EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2019), 2–10

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Jedan zadatak s više načina rješavanja

Alija Muminagić[a]

[a] *Kraljevina Danska*

Sažetak: U ovom radu na šest različitih načina rješavamo jedan poznati zadatak iz geometrije koji je u matematičkoj literaturi poznat kao Bobillierova formula. Rješavajući zadatak na više načina, cilj nam je ukazati na analize i primjene veće količine znanja koja su potrebna za njegovo rješavanje a sve sa ciljem produbljivanja i proširivanja matematičkih znanja.

1. Uvod

Počinjemo citatom iz [6]: *"Zašto razmatrati više načina rješavanja? Zar nije dovoljan samo jedan budući da on vodi do onoga što se traži, a to je rješenje zadatka? Naravno da je dovoljan jedan način rješavanja ako je cilj samo rješenje zadatka. No, ako se želi postići više, onda nije dovoljan. Šta je to više? Za nalaženje rješenja zadatka potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa zadatkom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način nejke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje na više načina trebati više teorijskih činjenica i metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan zadatak aktivira, analizira i primijenjuje veća količina stečenog znanja. Osim toga, znanja se produbljuju i proširuju novim znanjima, a najvažnije je da zadaci sa više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes za matematiku."*

Da je to upravo tako uvjerićemo se rješavajući ovaj dobro poznati zadatak.

Zadatak 1.1. *Zbir poluprečnika pripisanih kružnica nekog trougla jednak je zbiru četverostrukog poluprečnika opisane kružnice i poluprečnika upisane kružnice tog trougla, to jest*

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \tag{1}$$

gdje su r_a, r_b, r_c poluprečnici trouglu pripisanih kružnica uz odgovarajuće stranice i R i r poluprečnici opisane i upisane kružnice tog trougla.

Formula (1) je u matematičkoj literaturi poznata kao Bobillierova formula.

2. Prvi način

Na ovaj način rješavaju učenici 8. i 9. razreda osnovne škole. Prvo moraju riješiti ovaj zadatak.

Zadatak 2.1. *Dokažite da u svakom trouglu vrijedi:*

(a) $r = \dfrac{P}{s}$,

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: februar 2019.
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

(b) $r_a = \dfrac{P}{s-a},\ r_b = \dfrac{P}{s-b},\ r_c = \dfrac{P}{s-c},$

gdje je r poluprečnik upisane kružnice, r_a, r_b, r_c poluprečnici pripisanih kružnica, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla i P njegova površina.

Rješenje: (a) Sa Slike 1. vidimo da je

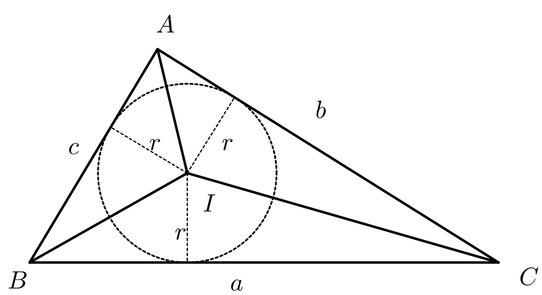
$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle IBC} + P_{\triangle ICA} + P_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s,$$

tj. $r = \dfrac{P}{s}$.

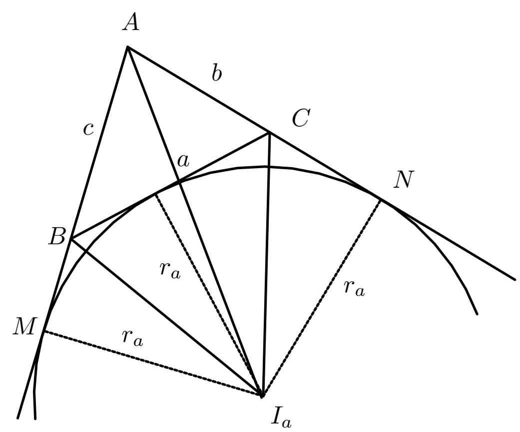
(b) Sa Slike 2. vidimo da je

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BI_aA} + P_{\triangle CI_aA} - P_{\triangle BI_aC} = \frac{1}{2}c \cdot r_a + \frac{1}{2}b \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a = r_a \cdot \frac{c+b-a}{2} = r_a(s-a)$$

jer je $s - a = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{c+b-a}{2}$, pa je $r_a = \dfrac{P}{s-a}$. Analogno je $r_b = \dfrac{P}{s-b}$ i $r_c = \dfrac{P}{s-c}$. □



Slika 1.



