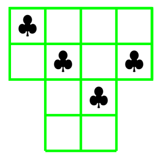
2

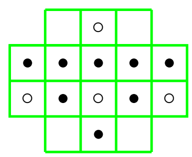
KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika

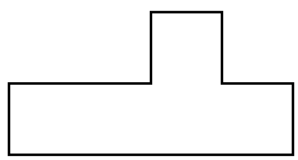
Zadatak 1. *Figuru na slici podijeliti na četiri jednaka dijela, tako da u svakom od tih dijelova bude po jedna djetelina.*



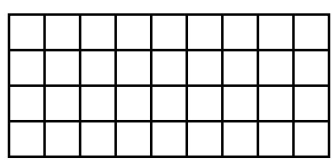
Zadatak 2. *Figuru na slici podijeliti na četiri jednaka dijela, tako da u svakom od tih dijelova bude po jedan prazni i dva puna kružića.*



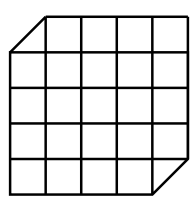
Zadatak 3. *Figuru na slici podijeliti na tri dijela (sa dva sječenja) od kojih se može složiti kvadrat!*



Zadatak 4. *Figuru na slici podijeliti na dva dijela od kojih se može složiti kvadrat!*



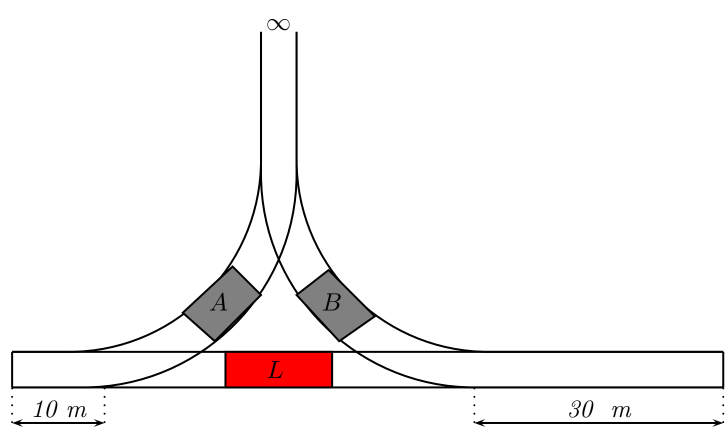
Zadatak 5. *Figuru na slici podijeliti na dva dijela od kojih se može složiti pravougaonik veličine* 6×4*!*



Ciljna skupina: svi uzrasti

Nagradni zadatak: Problem kretanja

Zadatak 1. *U željezničkim čvorištima česte su potrebe za manevrisanjem i premještanjem vagona i lokomotiva, da bi se formirale kompozicije vozova za razne potrebe. Na narednoj slici je prikazana jedna takva situacija. Sistem pruga ima oblik "trougla", ali su ograničenja u dužinama "slijepih" krajeva pruga. U lijevom "tjemenu" imamo slijepi dio dugačak* $10\ m$*, u desnom "tjemenu" slijepi dio je dugačak "30 m", a u gornjem dijelu "trougla" nema ograničenja u dužini. Na dvije pruge su postavljeni vagoni* A *i* B*, a na trećoj se nalazi lokomotiva* L*. Dužina lokomotive je* $20\ m$*, a dužine vagona su jednake i iznose* $10\ m$*. Mašinovođa treba izvršiti zamjenu mjesta vagonima i vratiti lokomotivu na početni položaj. Kako će to mašinovođa uraditi?*



Za nagradni zadatak iz prošlog broja EVOLVENTE nismo dobili niti jedno rješenje, tako da i taj zadatak još uvijek vrijedi kao nagradni zadatak.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 15.04.2019. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno prigodnom nagradom

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 71–72

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 11 (*). *U izrazu* $6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 7$ *zamijeniti* $*$ *sa* $+$ *ili* $-$ *tako da je lijeva strana jednakosti jednaka desnoj.*

Zadatak 12 (*). *Nana je napravila pekmez od jabuka. Pekmez je upakovala u* 2 *tegle od* 2 *litra,* 3 *tegle od* 3 *litra,* 4 *tegle od* 4 *litra i* 5 *tegli od* 5 *litara. Ove tegle želi rasporediti na dvije police tako da na svakoj polici bude jednak broj tegli i da broj litara pekmeza na obje police jednak.*

Zadatak 13 (*). *Napišite* 7 *susjednih prirodnih brojeva za čije pisanje je potrebno upotrijebiti* 17 *cifara.*

Zadatak 14. *Pet dječaka Muharem, Predrag, Rasim, Samir i Vejsil stoje u vrsti. Poznato je da:*

- *Predrag i Vejsil ne stoje jedan do drugog,*
- *Milorad i Predrag ne stoje jedan do drugog,*
- *Rasim i Milorad ne stoje jedan do drugog,*
- *Samir i Milorad ne stoje jedan do drugog,*
- *Vejsil i Samir ne stoje jedan do drugog,*
- *Predrag stoji desno u odnosu na Milorada.*

U kom poredku stoje dječaci?

