta to znači?
Učenik: To znači da sve imenioce trebamo rastaviti na proste faktore.
Nastavnik: Da li smo to već ranije radili u nekim zadacima, i možemo li ih iskoristiti u našem primjeru?
Učenik: Jesmo, radili smo zadatke sa rastavljanjem polinoma na proste faktore. Kako su prva dva imenioca prosti faktori, to ćemo treći imenilac rastaviti $a^2 - b^2$, kao razliku kvadrata, to jest $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
Nastavnik: Hoćemo li moći tada odrediti zajednički imenilac?
Učenik: Da, moći ćemo odrediti zajednički imenilac.
Nastavnik: Šta dalje trebamo uraditi?
Učenik: Dalje moramo prvi i drugi razlomak proširiti, kako bi mogli izvršiti oduzimanje.
Nastavnik: U redu. Vidim da imate plan za rješavanje ovog zadatka, hajdemo ga izvršiti.
Korak 3.: Izvršavanje plana
Učenik: Prvo ćemo rastaviti treći imenilac na proste faktore kako smo i rekli,:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \ ,$$

a onda ćemo vršiti operacije proširivanja i oduzimanja razlomaka:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{3a}{a^2-b^2} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a+b} - \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a-b} - \frac{3a}{a^2-b^2} \ .$$

Uz uslov da je $a \neq b; a \neq -b$,

$$\begin{aligned}&\frac{a+b}{(a-b)(a+b)} - \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} - \frac{3a}{a^2-b^2} = \frac{a+b-(a-b)-3a}{(a-b)(a+b)}\\ &= \frac{2b-3a}{(a-b)(a+b)} \ .\end{aligned}$$

Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Zašto je bitno naglasiti da prilikom proširivanja razlomaka mora biti $a \neq b; a \neq -b$?
Učenik: Proširivanje razlomaka se može izvršiti samo brojevima odnosno izrazima čija je vrijednost različita od nula. U konkretnom slučaju vrijednosti sa kojima proširujemo razlomke su $a+b \neq 0$, i $a-b \neq 0$. Iz ovoga slijedi da mora biti $a \neq -b$ i $a \neq b$. □

Šesti zadatak je iz matematike za prvi razred srednje škole [2], iz nastavne oblasti *Linearna jednačina i nejednačina*.

Primjer 3.6. *Riješiti sistem linearnih jednačina grafičkom metodom:*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4\\ x + y &= 1\end{aligned}$$

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Šta treba odrediti?
Učenik: Treba odrediti rješenje sistema linearnih jednačina u obliku uređenog para brojeva odnosno koordinate neke tačke.
Korak 2.: Izradite plan
Nastavnik: Kako se rješava sistem jednačina grafičkom metodom?
Učenik: Sistem linearnih jednačina se grafičkom metodom rješava tako što se jednačine predstave kao grafici linearnih funkcija u koordinatnom sistemu. A rješenje sistema će biti presječna tačka tih grafika funkcija.
Nastavnik: Kako ćemo predstaviti jednačinu kao linearnu funkciju?
Učenik: Linearnu funkciju s dvije nepoznate predstavljamo kao funkciju na način da jednačinu riješimo po

nepoznatoj y.
Nastavnik: Kako predstaviti grafik linearne funkcije u koordinatnom sistemu? Da li smo to već ranije radili?
Učenik: Da to smo već radili. A grafik funkcije ćemo predstaviti pomoću dvije tačke, sa grafika tih funkcija. Rješenje sistema će biti koordinate presječne tačke grafika obje funkcije, čije vrijednosti očitavamo na x-osi odnosno y-osi.