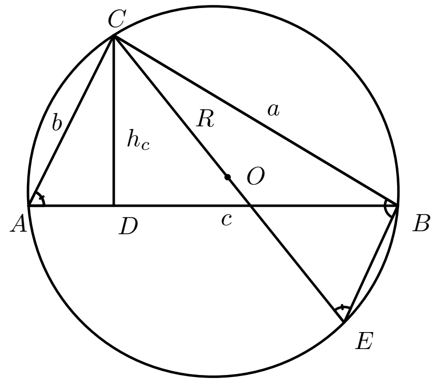
Slika 2.

Da dokažemo da je $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ili $r_a + r_b + r_c - r = 4R$ potrebno je još znati Heronovu formulu za izračunavanje površine trougla $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Tako je

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c - r &= \frac{P}{s-a} + \frac{P}{s-b} + \frac{P}{s-c} - \frac{P}{s} = P\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}\right) + P\left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right) \\
&= P\frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)} + P\frac{s-(s-c)}{s(s-c)} = P\left(\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)} + \frac{s-s+c}{s(s-c)}\right) \\
&= P\left(\frac{c}{(s-a)(s-b)} + \frac{c}{s(s-c)}\right) = P \cdot c\left(\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right) \\
&= P \cdot c\frac{s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab}{P^2} = c\frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{P} \\
&= c\frac{2s^2 - 2s^2 + ab}{P} = \frac{abc}{P} = 4R.
\end{aligned}$$

Napomena: srednjoškolci lako dokazuju na ovaj način

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = (\text{zbog } \sin\gamma = \frac{c}{2R} \text{ na osnovu sinusne teoreme}) = \frac{1}{2}\frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$



Slika 3.

Preostaje nam da dokažemo da je $\frac{abc}{P} = 4R$.
Neka je O središte opisane kružnice trouglu ABC, i neka je $h_c = CD$ visina iz C na $AB = c$ (vidi Sliku 3.). Neka je E presječna tačka pravca CO i kružnice. Tako je $CE = 2R$. Sada je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BEC$ (kao periferijski uglovi nad $\widehat{BC}$), a $\sphericalangle CBE = 90°$ (kao uglovi nad prečnikom). Zato je $\triangle ACD \sim \triangle ECB$ i iz te sličnosti slijedi $\frac{b}{h_c} = \frac{2R}{a} \Leftrightarrow h_c = \frac{ab}{2R}$, a iz $P = \frac{1}{2}h_c \cdot c$ je $h_c = \frac{2P}{c}$, pa je $\frac{ab}{2R} = \frac{2P}{c} \Leftrightarrow \frac{abc}{P} = 4R$.

3. Drugi način

Zadatak 3.1. *Dokazati da u trouglu ABC vrijedi:*

(a) $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$,

(b) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$.

Rješenje:(*a*) Imamo

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{s}{P} - \frac{s-c}{P} = \frac{c}{P} = \frac{c}{\frac{1}{2}ch_c} = \frac{2}{h_c}. \tag{2}$$

Iz $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$ dobijamo $\frac{r_c - r}{rr_c} = \frac{2}{h_c} \Leftrightarrow r_c - r = \frac{2}{h_c}rr_c$.

(*b*) Imamo

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{s-a}{P} - \frac{s-b}{P} = \frac{2s-a-b}{P} = \frac{a+b+c-a-b}{P} = \frac{c}{P} = \frac{2}{h_c} \tag{3}$$

a iz $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$ dobijamo $\frac{r_a+r_b}{r_ar_b} = \frac{2}{h_c} \Leftrightarrow r_a + r_b = \frac{2}{h_c}r_ar_b$. □

Dokazujemo sada da je $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ili $r_a + r_b + r_c - r = 4R$. Koristeći (2) i (3), dobijamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= (r_a + r_b) + (r_c - r) = \frac{2}{h_c}(r_ar_b + rr_c) = \frac{2}{h_c}\left(\frac{P}{s-a} \cdot \frac{P}{s-b} + \frac{P}{s} \cdot \frac{P}{s-c}\right) \\ &= \frac{2P^2}{h_c}\frac{s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2P^2}{h_c}\frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{P^2} \\ &= \frac{2}{h_c}ab = \frac{2c}{2P}ab = \frac{c}{P}\frac{abc}{c} = \frac{abc}{P} = 4R. \end{aligned}$$