Zadatak 15. *Pokažite da se od brojeva* $1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10$ *može sastaviti* 5 *razlomaka (treba upotrijebiti svih deset brojeva) tako da je suma ovih* 5 *razlomaka cio broj.*

Zadatak 16. *Na svakoj strani kocke napisan je tačno po jedan od sljedećih brojeva:* $8, 9, 10, 12, 13, 19$. *Pri prvom bacanju kocke zbir brojeva na četiri bočne strane je bio* 43, *a pri drugom bacanju kocke zbir je bio* 40. *Odredite koji je broj napisan na stranici kocke koji je suprotan broju* 19.

Zadatak 17. *U dvije posude raspoređeno je* 60 *klikera, tako da je u prvu posudu stavljeno* 35, *a u drugu posudu* 25. *Dvojica igrača, Haso i Huso, naizmjenično odabiraju jednu posudu i iz nje uzimaju koliko žele klikera. Pobjeđuje onaj igrač nakon čijeg poteza su obje posude prazne. Koji igrač podjeđuje pri pravilnoj igri. Odgovor obrazložiti.*

Zadatak 18. *Na stranici* BC *trougla* ABC *izabrana je tačka* F. *Duž* AF *siječe težišnu liniju* BD *u tački* E *tako da je* $|AE| = |BC|$. *Dokazati da je* $|BF| = |FE|$.

Zadatak 19. *Dokazati da se svaki trougao može razrezati na tri mnogougla od kojih je jedan tupougli trougao, a da se pritom od ova tri mnogougla može složiti pravougaonik.*

Zadatak 20. *Koliko se četverocifrenih brojeva sa različitim ciframa može obrazovati od cifara:* $0, 1, 2, 4, 5, 7$ *tako da su djeljivi sa* 4?

Ciljna skupina: Osnovna škola, srednja škola

Zadaci označeni sa **(*)** su primjereni za najmlađi uzrast (4. i 5. razred)

Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 15.04.2019. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

Srednja škola

Zadatak 11. *Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^{2019} + x^{2018} + x^{19} + x^{18} + 1$*, polinomom* $g(x) = x^2 - 1$.

Zadatak 12. *U skupu* $\mathbb{Z}$ *riješiti jednačinu* $x^2 - y^2 = 2018$.

Zadatak 13. *Odrediti interval za* x *u kome je funkcija*

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x + 34 - 12\sqrt{x-2}}\ ,$$

konstantna.

Zadatak 14. *Odrediti sumu datog izraza:*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 \quad , \quad x \neq \pm 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Zadatak 15. *Riješiti jednačinu:*

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}\ .$$

Zadatak 16. *Na hipotenuzi* AB *pravouglog trougla* $\triangle ABC$ *date su tačke* D *i* E *takve da je* $|AE| = |AC|$ *i* $|BD| = |BC|$*. Izračunati* $\angle DCE$.

Zadatak 17. *Ako je* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ *i* $a_i > -\frac{1}{4}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$*, tada je*

$$\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \cdots + \sqrt{4a_n + 1} < n + 2\ .$$

Dokazati!

Zadatak 18. *Ako je* $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$*, gdje su* a *i* b *istog predznaka,* $a \neq 0$ *i* $b \neq 0$*, dokazati da je*

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}\ .$$

Zadatak 19. *Tačke* P *i* R *su redom središta stranica* AB *i* CD *konveksnog četverougla* $ABCD$*. Duži* BR *i* CP *se sijeku u tački* Q*, a duži* AR *i* PD *u tački* S*. Dokazati da je*

$$P_{\square PQRS} = P_{\triangle ASD} + P_{\triangle BQC}\ .$$

Zadatak 20. *Uglovi trougla čine aritmetički niz. Izračunati ih ako je zbir njihovih sinusa jednak* $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

EVOLVENTA (JAMTK) 1(2) (2018), 73–85

Rješenja konkursnih zadataka 1 − 10

Osnovna škola

Zadatak 1 (*). *Odrediti nepoznate decimalne cifre* a, b, c *i* d *tako da vrijedi*

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 2 & 5 & a \\ & 4 & 1 & b & 2 \\ + & 5 & c & 9 & 3 \\ \hline 1 & d & 1 & 8 & 1. \end{array}$$

Rješenje: Posljednja cifra zbira $a+5$ je 1, što znači da zbir mora biti 11, odakle je $a = 6$. Pri tome imamo prenos 1 na zbir cifara desetica, pa se zbir $b+15$ završava cifrom 8, što znači da je zbir 18, odakle je $b = 3$. I opet imamo prenos 1 na zbir cifara stotica. Posljednja cifra zbira $c+4$ je 1, dakle, zbir je 11 te je $c = 7$ i imamo prenos 1 na zbir cifara hiljada. Konačno je $d = 3$ kao zadnja cifra zbira $1 + 3 + 4 + 5$. □

Buljubašić Tarik, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 2 (*). *Zbir dva broja je* 2016. *Ako prvi broj povećamo za* 57, *a drugi umanjimo za* 57 *dobijeni brojevi biće jednaki. O kojim brojevima je riječ.*

Rješenje: Neka su a i b traženi brojevi. Tada je $a + b = 2016$. Prema uslovu zadatka vrijedi $a + 57 = b - 57$. Tada je $(a + 57) + (b - 57) = a + b = 2016$. Kako su brojevi $a + 57$ i $b - 57$ jednaki i njihov zbir je 2016, to je svaki od njih polovina broja 2016. Dakle, $a + 57 = 1008$ i $b - 57 = 1008$. Tako imamo $a = 951$ i $b = 1065$. □

