EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2019), 11–16

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: `http://www.umtk.info`

O pravilnom osmouglu

Dragoljub Milošević[a]

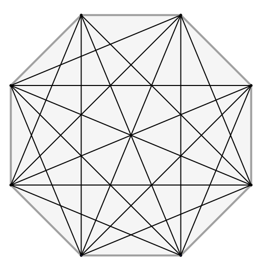
[a] *Penzioner, Srbija*

Sažetak: U radu će biti riječi o definiciji i osnovnim karakteristikama pravilnog osmougla, izračunavanju površine u funkciji njegove stranice (polumjera opisane ili upisane kružnice), nekim njegovim konstrukcijama i raznim zadacima u vezi s njim.

1. Uvod

Poznato je da se mnogougao kod koga su sve stranice jednake i svi uglovi jednaki naziva *pravilni mnogougao*. Za pravilan osmougao znamo da vrijedi (Slika 1):

1. veličina unutrašnjeg ugla je 135°,
2. broj dijagonala (kao i kod svakog osmougla) je jednak 20.



Slika 1: Pravilan osmougao sa dijagonalama.

Sada, rješavajući nekoliko zadataka, upoznat ćemo se sa nekim zanimljivim svojstvima pravilnog osmougla.

2. Površina pravilnog osmougla

Primjer 2.1. *Odrediti površinu pravilnog osmougla ako je duljina njegove stranice jednaka a.*

Rješenje: 1

Neka je zadan pravilni osmougao $ABCDEFGH$ (Slika 2). Nad stranicama AH i EF sa njegove unutrašnje strane konstruišimo kvadrate $AKLH$ i $EFLM$, pa spojimo tačke K i M sa tačkom C. Tako

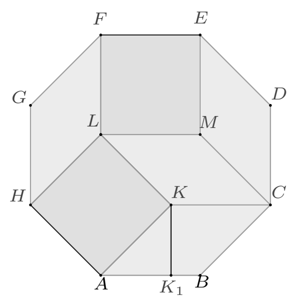
Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: maj 2019.
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

dobivamo dva podudarna kvadrata i četiri podudarna romba (duljina njihove stranice je a). S obzirom da je oštri (šiljasti) ugao romba 45°, na temelju Pitagorine teoreme, primjenjene na jednakokraki pravougli trougao KAK_1 (KK_1 je duljina visine romba), imamo

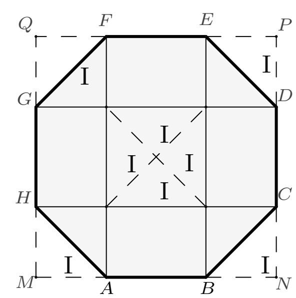
$$|AK_1|^2 + |KK_1|^2 = |AK|^2, \text{ tojest } 2|KK_1|^2 = a^2 .$$

Odavde je $KK_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ili $|KK_1| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (proširivanjem razlomka $\frac{a}{\sqrt{2}}$ sa $\sqrt{2}$). Površina pravilnog osmougla se dobije sabiranjem površina dobijena dva kvadrata i površina četiri romba, te je jednaka

$$P = 2a^2 + 4a\frac{a\sqrt{2}}{2} = 2a^2(1+\sqrt{2}) .$$



Slika 2:



Slika 3:

Rješenje: 2

Povucimo dijagonale $\overline{AF}$, $\overline{BE}$, $\overline{CH}$ i $\overline{DG}$, pa dopunimo pravilan osmougao $ABCDEFGH$ do kvadrata $MNPQ$ kao što je prikazano na Slici 3. Ta dopuna sadrži četiri jednakokraka pravougla trougla, a od takva četiri dijela sastoji se upravo centralni kvadrat osmougla (dobijen u presjeku povučenih dijagonala). Prema tome, površina pravilnog osmougla je jednaka razlici površina većeg i manjeg kvadrata. Kako je

$$|DP| = |PE| = |FQ| = |QG| = |HM| = |MA| = |BN| = |NC| = \frac{a\sqrt{2}}{2} ,$$

dužina stranice većeg kvadrata je $a + a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2})$, a dužina stranice manjeg kvadrata je a. Sada je površina data sa