Predlažemo da srednjoškolci daju planimetrijski dokaz za $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$ i $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$. Oni učenici koji dobro "gledaju" iz prvog načina dokazivanja vide da je

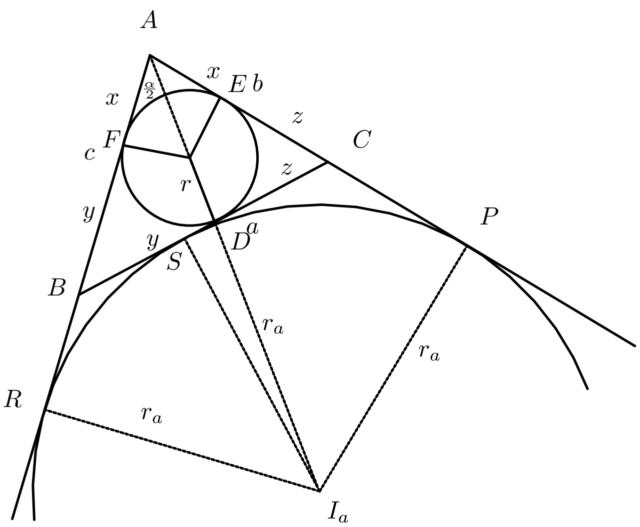
$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{P}{s} \cdot \frac{P}{s-a} \cdot \frac{P}{s-b} \cdot \frac{P}{s-c} = \frac{P^4}{P^2} = P^2 \Leftrightarrow P = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

a iz drugog načina

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

4. Treći način

Ovo će biti trigonometrijski način rješavanja zadatka.



Slika 4.

Posmatrajmo Sliku 4. Dokažimo da vrijedi:

(a) $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$,

(b) $AR = AP = s$.

(a) Iz jednakosti tangentnih duži $AF = AE = x$, $BF = BD = y$ i $CD = CE$ dobijamo $AB = c = AF + BF = x + y$, $BC = a = BD + CD = y + z$ i $CA = b = CE + AE = z + x$. Dakle, $a = y + z$, $b = x + z$ i $c = x + y$. Obim trougla ABC je $2s = 2x + 2y + 2z \Leftrightarrow s = x + y + z$ pa iz posljednje jednakosti slijedi $x = s - (y + z) = s - a$, $y = s - (x + z) = s - b$ i $z = s - c$.

(b) Koristeći jednakost tangentnih duži (vidi Sliku 4.) dobijamo

$$\begin{aligned} AP = AR &= \frac{1}{2}(AP + AR) = \frac{1}{2}(AC + CP + AB + RB) = \frac{1}{2}(AC + CS + AB + BS) \\ &= \frac{1}{2}(AB + CS + BS + AC) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(a + b + c) = s. \end{aligned}$$

Na pravouglim trouglovima AIF i AI_aR je

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{IF}{AF} = \frac{r}{x} = \frac{r}{s-a} \Leftrightarrow r = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2}, \tag{4}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{I_aR}{AR} = \frac{r_a}{s} \Leftrightarrow r_a = s\tan\frac{\alpha}{2}, \tag{5}$$

pa na osnovu (4) i (5) vrijedi

$$r_a - r = (s - (s-a))\tan\frac{\alpha}{2} = a \cdot \tan\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

S druge strane imamo da je

$$\begin{aligned} r_b + r_c &= \frac{P}{s-b} + \frac{P}{s-c} = P\frac{s-c+s-b}{(s-b)(s-c)} = P\frac{2s-c-b}{(s-b)(s-c)} \\ &= P\frac{a+b+c-b-c}{(s-b)(s-c)} = P\frac{a}{(s-b)(s-c)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Iz (4) je

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a} = \frac{\frac{P}{s}}{s-a} = \frac{P}{s(s-a)} \Leftrightarrow P = s(s-a)\tan\frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

što uvršteno u (7) daje

$$r_b + r_c = s(s-a)\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a}{(s-b)(s-c)} = a\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}\tan\frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Zbog $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$ je