Zadatak 3 (*). *Esma je željela kupiti jednu knjigu čija je cijena* 23 *KM. Imala je samo novčanice od po* 5 *KM, a prodavačica je imala samo novčanice od* 2 *KM. Kako se može izvršiti plaćanje knjige.*

Rješenje: Kako je $4 \cdot 5 < 23 < 5 \cdot 5$ i $25 - 2 = 23$, to će Esma prodavačici dati 5 novčanica od $5KM$, a ona će njoj vratiti kusur od $2KM$. □

Redigirano prema rješenju: Esma Pita, 2r, "OŠ S.S. Kranjčević" Sarajevo

Zadatak 4. *Odrediti ugao* α *koji je za* 35^0 *veći od četvrtine svog suplementnog ugla.*

Rješenje: Uglovi α i $180^0 - \alpha$ su suplementni uglovi. Prema uslovu zadatka je $\alpha - \dfrac{180^0 - \alpha}{4} = 35^0$, odnosno $4\alpha - 180^0 + \alpha = 140^0$. Odavde se lahko nalazi da je $\alpha = 64^0$. □

Enver Duraković, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 5. *Odrediti najveći prirodan broj, koji pri dijeljenju sa* 15 *ima količnik jednak petostrukom ostatku.*

Rješenje: Ako je traženi broj n a ostatak dijeljenja a, tada je prema uslovima zadatka $n = 15 \cdot 5a + a = 76a$. Najveća vrijednost za n se dostiže kada ostatak a dostiže svoju najveću vrijednost. Ta najveća vrijednost je 14, pa je $n = 76 \cdot 14 = 1064$. □

Mešanović Nejra, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Ciljna skupina: Osnovna škola

Zadatak 6. *Nebojša, Bakir i Željko čitaju "Večernji list", "Oslobođenje" i "Nezavisne novine" i to svaki čita samo jedne od ovih novina. Na pitanje, ko od njih čita koje novine njihov prijatelj Jakob je odgovorio: Koliko se ja sjećam, Nebojša je čitao "Večernji list", Bakir nije čitao "Oslobođenje", a Željko nije čitao "Večernji list." Dervo je slušao ovaj razgovor, pa je rekao da je odgovor Jakoba tačan samo za jednog čitaoca. Koje novine čitaju Nebojša, Bakir i Željko?*

Rješenje: Prema tekstu zadatka samo je jedna izjava Jakoba tačna, a druge dvije nisu. Ispitatćemo koja je njegova izjava tačna.
Ako je prva izjava tačna, onda su druge dvije netačne. Iz prve izjave slijedi da je Nebojša čitao Večernji list. Tada iz netačnosti treće izjave slijedi da je i Željko čitao Večernji list. Tako smo dobili da su Nebojša i Željko čitali isti list, što je u suprotnosti sa tekstom zadatka.
Ako je druga izjava tačna. onda su prva i druga netačne izjave. Zbog toga Nebojša nije čitao Večernji list, Bakir nije čitao Oslobo đenje i Željko je čitao večernji list. Prema tome, Bakir je čitao Nezavisne novine, Nebojša Osobođenje i Željko Večernji list.
Ako je Jakobova treća izjava tačna, onda su njegove prve dvije izjave netačne. To znači da Nebojša nije čitao Večernji list, Bakir je čitao Oslobođenje i Željko nije čitao Večernji list. Dakle, ni jedan od njih nije čitao Večernji list, što je u suprotnosti sa pretpostavkom zadatka. Zaključujemo da treća izjava Jakoba nije tačna. □

Zadatak 7. *Trougao $\triangle ABC$ je pravougli trougao sa pravim uglom pri tjemenu C. Neka je AD ($D \in BC$) simetrala ugla $\measuredangle CAB$. Ako je $|CD| = 1,5cm$ i $|BD| = 2,5$ cm, izračunati $|AC|$.*

Rješenje: 1

Znamo da simetrala ugla dijeli suprotnu stranicu trougla u omjeru dužina stranica koje obrazuju ugao, to jest vrijedi

$$|AC| : |AB| = |CD| : |BD| = 2,5 : 1,5 \ ,$$

odakle slijedi da je $|AB| = \dfrac{5}{3}|AC|$, odnosno: $c = \dfrac{5}{3}b$. Na osnovu Pitagorinog teorema iz trougla $\triangle ABC$ slijedi

$$b^2 + 4^2 = \left(\frac{5}{3}b\right)^2 \ ,$$

to jest $16b^2 = 144$, odakle je $b = 3$.

