EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 55–62

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Geometrijski dokazi nejednakosti između brojevnih sredina

Senada Mustafić[a]

[a] *JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla*

Sažetak: Geometrijske metode možemo koristiti kod objašnjavanja drugih oblasti matematike. U ovom radu su dati različiti geometrijski dokazi nejednakosti između brojevnih sredina za dva pozitivna broja. Naglasak je na vizualizaciji, upotrebi tzv. "dokaza bez riječi" i razvijanju matematičkih sposobnosti učenika.

"Na velike se vrhunce ponekad može uspeti s različitih padina planine, no, one koji stignu na vrh, obasjava isto sunce."(Vladimir Devide)

1. Definicije brojevnih sredina

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine svakako je jedna od najpoznatijih algebarskih nejednakosti. Prvi pojmovi o brojevnim sredinama potiču još od pitagorejaca [1)].

Definicija 1.1. *Harmonijska sredina $H_n(a)$, geometrijska sredina $G_n(a)$, aritmetička sredina $A_n(a)$ i kvadratna sredina $K_n(a)$, pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su definisane, redom, izrazima:*

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} ,$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} ,$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} ,$$

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} .$$

Za dva proizvoljna pozitivna broja očito važi nejednakost $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $a = b$. Sada imamo,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \implies a + b \geq 2\sqrt{ab} \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} .$$

Time smo pokazali da je $A_2 \geq G_2$, odnosno da je aritmetička sredina dva pozitivna broja veća ili jednaka od njihove geometrijske sredine. Općenito, važe sljedeće nejednakosti.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rad preuzet: 2018.
Kategorizacija: *Stručno-metodički rad*
Email adresa: senada.mustafic@gmail.com (Senada Mustafić)

[1)] Pitagora, matematičar i filozof, (582 – 496. p.n.e.)

Teorem 1.2 (Nejednakost između brojevnih sredina). *Neka je $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ data n-torka pozitivnih brojeva. Tada važi*

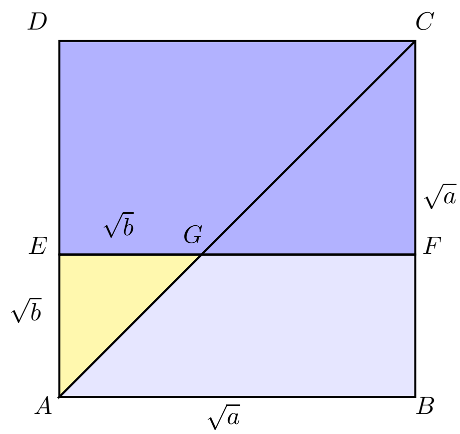
$$\min\{a_1, a_2, ..., a_n\} \leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a) \leq \max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \ ,$$

s jednakostima ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2. Značaj vizualizacije u nastavi matematike

Stalnim posmatranjem svijeta oko sebe donosimo i odluke na osnovu toga što vidimo, tako da se korišćenje slike u dokazu pokazuje kao olakšavajući način za usvajanje i razumijevanje novih sadržaja većini učenika. Pri učenju i shvaćanju matematike vizualizacija može dati jasnije značenje matematičkim pojmovima i vezama između njih. Da bi se nastavno gradivo što lakše usvojilo i što duže pamtilo, potrebno je različite nastavne sadržaje što je moguće više povezivati. Jedan od načina na koji se to može vrlo lako ostvariti jest zadavanje istog zadatka unutar različitih nastavnih cjelina.

- ***Geometrijski dokaz AG nejednakosti***



Slika 1

Kvadrat $ABCD$ ima stranice dužine $\sqrt{a}$, a pravougaonik $ABFE$ ima stranice dužina $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$, $b \leq a$. Trougao $\triangle AGE$ je jednakokrako-pravougli, jer je $\sphericalangle EAG = \sphericalangle AGE = 45°$, pa je (v. Sliku 1)

$$\sqrt{ab} = P_{ABFE} = P_{AGE} + P_{ABFG} \leq P_{AGE} + P_{ABC} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \ ,$$