Korak 3.: Izvršavanje plana

$$x - 2y = 4 \implies -2y = 4 - x / : (-2) \ ,$$

$y = \dfrac{1}{2}x - 2$. Tablica ove funkcije je

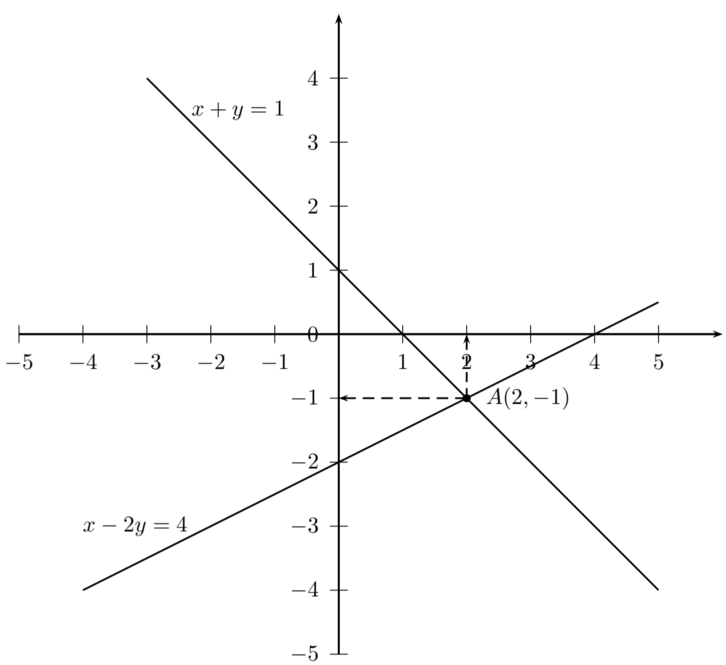
x	0	4
y	-2	0

$$x + y = 1 \implies y = 1 - x \ .$$

$y = -x + 1$. Tablica ove funkcije je

x	0	1
y	1	0

Nacrtajmo grafike ovih funkcija.



Slika 4: Grafik funkcija $y = \frac{1}{2}x - 2$ i $y = -x + 1$.

Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Kako možemo provjeriti da li smo tačno uradili zadatak?
Učenik: Kako je rješenje jednačine onaj broj koji uvršten umjesto nepoznate veličine u jednačinu istu pretvori u tačnu jednakost, to će imati:

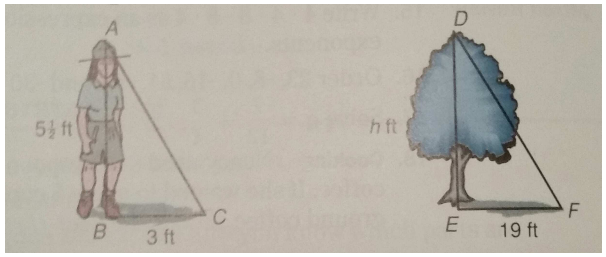
$$2 - 2 \cdot (-1) = 4 \implies 2 + 2 = 4 \implies 4 = 4 \ (T) \ ,$$

$$2 + (-1) = 1 \implies 2 - 1 = 1 \implies 1 = 1 \ (T) \ ,$$

Nastavnik: što znači da smo dobro napravili plan za izradu zadatka. □

Sedmi zadatak je iz matematike za američke škole [7], iz nastavne oblasti *Proporcije*.

Primjer 3.7. *Čuvar parka je želio da procijeni visinu drveća koja su zasađena prije pet godina. U 2 sata poslije podne njegova sjena je bila duga 3 stope. Sjena drveća je bila 19 stopa duga. Ako je čuvar visok 5,5 stopa, kolika je visina drveća?*



Slika 5: Čuvar parka

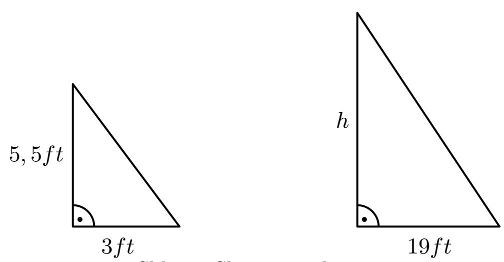
Rješenje:

Korak 1.: Razumjeti problem

Nastavnik: Pogledajmo skicu i popunimo je sa informacijama kako bi razumjeli naš problem.
Nastavnik: Šta trebamo izračunati sa skice?
Učenik: Potrebno je izračunati visinu drveća odnosno jednu katetu pravouglog trougla, označimo je sa h.