Džejla Hankušić, 8r, OŠ "Malešići" Malešići

Rješenje: 2

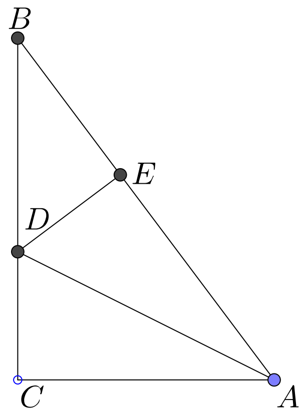
Iz tačke D povucimo normalu DE na hipotenuzu AB (Vidi Sliku 1). Posmatrajmo pravougle trouglove $\triangle DCE$ i $\triangle DEA$. Oni su podudarni jer je $|AD| = |AD|$, $\measuredangle ACD = \measuredangle AED = 90^0$ i $\measuredangle CAD = \measuredangle EAD$. Iz ove podudarnosti slijedi $|AE| = |AC| = b$ i $|DE| = |DC| = 1,5$, a iz pravouglog trougla $\triangle BDE$, na osnovu Pitagorinog teorema, imamo

$$|BE|^2 = |BD|^2 - |BE|^2 = 2,5^2 - 1,5^2 = 4 \ ,$$

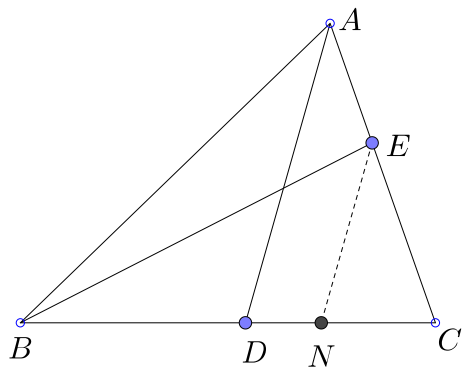
to jest $|BE| = 2$. Kako je $a = |BC| = 1,5 + 2,5 = 4$ i $c = |AB| = |AE| + |BE| = b + 2$, to na osnovu Pitagorinog teorema iz trougla $\triangle ABC$ slijedi

$$(b+2)^2 = b^2 + 4^2 \ .$$

Odavde je $b = 3$ i $c = 5$. □



*Slika*1



*Slika*2

Zadatak 8. *U trouglu $\triangle ABC$, tačke D i E su na stranicama BC i CA respektivno. Poznato je da vrijedi $BD : DC = 3 : 2$, $AE : EC = 3 : 4$. Neka se duži $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku u tački M. Ako je površina trougla jednaka 1, odrediti površinu trougla $\triangle BMD$.*

Rješenje: Prema uslovu zadatka vrijedi $P_{\Delta ABC} = 1$, $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{4}$, $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{3}{2}$ (Slika 2). Odavde slijedi $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{7}$, $\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{4}{7}$. Trouglovi $\triangle ABE$ i $\triangle ABC$ imaju jedake visine iz tjemena A, pa se njihove površine odnose kao osnovice, to jest

$$\frac{P_{\Delta ABE}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{7} \ .$$

Odavde slijedi $P_{\Delta ABE} = \frac{3}{7}$. Analogno nalazimo $P_{\Delta BEC} = \frac{3}{7}$.

Iz tačke E povucimo pravu paralelnu sa AD. Neka ova prava diječe BC u tački N. Na osnovu Talesovog teorema imamo

$$\frac{|DN|}{|NC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{4} \ .$$

Dakle, $|DN| = \frac{3}{4}|NC|$. Nadalje, imamo $|BN| = |BD| + |NC|$, $|DC| = |DN| + |NC| = \frac{7}{4}|NC|$. S druge strane je $|BD| = \frac{3}{2}|DC| = \frac{21}{8}|NC|$. Tako imamo $|BN| = \frac{21}{8}|NC| + |NC| = \frac{27}{8}|NC|$.

Trouglovi $\triangle BNE$ i $\triangle NCE$ imaju jednake visine iz tjemena E, pa se njihove površine odnose kao odgovarajuće osnovice, tj. vrijedi

$$\frac{P_{\Delta BNE}}{P_{\Delta NCE}} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{27}{8} \ ,$$

to jest $P_{\Delta BNE} = \frac{27}{8} P_{\Delta NCE}$. Na osnovu toga imamo

$$\frac{4}{7} = P_{\Delta BEC} = P_{\Delta BNE} + P_{\Delta NCE} = \frac{35}{27} P_{\Delta BNE} \ ,$$

to jest

$$P_{\Delta BNE} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{35} = \frac{108}{5 \cdot 49} \ .$$

Trouglovi $\triangle BDM$ i $\triangle BNE$ imaju jedan zajednički ugao sa tjemenom B, pa se njihove površine odnose kao proizvodi stranica na zajedničkim kracima, to jest

$$\frac{P_{\triangle BDM}}{P_{\triangle BNE}} = \frac{BD \cdot BM}{BN \cdot BE} \ .$$

Odavde imamo

$$P_{\triangle BDM} = \frac{|BD|}{|BN|} \cdot \frac{|BM|}{|BE|} \cdot P_{\triangle BNE} = \frac{|BD|}{|BN|} \cdot \frac{|BM|}{|BE|} \cdot \frac{108}{5 \cdot 49} \ .$$

Na osnovu Talesovog teorema imamo

$$\frac{|BM|}{|BE|} = \frac{|BD|}{|BN|} = \frac{\frac{21}{8}|NC|}{\frac{27}{8}|NC|} = \frac{7}{9} \ .$$

Konačno je

$$P_{\triangle BDM} = \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{108}{5 \cdot 49} = \frac{4}{15} \ .$$

□

Zadatak 9. *Izračunati vrijednost izraza*

$$(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\cdots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \ .$$