a time je dokazana nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

- ***Geometrijski dokaz AG nejednakosti***

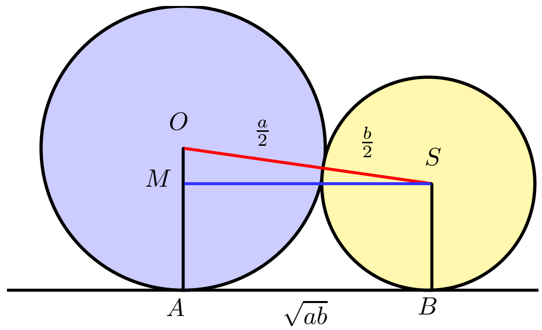
Neka su date kružnice sa središtima O i S i poluprečnicima $\frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$ $(a \geq b)$, redom, koje se dodiruju spolja (v. Sliku 2). Neka je AB zajednička tangenta tih dviju kružnica. Tačke A i B su tačke dodira tangente i kružnica. Trapez $ABSO$ ima dva prava ugla pri tjemenima A i B. Neka je duž $\overline{SM}$ paralelna sa AB. Tada je $\triangle OMS$ pravougli, pa na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$|MS|^2 = |OS|^2 - |OM|^2 \ ,$$

odnosno

$$|MS|^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab\ ,$$

iz čega slijedi $|MS| = \sqrt{ab}$.



Slika 2

Kako je u pravouglom trouglu dužina hipotenuze veća od dužine katete, to važi $|OS| \geq |MS|$, to jest $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Jednakost važi kada je $a = b$.

- ***Analitički dokaz*** AG ***nejednakosti***:

René Descartes [2)] se prvi koristio pravouglim koordinatnim sistemom kako bi vizualizirao svoja opažanja i tako na veličanstven način povezao geometriju i algebru.
Posmatrajmo funkciju $f(x) = e^x$. U pitanju je konveksna funkcija, što geometrijski znači da je grafik funkcije između dvije tačke na grafiku uvijek ispod tetive koja spaja te dvije tačke.
Na grafiku date eksponencijalne funkcije izaberimo dvije tačke sa koordinatama (x_1, e^{x_1}) i (x_2, e^{x_2}), te uvedimo oznake $e^{x_1} = a$ i $e^{x_2} = b$ (v. Sliku 3).
Jednačina prave kroz pomenute tačke glasi:

$$y - b = \frac{b-a}{x_2 - x_1}(x - x_2)\ .$$

Tačka te prave sa apscisom $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ima ordinatu $\frac{a+b}{2}$, a tačka s tom apscisom na grafiku eksponencijalne funkcije ima ordinatu

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{e^{x_1+x_2}} = \sqrt{e^{x_1}e^{x_2}} = \sqrt{ab}\ .$$

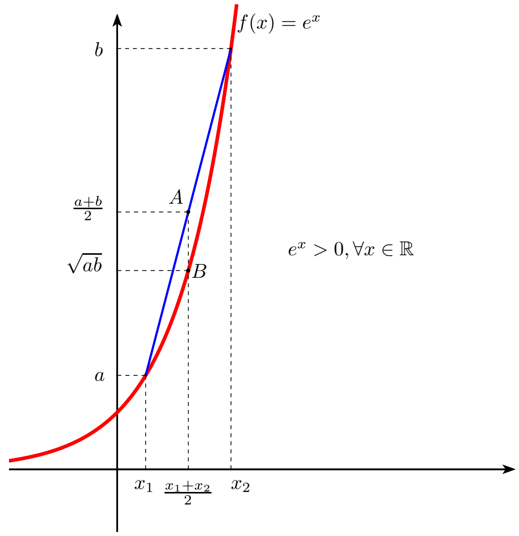
Posmatrana tačka grafika eksponencijalne funkcije $B\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \sqrt{ab}\right)$ je ispod tačke $A\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ na tetivi koju data prava gradi sa grafikom funkcije $f(x) = e^x$, tako da slijedi dobro poznata AG nejednakost:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ .$$

- ***Geometrijski dokaz između harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne sredine***

Neka je data kružnica sa prečnikom $\overline{AB}$ dužine $b - a$ i središtem O. Tačka D nalazi se na pravoj kroz A i B tako da je $|AD| = b$ i tačka B je između tačaka A i D. Tada je $|BD| = a$ (v. Sliku 4).

[2)] René Descartes, francuski filozof i matematičar, (1596–1650).