Korak 2.: Izradite plan

Nastavnik: Nacrtajmo dva pravougla trougla:



Slika 6: Slični trouglovi

Nastavnik: Kakvi su skicirani trouglovi?
Učenik: Ovi trouglovi su pravougli, a odakle imamo da su i slični.
Nastavnik: Kako se odnose odgovarajuće stranice sličnih trouglova?
Učenik: Odgovarajuće stranice sličnih trouglova su proporcionalne.
Nastavnik: Kako možemo, koristeći informacije sa skice, napisati proporciju?
Učenik:

$$\frac{SjenaCuvara}{SjenaDrveca} = \frac{VisinaCuvara}{VisinaDrveca} \ ,$$

Uvrstimo odgovarajuće vrijednosti za navedene veličine.

Korak 3.: Izvršavanje plana

Uvrštavajući veličine u proporciju imamo:

$$\frac{3}{19} = \frac{5\frac{1}{2}}{h} \implies 3h = 19 \cdot 5,5 \ ,$$

$$3h = 104\frac{1}{2} \implies h = 34\frac{5}{6} \ .$$

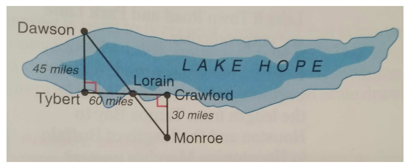
Drvo je visoko oko 35 stopa.

Korak 4.: Pogled unazad i provjera

Nastavnik: Ovaj zadatak se može primjenjivati za izračunavanje sličnih zadataka pri rješavanju zadataka iz sličnosti. □

Osmi zadatak je iz matematike za američke škole [7], iz nastavne oblasti *Primjena sličnosti.*

Primjer 3.8. *Koristeći dijagram na slici ispod teksta, odrediti kolika je udaljenost od Tyberta do Crawforda?*



Slika 7: Lake Hope

Rješenje:
Korak 1.: Razumjeti problem
Nastavnik: Kako možemo preformulisati ovaj zadatak?
Učenik: Odrediti udaljenost između Tyberta i Crawforda koristeći sličnost trouglova na slici?
Korak 2.: Izradite plan - Plan
Nastavnik: Kako možemo odrediti traženu udaljenost?
Učenik: Udaljenost između Tyberta i Crawforda možemo odrediti kao zbir udaljenosti od Tyberta do Loraina i od Loraina do Crawforda.
Nastavnik: Na slici vidimo dva trougla, možemo li ih iskoristiti za određivanje potrebnih veličina?
Učenik: Trouglovi na slici su slični pravougli trouglovi, pa možemo iskoristiti sličnost trouglova za određivanje udaljenosti.
Nastavnik: Neka prva slova naziva gradova predstavljaju vrhove trouglova. Tako da imamo slične trouglove $\triangle LTD \sim \triangle LCM$ i možemo postaviti proporciju na osnovu sličnosti trouglova, nepoznatu dužinu $|LC|$ označimo sa x.
Korak 3.: Izvršavanje plana
Učenik: Udaljenost između Tyberta i Crawforda je:

$$|TC| = |TL| + |LC| \ .$$

Napišimo proporciju:

$$\frac{|MC|}{|LC|} = \frac{|DT|}{|TL|} \implies \frac{30}{x} = \frac{45}{60} \implies x = \frac{30}{45} \cdot 60 \implies x = 40 \ .$$