Rješenje: Stavimo $w = (2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1$. Imamo

$$\begin{aligned}
w &= (2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&= \underbrace{(2-1)(2+1)}_{(2^2-1)}\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&= \underbrace{\left(2^2-1\right)\left(2^2+1\right)}_{=(2^4-1)}\left(2^4+1\right)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&\vdots \ \left(2^{2^{10}}-1\right)\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 \\
&= \left(2^{2^{10}}\right)^2-1+1 = 2^{2^{11}} \ .
\end{aligned}$$

□

Duraković Aida, 9r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 10. *Nekom dvocifrenom broju doda se zbir njegovih cifara, a zatim se sa dobijenim brojem izvrši ista operacija. Na ovaj način dobija se dvocifreni broj koji ima iste cife kao početni broj, ali u obrnutom poretku. Odrediti brojeve koji imaju ovu osobinu.*

Rješenje: 1
Neka broj $A = 10a+b$ ima traženu osobinu. Stavimo $B = A+a+b = 10c+d$ i $C = B+c+d$. Tada, prema uslovu zadatka, vrijedi $C = 10b+a$. Prema načinu formiranja brojeva A, B i C vrijedi $A < B < C$. Nadalje, imamo

$$C - A = 10b + a - (10a+b) = 9b - 9a = 9(b-a) > 0 \ ,$$

pa je $a < b$ i broj $C - A$ je djeljiv brojem 9. To znači da brojevi A i C pri djeljenju sa 9 imaju isti ostatak. Neka je $A = 9x + r$, $C = 9y + r$, pri čemu je $0 \leq r < 9$. S druge strane je $A = 10a + b = 9a + (a + b)$, to jest $a + b = A - 9a = 9x + r - 9a = 9(x - a) + r$. To znači da brojevi $A, a + b$ i C imaju isti ostatak pri djeljenju sa 9. Ispitajmo koji je ostatak djeljenja broja B brojem 9. Imamo

$$B = A + (a + b) = 9x + r + 9(x - a) + r = 9(2x - a) + 2r\ .$$

Analogno, iz $C = B + (c + d)$ slijedi da broj C ima dva puta veći ostatak pri djeljenju sa 9 nego broj B. Prema tome, imamo $C = 9q + 4r$. Kako je $C = 9y + r$, to je $9q + 4r = 9y + r$, pa je $3r = 9(y - q)$. Dakle, $r = 3(y - q)$. Razlika $C - A = 9(b - a)$ je prirodan broj i ona predstavlja zbir brojeva $a + b$ i $c + d$. Oba ova broja su djeljiva sa 3 i $a < b$, pa je $3 \leq a + b \leq 15$ i $3 \leq c + d \leq 18$. Dakle, $9 \leq 9(b - a) = C - A = (a + b) + (c + d) \leq 33$, pa je $1 \leq b - a \leq 3$. Dvocifreni brojevi djeljivi sa 3 čije cifre zadovoljavaju uslov $a + 1 \leq b \leq a + 3$ su:

$$12, 24, 36, 45, 57, 69, 78\ .$$

Direktnom provjerom nalazimo da beojevi 12 i 69 ispunjavaju traženi uslov.

Rješenje: 2

Neka su A, B i C kao u prvom rješenju. Tada je $11a + 2b = 10c + d$ i $11c + 2d = 10b + a$. Odavde nalazimo

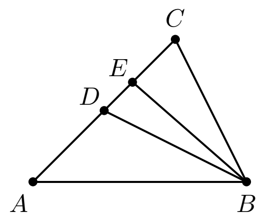
$$\begin{aligned} c &= \frac{7a - 2b}{3} = 2a - b + \frac{a + b}{3} \\ d &= \frac{-37a + 26b}{3} - 12a + 9b - \frac{a + b}{3}. \end{aligned}$$

Kako su c i d cifre, to 3 dijeli $a + b$, pa je $a + b = 3t$. Kako je $a < b$, to je $a + b \leq 15$, pa je $t = 1, 2, 3, 4, 5$.
Ako je $t = 1$, onda je $c = 3a - 2$ i $d = 26 - 21a$. Obje jednakosti su zadovoljene za $a = 1$. Tada je $b = 2$, pa je $A = 12$.
Ako je $t = 5$, onda je $b = 15 - a$, $c = 3a - 10$ i $d = 130 - 21a$. Jedino za $a = 6$, c i d su decimalne cifre. Tada je $b = 15 - 6 = 9$, pa je traženi broj $A = 69$.
Za ostale vrijednosti parametra t brojevi c i d nisu decimalne cifre. $\square$

Srednja škola

Zadatak 1. *U $\triangle ABC$ je $\sphericalangle C - \sphericalangle A = 60^\circ$, BD je simetrala ugla $\sphericalangle B$, $D \in AC$ i BE je visina $E \in AC$. Izračunati $|DE|$ ako je $|BD| = 10$ cm.*

Rješenje:



Iz pretpostavki zadatka imamo da je $\sphericalangle C - \sphericalangle A = 60^\circ$ i $\sphericalangle DBA = \frac{\sphericalangle B}{2}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} & \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ \\ \Longrightarrow & \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle A + 60^\circ = 180^\circ \\ \Longrightarrow & 2\sphericalangle A + \sphericalangle B = 120^\circ \\ \Longrightarrow & \sphericalangle A + \frac{\sphericalangle B}{2} = 60^\circ \ . \end{aligned}$$