Slika 3

Iz tačke D povučena je tangenta na kružnicu. Tačka T je dodirna tačka te tangente i kružnice. U pravouglom trouglu $\triangle OTD$ hipotenuza ima dužinu $|OD| = |AD| - |OA| = b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2}$, a dužinu katete $|TD|$ možemo izračunati pomoću Pitagorinog teorema:

$$|TD| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}\ .$$

Budući da je dužina hipotenuze veća od dužine katete, vrijedi nejednakost $|OD| \geq |TD|$, to jest $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Inače, na Slici 4 pojavljuje se nejednakost još dviju sredina: kvadratne i harmonijske. Naime, kako je $\overline{CO}$ poluprečnik okomit na $\overline{AB}$, tada dužina hipotenuze $\overline{CD}$ iznosi

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ .$$

Ovaj izraz je kvadratna sredina brojeva a i b. Nadalje, ako je N podnožje visine iz vrha T u pravouglom trouglu $\triangle OTD$, tada iz sličnosti trouglova $\triangle TND$ i $\triangle OTD$ slijedi $|ND| : |TD| = |TD| : |OD|$, to jest

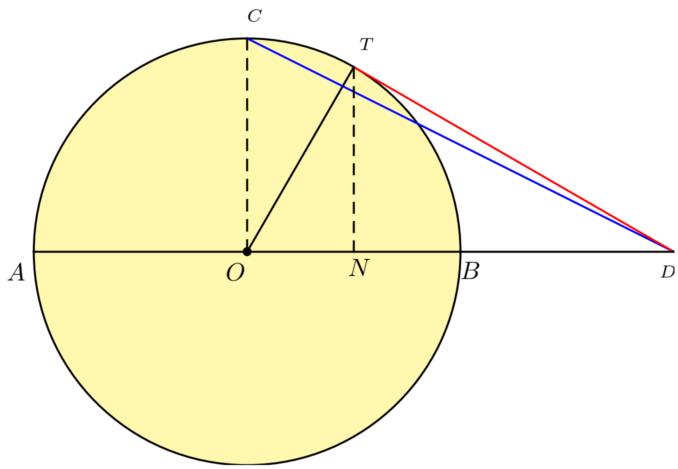
$$|ND| = \frac{|TD|^2}{|OD|}\ ,$$

odnoasno

$$|ND| = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ .$$

Ovaj izraz je harmonijska sredina brojeva a i b. Sa slike 4 uočavamo da je $|ND| < |TD| < |OD| < |CD|$, odnosno da važi,

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ .$$



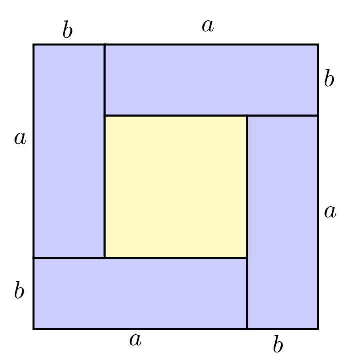
Slika 4

Ovim smo pokazali da zaista vrijedi:

$$H_2 < G_2 < A_2 < K_2.$$

- ***"Dokazi bez riječi"***

Jedan od načina kako podsticati vizualizaciju kod učenika je metoda "dokaz bez riječi". Na slikama je naznačena ideja i put dokaza, koji učenicima može poslužiti kao putokaz kako da sami dokažu tvrđenje. Učiti dokazivati znači učiti rasuđivati, a to je jedan od osnovnih zadataka nastave matematike, [5]. Članak pod naslovom "Two mathematical papers without words" objavljen je u Mathematical Magazine u septembru 1975. godine. Od 70-tih godina Mathematical Association of America počinje redovno objavljivati "dokaze bez riječi" u matematičkim časopisima. "Dokaz bez riječi" je vrijedan oblik učenja u matematici, posebno u podučavanju i pozitivno utiče na razvoj matematičkih sposobnosti kod učenika.
Primjer "dokaza bez riječi" nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine je dat Slikom 5.