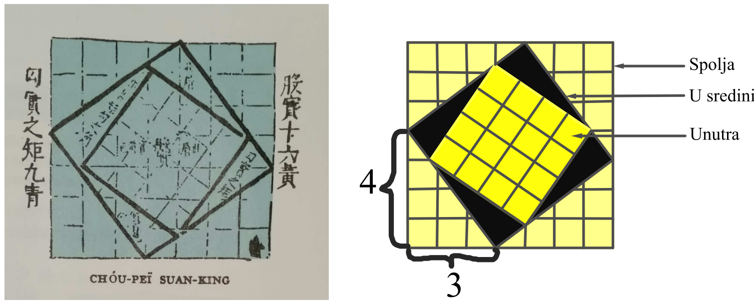
Sada možemo izračunati dužinu od Tyberta do Crawforda, kao:

$$|TCw = |TL| + |LC| = 60 + 40 = 100 \ ,$$

to jest udaljenost od Tyberta do Crawforda je 100 milja.
Korak 4.: Pogled unazad i provjera
Nastavnik: Procijenite rastojanje tako što ćete ga uporediti sa onima na karti. Da li se čini ta udaljenost razumnom. □

Deveti zadatak je iz matematike za američke škole [7], iz nastavne oblasti *Primjena Pitagorine teoreme.*

Primjer 3.9. *Na slici je prikazana Kineska ilustracija pod nazivom CHÓU-PEI SUAN-KING. Pronađite ukupnu površinu četiri mala trougla na ilustraciji?*



Slika 8: Kineska ilustracija (lijevo) i skicirana ilustracija (desno)

Riješenje:

Korak 1.: Razumjeti problem

Nastavnik: Hajdemo prvo da precrtamo figuru i označimo šta je to unutra, u sredini i koji kvadrati su spolja.
Nastavnik: Šta treba da odredimo?
Učenik: Treba da odredimo površinu osjenčenih trouglova.

Korak 2.: Izradite plan

Nastavnik: Kako ćemo odrediti površinu osjenčenih trouglova?
Učenik: Da bi odredili površinu osjenčenih trouglova, moramo naći površinu kvadrata koji se nalazi u sredini i oduzeti površinu kvadrata koji se nalazi unutar tog kvadrata.

Korak 3.: Izvršavanje plana

Učenik: Kvadrat u sredini je konstruisan od hipotenuze trougla čije su katete 3 i 4. To je površina kvadrata ista kao i kvadrat hipotenuze:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3^2 + 4^2 \ ,$$

$$c^2 = 9 + 16 = 25 \ .$$

Površina kvadrata je 25 kvadratnih jedinica mjere. Sada oduzimamo površinu kvadrata unutra, to je 4^2 ili 16 kvadratnih jednica mjere.
Ukupna površina četiri mala trougla je: $25 - 16 = 9$ kvadratnih jedinica mjere.

Korak 4.: Pogled unazad i provjera

Nastavnik: Procijenimo površinu svakog malog trougla brojanjem kvadrata. Onda pomnožimo sa 4 nađenu površinu i time ćemo dobiti ukupnu površinu, $2 \cdot 4 = 8$. Odgovor je razuman i približna je vrijednost onome što smo procijenili.
Pitagorina teorema koja je korištena u ovom zadatku može biti primijenjena u mnogim situacijama uključujući različita mjerenja. □

Literatura

[1] A. Hodžić, R. Onodi: *Matematika za 8. razred osnovne škole*, Ljiljan, Sarajevo, 1998.
[2] A. Huskić: *Zbirka zadataka za prvi razred srednje škole*, Svjetlost, Sarajevo, 2006.
[3] A. Fako: *Matematika za 6. razred osnovne škole*, Ljiljan, Sarajevo, 1998.
[4] G. Polya: *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
[5] G. Polya: *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2003.
[6] V. Mujakić, D. Kovačević, Ž. Hamidović: *Moja Matematika - Radna sveska za treći razred devetogodišnje osnovne škole*, NAM Tuzla, 2015.
[7] W. Collins and Coo: *Mathematics - Applications and Connections*, Course 3, Glencoe/McGraw-Hill, Westerville Ohio, 1995.
[8] E. Mujkić: *Stereometrija u GeoGebri sa WEB prikazom*, Magistarski rad, Tuzla, 2018.
[9] *https://en.wikipedia.org/wiki/George_Polya, oktobar*2018.