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{(s-a)^2} = \frac{\frac{P^2}{s^2}}{(s-a)^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-a)^2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

pa jednakost (9) možemo pisati u obliku

$$r_b + r_c = a\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\tan\frac{\alpha}{2}}. \tag{10}$$

Sabiranjem jednkosti (6) i (10) dobijamo

$$\begin{aligned} r_a - r + r_b + r_c &= a\cdot\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{a}{\tan\frac{\alpha}{2}} = a\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \left(\text{zbog } \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}\right) \\ &= a\cdot\frac{2}{\sin\alpha} = 2\cdot\frac{a}{\sin\alpha}\left(\text{zbog } \frac{a}{\sin\alpha} = 2R \text{ na osnovu sinusne teoreme}\right) \\ &= 2\cdot 2R = 4R \end{aligned}$$

tojest $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

5. Četvrti način

Ovo će također biti trigonometrijski način rješavanja zadatka. Prethodno ćemo dokazati identitete koje zadovoljavaju uglovi trougla.

Teorem 5.1. *Vrijedi*

(a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \dfrac{r}{R}$,

(b) $-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{r_a}{R} - 1$,

(c) $\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{r_b}{R} - 1$,

(d) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = \dfrac{r_c}{R} - 1$,

Dokaz:

(a) To je dobro poznati identitet.

(b) Identitet $-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{r_a}{R} - 1$ je ekvivalentan sa $2abc(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 2abc\frac{r_a}{R} - 2abc$ pa zbog $R = \dfrac{abc}{4T}$ dobijamo $2abc(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + 2abc = 2abc\frac{4Tr_a}{abc} = 8Tr_a$. Označimo lijevu stranu posljednje jednakosti sa L. Iz kosinusne teoreme slijedi

$$\begin{aligned} 2bc\cos\alpha &= -a^2 + b^2 + c^2, \\ 2ac\cos\beta &= -b^2 + a^2 + c^2, \\ 2ab\cos\gamma &= -c^2 + a^2 + b^2, \end{aligned}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}L &= -a(-a^2+b^2+c^2)+b(a^2-b^2+c^2)+c(a^2+b^2-c^2)+2abc\\ &= a^3+a^2(b+c)-a(b^2+c^2-2bc)-b^3+b^2c+bc^2-c^3\\ &= a^3+a^2(b+c)-a(b-c)^2-(b^3+c^3)+bc(b+c)\\ &= a^3+a^2(b+c)-a(b-c)^2-(b+c)(b^2-bc+c^2-bc)\\ &= a^3+a^2(b+c)-a(b-c)^2-(b+c)(b-c)^2\\ &= a^2(a+b+c)-(b-c)^2(a+b+c)=(a+b+c)(a^2-(b-c)^2)\\ &= (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=2s(2s-2b)(2s-2c)=8s(s-b)(s-c)\\ &= \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{s-a}=\frac{8T^2}{s-a}=8T\frac{T}{s-a}=8Tr_a\end{aligned}$$

što je desna strana jednakosti.

(c) Slično kao pod (b).

(d) Slično kao pod (b).

□

Sada slijedi rješenje našeg zadatka. Sabiranjem identiteta $-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{r_a}{R}-1$, $\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma=\frac{r_b}{R}-1$ i $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=\frac{r_c}{R}-1$, dobijamo

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{1}{R}(r_a+r_b+r_c)-3 \overset{(a)}{=} 1+\frac{r}{R}=\frac{1}{R}(r_a+r_b+r_c)-3\\ \Leftrightarrow R+r=r_a+r_b+r_c-3R \Leftrightarrow r_a+r_b+r_c=4R+r.\end{aligned}$$

6. Peti način

Dokazaćemo najprije teoremu o kružnici devet tačaka.

Teorem 6.1. *Podnožja visina D,E,F, središta stranica K,L,M i središta duži HA,HB,HC gdje je H ortocentar $\triangle ABC$, leže na jednoj kružnici k_9 koju nazivamo kružnicom devet tačaka.*

Dokaz: Teorema se može dokazati na razne načine a mi dajemo ne tako čest dokaz.

Neka je O središte opisane kružnice $\triangle ABC$ i neka je $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{l}$ i $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{m}$, (vidi Sliku 5.). Tada je $|\overrightarrow{k}|=|\overrightarrow{l}|=|\overrightarrow{m}|=R$, gdje je R poluprečnik opisane kružnice $\triangle ABC$.