Iz trougla $\triangle ADB$ slijedi da je $\sphericalangle A + \dfrac{\sphericalangle B}{2} + \dfrac{\sphericalangle B}{2} = 180^\circ$, odakle je onda $\sphericalangle ADB = 120^\circ$, a dalje zaključujemo da je $\sphericalangle EDB = 60^\circ$ i $\sphericalangle DBE = 30^\circ$.
Trougao $\triangle EDB$ je pravougli čija je hipotenuza $|DB| = 10$ *cm*, pa zbog uglova tog trougla (30° i 60°) zaključujemo da je $|ED| = \dfrac{10}{2} = 5$ *cm*. □

Fazlić Amina, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 2. *Za koje vrijednosti a i b je $a^2 - \sqrt{2}a + b - 2\sqrt{b} + \frac{3}{2} = 0$?*

Rješenje: Jednakost $a^2 - \sqrt{2}a + b - 2\sqrt{b} + \frac{3}{2} = 0$ možemo zapisati sa $a^2 - \sqrt{2}a + b - 2\sqrt{b} + \frac{1}{2} + 1 = 0$. Ovo je ekvivalentno sa $a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} + b - 2\sqrt{b} + 1 = 0$, a ovo opet možemo zapisati u obliku

$$\left(a - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - 1\right)^2 = 0 \ .$$

Kako je lijeva strana posljednje jednakosti zbir kvadrata, a to treba biti jednako 0, oba sabirka lijeve strane moraju biti jednaka 0, to jest

$$\left(a - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0 \quad \text{i} \quad \left(\sqrt{b} - 1\right)^2 = 0 \ .$$

Dakle,

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad b = 1 \ .$$

□

Ćulah Arman, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 3. *Polinom $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ je kvadrat drugog polinoma, gdje su a i b realni brojevi. Odrediti drugi polinom i realne brijeve a i b.*

Rješenje: Neka je polinom $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ kvadrat nekog polinoma $Q(x)$, to jest $P(x) = Q(x)^2$. Kako je $P(x)$ polinom četvrtog stepena, to polinom $Q(x)$ mora biti polinom drugog stepena, pa ga možemo zapisati sa

$$Q(x) = \pm(x^2 + mx + n) \ .$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(x) = Q(x)^2 = (x^2+mx+n)^2 &= x^4 + m^2x^2 + n^2 + 2x^2mx + 2x^2n + 2mxn \\ &= x^4 + 2mx^3 + (m^2+2n)x^2 + 2mnx + n^2 \\ &= x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b \ . \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da moraju vrijediti sljedeće jednakosti;

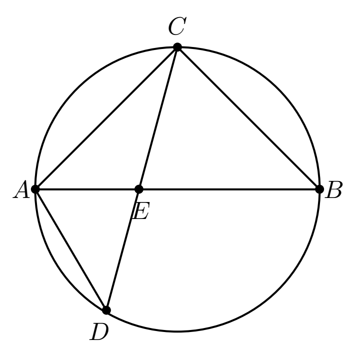
$$2m = 2 \ , \ m^2 + 2n = a \ , \ 2mn = 2 \ , \ n^2 = b \ .$$

Dakle, $m = 1$, $n = 1$, $a = 3$ i $b = 1$, pa je traženi polinom $Q(x) = \pm(x^2 + x + 1)$. □

Rakovac Kanita, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 4. *Tetive $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ kruga k su jednake, a tetiva $\overline{AD}$ siječe $\overline{BC}$ u tački E. Ako je $|AC| = 12$ i $|AE| = 8$, izračunati $|AD|$.*

Rješenje:



Vrijedi $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA$ jer su uglovi nad istom tetivom. $\triangle BCA$ je jednakokrak pa je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$. Trouglovi $\triangle BEA$ i $\triangle DBA$ su slični jer imaju zajednički ugao $\sphericalangle BAD$ i jednake uglove $\sphericalangle BDA = \sphericalangle ABC$. Prema tome, vrijedi

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AD|} \implies |AD| = \frac{|AB|^2}{|AE|} = \frac{144}{8} = 18 \ .$$

Dakle, $|AD| = 18$. □

Osmić Asja, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 5. *Koji dvocifreni brojevi $10x + y$ zadovoljavaju uslov $10x + y = x^2 + y^2 + xy$?*

Rješenje: Uslov se može zapisati na sljedeći način:

$$x^2 + x(y - 10) + y^2 - y = 0 \ .$$

Riješimo ovo kao kvadratnu jednačinu po x:

$$x_{1,2} = \frac{10-y \pm \sqrt{(10-y)^2 - 4y^2 + 4y}}{2} = \frac{10-y \pm \sqrt{100-3y^2-16y}}{2} \; .$$

x i y su cifre dvocifrenog broja, pa diskriminanta mora biti kvadrat nekog prirodnog broja. To je očigledno nemoguće za $y \geq 4$ i za $y = 0$.

Za $y = 1$ diskriminanta je 81, te je $x_{1,2} = \dfrac{10-1\pm 9}{2}$, pa dobijamo jedno rješenje, a to je broj 91 ($x = 9$ i $y = 1$).