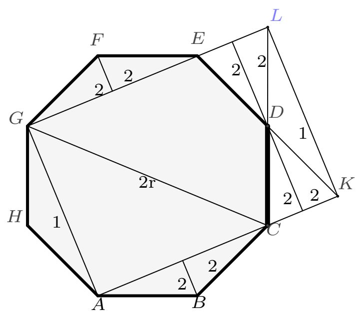
$$P = \left(a(1+\sqrt{2})\right)^2 - a^2 = a^2(3+2\sqrt{2}) - a^2 = 2a^2(1+\sqrt{2}) .$$

□

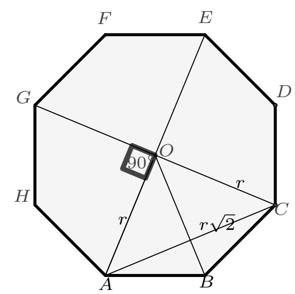
Primjer 2.2. *Odrediti površinu pravilnog osmougla kod koga je poluprečnik opisane kružnice jednak r.*

Rješenje: Neka je dat pravilan osmougao $ABCDEFGH$ čiji je poluprečnik opisane kružnice r. Produžimo dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{GE}$ do tačaka K i L, tako da je $|AK| = |GL| = 2r$ (Slika 4). Trougao ACG je jednakokrak i pravougli, sa hipotenuzom $|CG| = 2r$, pa je $|AC| = |AG| = r\sqrt{2}$. Jednakokraki trouglovi DKL i AGH (na Slici 4. obilježeni sa 1) su podudarni (pravilo SUS). Takođe, podudarni su i pravougli trouglovi na slici obilježeni sa 2 (pravilo SSU). To onda znači da je površina zadanog osmougla jednaka površini pravougaonika $AKLG$, čije su stranice $|AK| = 2r$ i $|AG| = r\sqrt{2}$. Dakle,

$$P = 2r \cdot r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r^2 .$$



Slika 4:



Slika 5:

Rješenje: 2

Pravilni osmougao $ABCDEFGH$ sastoji se od četiri podudarna deltoida $ABCO$, $CDEO$, $EFGO$ i $GHAO$, gdje je O centar opisane kružnice oko osmougla (Slika 5). Deltoid ima dijagonale dužine r i $r\sqrt{2}$, pa je površina jednog deltoida jednaka $\frac{r \cdot r\sqrt{2}}{2}$, a površina datog osmougla je onda

$$P = 4\frac{r \cdot r\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}r^2 \ .$$

□

Primjer 2.3. *Odrediti površinu pravilnog osmougla kod koga je poluprečnik upisane kružnice jednak h.*

Rješenje: Posmatrajmo jedan od karakterističnih trouglova pravilnog osmougla $ABCDEFGH$, $\triangle ABO$ (Slika 6). Visina $\overline{OO_1} = h$ predstavlja poluprečnik upisane kružnice zadanog osmougla. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle OAO_1$ imamo, $|OA|^2 = |AO_1|^2 + |OO_1|^2$, odnosno vrijedi

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \ . \tag{1}$$

Iz ranije dobijenih formula za površinu pravilnog osmougla u Zadatku 1. i Zadatku 2., to jest $P = 2a^2(1+\sqrt{2})$ i $P = 2\sqrt{2}r^2$, izražavanjem veličina a i r imamo,

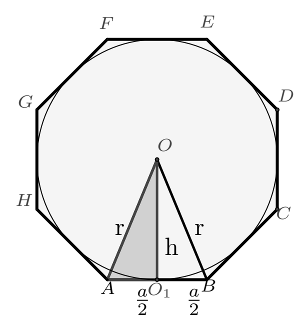
$$r^2 = \frac{P}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}P}{4} \quad \text{i} \quad a^2 = \frac{P}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}-1)P}{2} \ .$$

Koristeći jednakost (1) i gornje vrijednosti za r^2 i a^2 dobijamo

$$h^2 = \frac{\sqrt{2}P}{4} - \frac{P}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}-1)P}{8}$$
$$= \frac{P}{8}(\sqrt{2}+1) \ .$$

Iz posljednjeg imamo da je $P = \dfrac{8h^2}{\sqrt{2}+1} = 8h^2(\sqrt{2}-1)$.