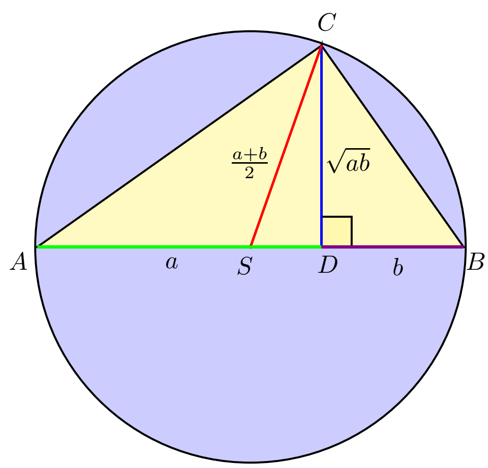


Slika 5: "Bez riječi"

Učenike na ovaj način podstičemo na istraživanje i logičko zaključivanje. Dokaz se lako izvodi uočavajući da veći kvadrat stranice $a + b$ ima površinu $(a + b)^2$, koja je očito veća od površine četiri pravougaonika sa stranicama a i b. Tada je,

$$(a+b)^2 \geq 4ab \implies a+b \geq 2\sqrt{ab} \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} .$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je površina velikog kvadrata jednaka površini četiri pravougaonika, odnosno ako i samo ako kvadrat u sredini figure nestaje, a to se događa ako i samo ako je $a-b=0$.
Ova i slične geometrijske interpretacije važnih algebarskih identiteta i nejednakosti mogu se koristiti prilikom organizovanja grupnog oblika rada, sklapanjem dijelova slike od strane učenika u okviru grupe.
U sklopu nastavne jedinice "Sličnost trouglova" učenicima se može zadati da pažljivo prouče Sliku 6 i sami dokažu AG nejednakost.



Slika 6: "Bez riječi"

U savremeno doba, nove tehnologije nam pružaju mogućnosti da poboljšamo, obogatimo i unaprijedimo nastavu matematike. Koristeći interaktivne materijale i matematičke programe kao što je GeoGebra učenicima se nejednakosti između brojnih sredina mogu na lijep i zanimljiv način predstaviti kao dokaz bez riječi. Učenici imaju mogućnost da vide i sami ispitaju šta se dešava promjenom određenih veličina u samom zadatku, kao na primjer na Slici 6, pomjeranjem tačke D mijenjaju veličine duži a i b i posmatraju šta se dešava s odnosom između aritmetičke i geometrijske sredine.

3. Primjeri zadataka koji se mogu riješiti primjenom nejednakosti između brojevnih sredina

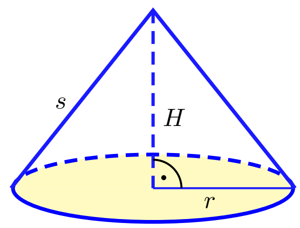
Primjer 3.1 (Federalno takmičenje 2006. OŠ VIII razred). *Zbir dužina prečnika baze i visine uspravne kupe je 18. Od svih takvih kupa odrediti površinu one kupe koja ima najveću zapreminu.*

Rješenje:
Uspravna kupa čiji je poluprečnik baze r i izvodnica s ima površinu $P = r\pi(r+s)$ (Slika 7).
Zapremina kupe poluprečnika baze r i visine H je $V = \frac{1}{3}r^2\pi H$.
Koristeći AG nejednakost za tri pozitivna broja r,r i H, imamo

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{\pi}{3}r \cdot r \cdot H \leqslant \frac{\pi}{3}\left(\frac{r+r+H}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{18}{3}\right)^3 = 72\pi .$$

Znak jednakosti vrijedi kada je $r = H = 6$, tj. u tom slučaju kupa ima najveću zapreminu. Njena izvodnica ima dužinu $s = \sqrt{r^2 + H^2} = 6\sqrt{2}$, a njena površina iznosi

$$P = r\pi(r+s) = 36\pi(1+\sqrt{2}) .$$



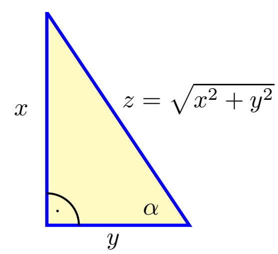
Slika 7: Kupa

□

Sljedeći zadatak spada u izoperimetrijske probleme (probleme koji se odnose na određivanje figure u ravni zadatog obima, a najveće moguće površine).

Primjer 3.2. *Između svih pravouglih trouglova čiji je obim jednak a, naći onaj čija je površina najveća.*

Rješenje: Neka su sa x i y označene dužine kateta datog pravouglog trougla (Slika8).