Za $y = 2$ diskriminanta je 56, te nije kvadrat prirodnog broja.

Za $y = 3$ diskriminanta je 25, te je $x_{1,2} = \dfrac{10-3\pm 5}{2}$, odakle dobijamo još dva rješenja, a to su brojevi 63 ($x = 6$ i $y = 3$) i 13 ($x = 1$ i $y = 3$).

Dakle, traženi brojevi su 91, 63 i 13. □

Bjeloglav Vesna, 4r, JU SŠC "Istočna Ilidža"

Zadatak 6. *Ako je* $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ *odrediti realne vrijednosti parametra* m *za koje je tačna jednakost* $\cos\varphi = \dfrac{m^2-4m-4}{m^2+1}$.

Rješenje: Funkcija $y = \cos x$ je opadajuća na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, pa vrijedi

$$0 < \phi < \frac{\pi}{3} \implies \cos 0 > \cos\phi > \cos\frac{\pi}{3} \; ,$$

$$\frac{1}{2} < \cos\phi < 1 \implies \frac{1}{2} < \frac{m^2-4m-4}{m^2+1} < 1 \; .$$

1.

$$\frac{m^2-4m-4}{m^2+1} > \frac{1}{2} \iff \frac{2m^2-8m-8-m^2-1}{2(m^2+1)} > 0 \iff \frac{m^2-8m-9}{2(m^2+1)} > 0$$
$$\iff m^2-8m-9 > 0 \iff m \in R_1 = (-\infty, -1) \cup (9, +\infty)$$

jer je izraz $2(m^2+1) > 0$ za svako $m \in \mathbb{R}$.

2.

$$\frac{m^2-4m-4}{m^2+1} < 1 \iff \frac{m^2-4m-4-m^2-1}{m^2+1} < 0 \iff \frac{-4m-5}{m^2+1} < 0$$
$$\iff -4m-5 < 0 \iff m > -\frac{5}{4} \iff m \in R_2 = \left(-\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

jer je izraz $m^2+1 > 0$ za svako $m \in \mathbb{R}$.

Konačno rješenje je skup $R = R_1 \cap R_2$, to jest $R = \left(-\frac{5}{4}, -1\right) \cup (9, +\infty)$. □

Hasić Elma, 3r, JU Mješovita srednja škola Banovići

Zadatak 7. *Ako su* α, β *i* γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ *uglovi trougla i ako* $\tan\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$ *i* $\tan\frac{\gamma}{2}$ *čine aritmetički niz, tada* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *također čine aritmetički niz. Dokazati!*

Rješenje: Prema uvjetima zadatka imamo

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = 2\tan\frac{\beta}{2} \iff \tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\gamma}{2} - \tan\frac{\beta}{2}$$
$$\iff \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$
$$\iff \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \iff \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} \; .$$

Zamjenom $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$, dobija se

$$\begin{aligned}
&\sin\left(90^\circ - \frac{2\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\left(-90^\circ + \frac{\alpha+2\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} \\
\Longleftrightarrow &\cos\left(\frac{2\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} = -\cos\left(\frac{\alpha+2\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\ .
\end{aligned}$$

Primjenom formule: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$, posljednja jednakost poprima oblik

$$\cos(\alpha+\gamma) + \cos\alpha = -\cos(\alpha+\gamma) - \cos\gamma\ ,$$

odnosno

$$2\cos(180^\circ - \beta) = -\cos\alpha - \cos\gamma \Longleftrightarrow 2\cos\beta = \cos\alpha + \cos\gamma\ ,$$

to jest $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ čine aritmetički niz u datom poretku. □

Zadatak 8. *Dokazati nejednakost*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Rješenje: 1

Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom.

Korak 1: $n = 1$:

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1\ ,$$

te je tvrđenje tačno za $n = 1$.

Korak 2: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, to jest

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1\ .$$

Korak 3: Neka je $n = k+1$. Stavljajući taj n u lijevu stranu polazne nejednakosti, imamo

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}\ .$$

Na osnovu *Koraka 2* imamo da je $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1 - \frac{1}{k+1}$, pa zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} &> 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \\
&= 1 - \frac{2}{3(k+1)} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} \\
&= 1 + \frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 1
\end{aligned}$$

Na osnovu principa potpune matematičke indukcije zaključujemo da data nejednakost vrijedi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Ahmetović Zerina, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Rješenje: 2

Uočimo prvo da za pozitivne brojeve a i b vrijedi:

$$A \geq G \iff \frac{1}{ab} > \frac{4}{(a+b)^2} \ . \tag{1}$$

Napravimo zbirove parova razlomaka na lijevoj strani date nejednakosti, uzimajući: prvi i zadnji, drugi i predzadnji itd. (kako je zbir nazivnika razlomaka po svim parovima isti i iznosi $4n+2$) i iskoristimo nejednakost (**??**):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} = \frac{4n+2}{(n+1)(3n+1)} &\overset{(??)}{>} (4n+2)\frac{4}{(4n+2)^2} = \frac{2}{2n+1} \\ \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} = \frac{4n+2}{3n(n+2)} &\overset{(??)}{>} (4n+2)\frac{4}{(4n+2)^2} = \frac{2}{2n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kako je broj razlomaka na lijevoj strani date nejednakosti neparan (ima ih $2n+1$), to imamo n parova razlomaka čiji su zbirovi veći od $\frac{2}{2n+1}$, te ostaje još jedan razlomak koji nema para, a to je $\frac{1}{2n+1}$. Zbog toga je

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > n\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = 1 \ ,$$

što je trebalo i dokazati. □

Efendić Nura, 3r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 9. *Ako je* $f\left(\frac{x}{1+x}\right) + 3f\left(\frac{1+x}{x}\right) = 2x$, *odrediti* $f(x)$.