□



Slika 6:

3. Neke konstrukcije u vezi sa pravilnim osmouglom

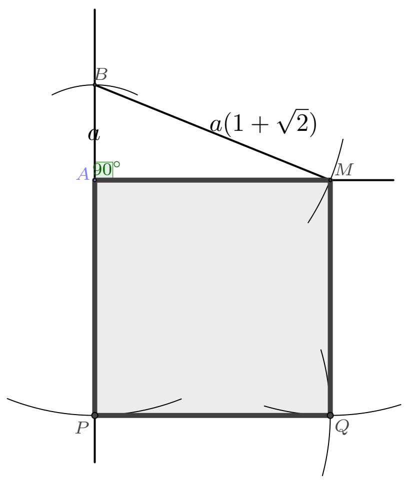
U drugom rješenju Zadatka 1. smo vidjeli kako se pravilni osmougao može "razrezati" na dijelove od kojih se može sastaviti figura koja se sastoji od većeg kvadrata iz koga je "izvađen" manji (centralni) kvadrat. U Prvom rješenju Zadatka 2. pravilni osmougao smo "pretvorili" u pravougaonik iste površine. Iskoristimo ove dvije konstrukcije za rješenje narednog zadatka.

Primjer 3.1. *Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka površini pravilnog osmougla stranice a.*

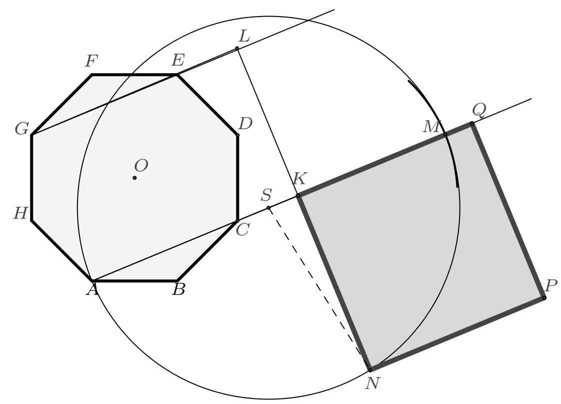
Rješenje: S obzirom da se površina pravilnog osmougla, koja ima vrijednost $P = 2a^2(1+\sqrt{2})$, može zapisati na sljedeći način,

$$P = \left(a(1+\sqrt{2})\right)^2 - a^2 \ ,$$

zaključujemo da je traženi kvadrat upravo kvadrat nad jednom katetom pravouglog trougla čija je hipotenuza $a(1+\sqrt{2})$, a druga kateta a. Dakle, zadatak se svodi na konstrukciju pravouglog trougla čije su jedna kateta i hipotenuza zadate veličine (Slika 7).



Slika 7:



Slika 8:

Rješenje: 2

Produžimo dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{GE}$ do tačaka K i L, tako da je $|AK| = |GL| = |CG| = 2r$. Time smo zadani osmougao pretvorili u pravougaonik $AKGL$ iste površine. Produžimo sada stranicu $\overline{AK}$ pravougaonika do tačke M, tako da je $|KM| = |KL|$. Odredimo središte S duži $\overline{AM}$ i opišimo kružnicu centra S i poluprečnika $|AS|$. Ta kružnica siječe produžetak duži $\overline{LK}$ u tački N. Kvadrat konstruisan nad duži $\overline{KN}$ je traženi kvadrat.