Posmatrajmo vektor $\overrightarrow{h}$ definisan kao $\overrightarrow{h}=\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{k}+\overrightarrow{l}+\overrightarrow{m}$. Imamo da je $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{l}+\overrightarrow{m}$ i $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{l}-\overrightarrow{m}$ pa je skalarni proizvod tih vektora jednak

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{l}+\overrightarrow{m})\cdot(\overrightarrow{l}-\overrightarrow{m})=|\overrightarrow{l}|^2-|\overrightarrow{m}|^2=0$$

što znači da je $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CB}$. Analogno pokazujemo da je $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$, što znači da je tačka H ortocentar $\triangle ABC$.

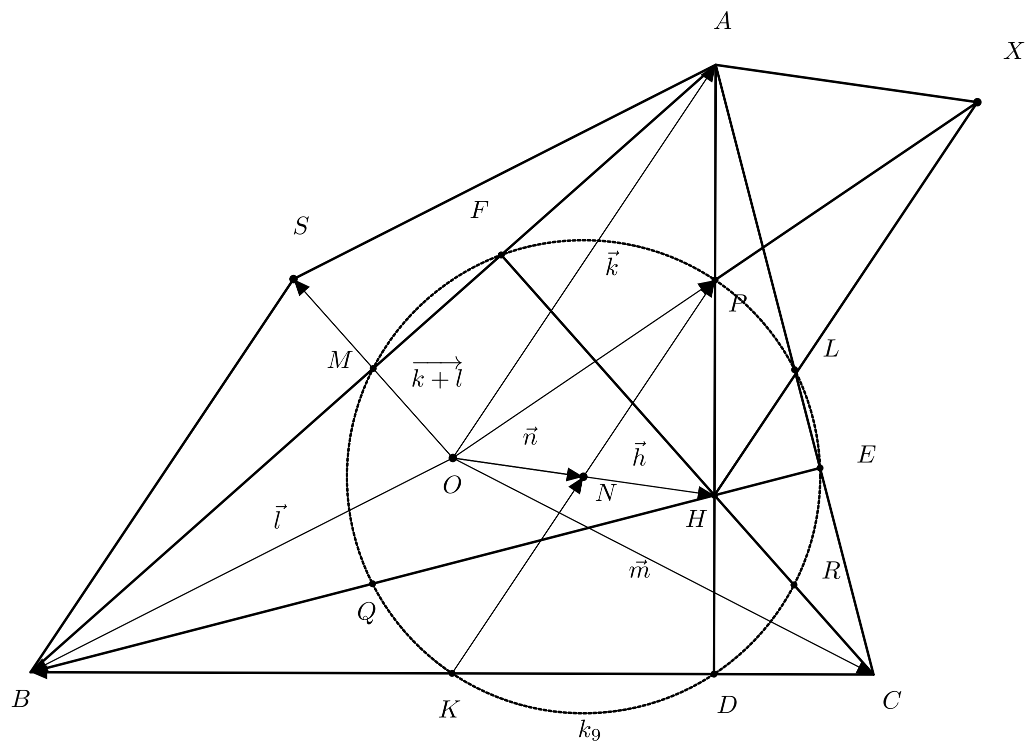
Definišimo sada vektor $\overrightarrow{u}$ kao

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{k}+\overrightarrow{l}+\overrightarrow{m})$$

tj. tačka N je središte duži OH. U trapezu $OKDH$ je $NK = ND$, a kako je tačka P središte duži AH (iz paralelograma $AXHO$), imamo da je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{k}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}),\\
\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{k},\\
\overrightarrow{KN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

jer je $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{l} + \overrightarrow{m})$. Dakle, $NK = NP$ i zbog $NK = ND$ je $NK = ND = NP$. Slično pokazujemo da je $NE = NL = NQ$ i $NF = NM = NR$ a lako vidimo i da je $NK = NL = NM$, što znači da svih devet tačaka su na istom rastohjanju od tačke N, pa je N središte kružnice k_9. $\square$



Slika 5.

Neka je u $\triangle ABC$, tačka I središte upisane kružnice, r i R poluprečnici upisane i opisane kružnice, te r_a, r_b, r_c poluprečnici pripisanih kružnica uz odgovarajuću sttranicu tog trougla i neka su tačke D, E i F središta pripisanih kružnica, vidi Sliku 5.