Rješenje: Neka je

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) + 3f\left(\frac{1+x}{x}\right) = 2x \ . \tag{2}$$

Uvedimo smjenu

$$\frac{x}{1+x} = t \ . \tag{3}$$

Tada je

$$\frac{1+x}{x} = \frac{1}{t} \ . \tag{4}$$

Takođe vrijedi,

$$\frac{x}{1+x} = t \implies x = t(1+x) \implies x(1-t) = t \ ,$$

odnosno

$$x = \frac{t}{1-t} \ . \tag{5}$$

Uvrštavajući (**??**), (**??**) i (**??**) u (**??**) imamo

$$f(t) + 3f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\frac{t}{1-t} \ , \tag{6}$$

a odavde zamjeno t sa $\frac{1}{t}$ dobijamo

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 3f(t) = 2\frac{1}{t-1} \tag{7}$$

Množeći jednakost (**??**) sa -3 i sabiranjem sa (**??**), slijedi da je

$$-8f(t) = \frac{2t}{1-t} + \frac{6}{1-t} \ ,$$

odakle je

$$f(t) = \frac{t+3}{4(t-1)} \ .$$

□

Mitić Marinela, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 10. *Neka su α, β i γ uglovi trougla. Dokazati da vrijedi nejednakost:*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6 \ .$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

Rješenje: 1
Prema nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine je

$$\frac{3}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}} \leq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \ ,$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq \frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \ . \tag{8}$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna u intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \ .$$

Kako su α, β i γ uglovi trougla, odatle slijedi

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ ,$$

odnosno

$$\frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6 \ . \tag{9}$$

Iz (**??**) i (**??**) slijedi nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi za $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$, odnosno za $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje: 2 Koristeći A-G nejednakost, imamo

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}} \ . \tag{10}$$

Neka je $x = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. tada je

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\sin\frac{\gamma}{2} \\
\iff & 2x = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\
\iff & 2x = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} \\
\iff & \sin^2\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 2x = 0 \ .
\end{aligned}$$

Posljednju jednadžbu promatrajmo kao kvadratnu jednadžbu po $\sin\frac{\gamma}{2}$. Da bi ona imala realna rješenja njena diskriminanta mora biti nenegativna, to jest

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 8x \geq 0 \ ,$$

odakle je

$$8x \leq \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{8} \iff \frac{1}{x} \geq 8 \ .$$

Zbog toga je

$$(\mathbf{??}) \iff \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6 \ .$$

Jednakost vrijedi za $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. □

Rješavatelji zadataka 1 – 10: Osnovna škola

OŠ "Malešići" Malešići - sljedeći učenici: *Aljić Lejla* (6r): 3,5; *Bešić Đulsa* (8r): 7; *Buljubašić Tarik*(6r): 1-3,5; *Delić Sumea* (6r): 1,2; *Duraković Adina*(9r): 7,9, djel.10; *Duraković Ajla* (9r): 7,9, djel.10; *Duraković Enver* (7r): 2-4; *Halilčević Delila* (7r): 1-4; *Hankušić Džejla* (8r): 7; *Hasić Fejzulah* (7r): 2-5; *Husić Omer* (9r): 7,9, djel.10, *Memić Said* (6r):1,2; *Mešanović Nejra* (6r): 1-3,5; *Mujkić Lejla* (7r): 1,4;
OŠ "S.S. Kranjčević" Sarajevo: *Esma Pita* (2r): 3.

Rješavatelji zadataka 1-10: Srednja škola

Gimanzija "Meša Selimović Tuzla - sljedeći učenici: *Ćulah Arman* (1r): 1-4; *Mitić Marinela* (1r): 9; *Imamović Hamza* (1r): 9; *Džanić Armin* (1r): 9; *Mazalović Aida* (1r): 1,9; *Rakovac Kanita* (1r): 1-3; *Osmić Asja* (2r): 1-4,9; *Ahmetović Zerina* (2r):2,3, djel.5,8,9; *Efendić Nura* (3r): 1,2,8,9; *Emkić Emina* (4r): 1,2,4,6; *Mandžić Šejla* (4r): 1,3,8,9.
Gimnazija "Ismet Mujezinović" - sljedeći učenici: *Jahić Amina* (1r): 1,2,5,9; *Fazlić Amina* (2r): 1,2,5,9;
Mješovita srednja škola Banovići - sljedeći učenici: *Dostović Emina* (2r): 9; *Hasić Elma* (3r): 6;
SŠC "Istočna Ilidža": *Bjeloglav Vesna* (4r): 5,8;
Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac: *Kukuruzović Nedim* (4r): 1-9;
Međunarodna srednja škola "Richmond Park School" Tuzla: *Hasić Almedin* (1r): 2,3,5.