Slika 8: Pravougli trougao

Koristeći poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja x^2 i y^2, imamo

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \implies \frac{xy}{2} \leq \frac{x^2 + y^2}{4} .$$

Površina pravouglog trougla iznosi $P = \dfrac{xy}{2}$, pa zbog posljednje nejednakosti imamo da važi

$$P \leq \frac{x^2 + y^2}{4} .$$

Jednakost važi ako je $x = y$. Tada je $P_{max} = \dfrac{x^2}{2}$.
Obim datog pravouglog trougla iznosi $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = a$, pa uz uslov $x = y$, dobijamo $2x + x\sqrt{2} = a$, odnosno

$$x = y = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) .$$

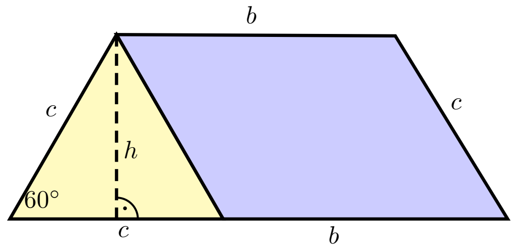
Dakle, riječ je o jednakokrako-pravouglom trouglu čije su katete $\dfrac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$, hipotenuza $a(\sqrt{2} - 1)$, dok maksimalna površina iznosi

$$P_{max} = \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) .$$

□

Primjer 3.3 (Kantonalno takmičenje (TK) 2018. SŠ IV razred). *Od svih jednakokrakih trapeza kojima je ugao na osnovici* 60° *i čija je površina jednaka* $6\sqrt{3}$ *odrediti onaj koji ima minimalan obim.*

Rješenje: Neka su a i b veća i manja osnovica trapeza, h njegov visina, α ugao na osnovici, P površina i O obim trapeza (Slika 9).



Slika 9: Trapez

Kako je $\alpha = 60^\circ$, uočavanjem jednakostraničnog trougla na jednom kraku trapeza, dobijamo da je $a = b + c$ i $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. Na osnovu toga zaključujemo da važi

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{2b+c}{2}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c(2b+c)\sqrt{3}}{4} \ ,$$

$$\frac{c(2b+c)\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow 2c(2b+c) = 48 \ ,$$

$$O = a + b + 2c = (2b+c) + 2c \ .$$

Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve $2b + c$ i $2c$, dobijamo

$$\frac{O}{2} = \frac{(2b+c)+2c}{2} \geq \sqrt{(2b+c)2c} = \sqrt{48} \ ,$$

odakle slijedi $O \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$.
Jednakost u prethodnoj nejednakosti se postiže u slučaju $2b + c = 2c$, odnosno $2b = c$. Dakle, minimalna vrijednost obima iznosi $8\sqrt{3}$. □

Na kantonalnim takmičenjima učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona održanim u zadnjih deset godina (od 2009.godine do 2018.godine) postavljeno je ukupno 176 zadataka ([8]). Od tih 176 zadataka u 12 se pojavljuju nejednakosti između brojevnih sredina, u procentima $6,8\%$.
Proučavanje nejednakosti i njihove primjene pružaju velike mogućnosti za razvoj matematičkih sposobnosti učenika, kao što su kritičko mišljenje, logičko zaključivanje, kreativnost, matematička intuicija, matematička imaginacija, fleksibilnost i predviđanje. Sama primjena nejednakosti zahtijeva dobro poznavanje matematike, bogatstvo ideja i različitih metoda za rješavanje problema.

Bibliografija

[1] Š. Arslanagić: *Nejednakosti između brojnih sredina i njihova primjena*, Udruženje matematičara BiH, Sarajevo 2000.
[2] Š. Arslanagić: *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o, Sarajevo, 2006.
[3] B. Dakić, N. Elezović : *MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola*, 1. dio, Element d.o.o., Zagreb, 2014.
[4] B. Dakić, N. Elezović: *MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola*, 2. dio, Element d.o.o., Zagreb, 2014.
[5] Z. Kurnik: *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola br. 10., 2000/2001.
[6] S. Mustafić: *Razvijanje matematičkih sposobnosti učenika različitim načinima dokazivanja nejednakosti*, Magistarski rad, PMF Tuzla, 2017.
[7] https://mis.element.hr/list/16/broj/55/clanak/775/bez-rijeci
[8] http://www.umtk.info/