Simetrale unutrašnjih uglova AD, BE i CF u $\triangle ABC$ su normale na pravce FAE, FBD i DCE koji su simetrale spoljašnjih uglova kod vrhova A, B i C. Dakle, tačke A, B i C su podnožja visina u $\triangle DEF$, pa je kružnica koja prolazi tim tačkama kružnica 9 tačaka u $\triangle DEF$ koja je istovremeno opisana kružnica $\triangle ABC$. Osim toga, tačka I je istovremeno ortocentar H u $\triangle DEF$.

Na osnovu Teoreme 6.1 vrijedi da je tačka R središte duži IF a i središte luka $\widehat{AB}$, jer je CF simetrala ugla kod crha C u $\triangle ABC$. Tako je $RA = RB$ te $OA = OB$ pa slijedi da je prečnik RL normalan na tetivu AB, zbog čega je tačka T središte duži AB. Osim toga $RL \perp UV$, gdje su U i V dodirne tačke upisane kružnice (I, r) u $\triangle ABC$ i pripisane kružnice (F, r_c) u $\triangle ABC$.

Posmatrajmo sada trapez $UIVF$. Dokažimo da je

$$TR = \frac{r_c - r}{2}. \tag{11}$$

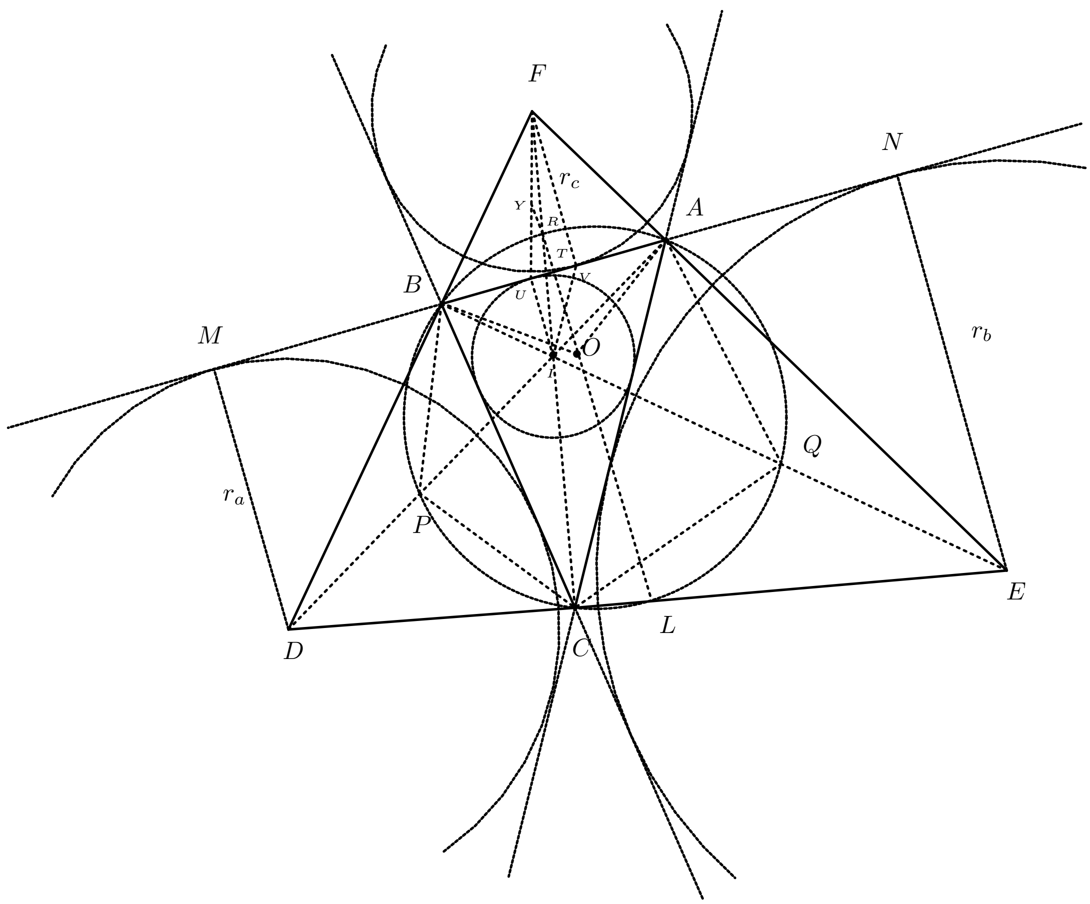
Duž YT je srednja linija $\triangle UVF$ pa je $YT = \frac{1}{2}VF = \frac{1}{2}r_c$. Duž RY je srednja linija $\triangle UIF$ pa je $RY = \frac{1}{2}UI = \frac{1}{2}r$. Sa Slike 6. vidimo da je $TR = YT - RY = \frac{1}{2}r_c - \frac{1}{2}r = \frac{r_c - r}{2}$.

U trapezu $ENMD$ je LT srednja linija pa je

$$LT = \frac{r_a + r_b}{2} \tag{12}$$

Sabiranjem (11) i (12) dobijamo

$$RL = 2R = LT + TR = \frac{r_a + r_b}{2} + \frac{r_c - r}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4R = r_a + r_b + r_c - r \Leftrightarrow 4R + r = r_a + r_b + r_c.$$



Slika 6.

7. Šesti način

Prethodno ćemo dokazati sljedeće teoreme.

Teorem 7.1. *Neka simetrale uglova kod vrova A, B i C u $\triangle ABC$ sijeku opisanu kružnicu tom trouglu u tačkama P, Q i R. Ako je I središte tom trouglu upisane kružnice, onda je $PB = PC = PI$, $QC = QA = QI$ i $RA = RB = RI$.*

Dokaz: Poznato je da jednakim periferijskim uglovima odgovaraju jednaki lukovi a time i jednake tetive pa je $PB = PC$, vidi Sliku 6, pa $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAC = \frac{\alpha}{2}$. Da bi dokazali da je $PI = PB$ dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle PIB = \varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, jer je $\sphericalangle PIB$ spoljašnji ugao u $\triangle ABI$. U $\triangle BIP$ je $\sphericalangle PIB + \sphericalangle IBP + \sphericalangle BPI = 180°$, pa zbog $\sphericalangle PIB = \varphi$, $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle PAB = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle IBC = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle IBP = \sphericalangle IBC + \sphericalangle PBC = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle BPI = \sphericalangle BPA = \sphericalangle BCA = \gamma$, dobijamo $\varphi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 180°$, što je ekvivalentno sa $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \gamma$, tj. $\varphi = \alpha + \beta + \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Analogno dokazujemo ostale dvije jednakosti. □

Teorem 7.2. *Neka je I centar upisane kružnice u $\triangle ABC$ i F središte pripisane kružnice tom trouglu. Ako kružnica opisana $\triangle ABC$ siječe simetralu ugla kod vrha C u tački R, onda je $RI = RF$.*

Dokaz: Prema Teoremi 7.1 je $RA = RI$. Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod vrha A su međusobno normalne, zbog čega je $\sphericalangle IAF = 90°$, tj. $\triangle IAF$ je pravougli trougao sa hipotenuzom IF. Središte opisane kružnice $\triangle IAF$ je središte hipotenuze IF, a budući da je $RI = RA$ mora biti $RI = RF$ □

Zadatak se dalje rješava kao na peti način.

Nadamo se da ste onda uvjereni u tačnost citata sa početka članka, međutim mi ne vjerujemo da će neko Bobillierovu formulu dokazivati na načine 4,5, i 6. Takvi dokazi su interesantni samo sakupljačima neuobičajenih dokaza, a takvih znamo da ima.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[2] Š. Arslanagić, A. Muminagić: *Five new proofs of one trigonometric inequality in the triangle*, Mathematics and Informatics, Volume 56., Number 6., Sofia, 2013.
[3] V. Blagojević: *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Srpsko Sarajevo, 2002.
[4] J. Carstensen: *Trigonometri, systime a/s*, Herning, Denmark, 1994.
[5] J. Carstensen: *Nipunkteriklen og vektores*, Matematik Magasinet 66, oktober 2012.
[6] Z. Kurnik: *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Prvo izdanje, Element d.o.o., Zagreb, 2010.
[7] A. Muminagić: *Bobillierova formula*, Osječka matematička škola 4,77-81, 2004.
[8] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
[9] D. E. Wallis: *Vectors and nine-point circle*, The Mathematical gazette, Vol. 66, October 1982.