Dokaz da smo dobili upravo traženi kvadrat se bazira na primjeni Pitagorine teoreme na $\triangle KSN$. Naime, kako je $|AS| = |SN| = \dfrac{1}{2}(|AK| + |KL|)$ i $|SK| = \dfrac{1}{2}(|AK| - |KL|)$, zaključujemo da je $|KN|^2 = |AK| \cdot |KL|$ (površina kvadrata $KNPQ$ jednaka je površini pravougaonika $AKLG$). $\square$

4. Još o pravilnom osmouglu

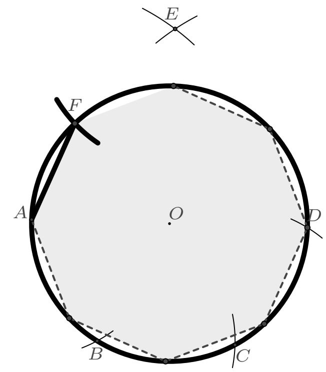
Iz Zadatka 2.1 znamo da je $P = 2a^2(1+\sqrt{2})$, a iz Zadatka 2.2 smo imali da je $P = 2\sqrt{2}r^2$, gdje su a i r respektivno stranica i poluprečnik opisane kružnice nekog pravilnog osmougla. Iz ovih dviju relacija možemo doći do odnosa veličina a i r. Naime, izjednačavanjem izraza za površinu pravilnog osmougla je $2a^2(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}r^2$, iz čega onda dobijamo da vrijedi

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \ ,$$

odnosno vrijedi,

$$a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} \ .$$

Ako je zadata kružnica $k(O, r)$ konstruisati pravilan osmougao kome je data kružnica opisana kružnica, koristeći se samo šestarom.
Na zadatoj kružnici odredimo tačke A, B, C i D tako da je $|AB| = |BC| = |CD| = |AO| = r$. Konstruišimo zatim jednakokraki trougao ADE, osnovice $\overline{AD}$ i kraka $|AE| = |AC|$.

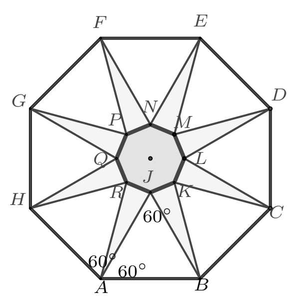


Slika 9:

Konstruišimo kružnicu $k_1(E, |OA|)$. Jedan od presjeka kružnice k_1 sa kružnicom k (onaj bliži tački A) označimo sa F. Sada su tačke A i F dva susjedna tjemena traženog pravilnog osmougla, a time je i stranica traženog osmougla određena sa $\overline{AF}$. Preostalih šest tjemena traženog osmougla dobijamo jednostavnim prenošenjem šestarom dobijene stranice, počev od tačke A.
Dakaz da je dobijena figura traženi pravilni osmougao zasniva se na primjeni Pitagorine teoreme, uzimajući u obzir da je $|AC| = \sqrt{3}r$ (stranica jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu poluprečnika r) i $|OE| = \sqrt{|AC|^2 - |AO|^2} = \sqrt{2}r$.

Lema 4.1. *Zadat je pravilan osmougao. Nad svakom stranicom osmougla konstruišimo jednakostraničan trougao tako da treće tjeme tih trouglova pripada unutrašnjosti osmougla. Dokazati da ta tjemena formiraju novi pravilan osmougao.*

Dokaz : Konstrukcijom osam jednakostraničnih trouglova unutar datog pravilnog osmougla, dobili smo takođe i osam jednakokrakih trouglova (naprimjer, $\triangle ARJ$, Slika 10) čije osnovice formiraju takođe osmougao kod koga su sve stranice jednake. Da bi pokazali da je novodobijeni osmougao ptavilan, treba pokazati da je njegov unutrašnji ugao jednak $135°$.



Slika 10:

Pomenuti jednakokraki trouglovi imaju ugao pri vrhu $135° - 2 \cdot 60° = 15°$. Zbog toga je zbir uglova na osnovici $180° - 15° = 165°$. Tada je unutrašnji ugao $\angle KJR = 360° - (60° + 165°) = 135°$, što je i trebalo pokazati. $\square$

5. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 5.1. *Tačke u kojima se sijeku po tri dijagonale pravilnog osmougla čine tjemena novog pravilnog osmougla. Dokazati!*

Zadatak 5.2. *Nad svakom stranicom pravilnog osmougla $ABCDEFGH$, sa spoljašnje strane, kostruišimo po jedan jednakostraničan trougao, $\triangle BAA_1$, $\triangle CBB_1$, $\triangle DCC_1$, $\triangle EDD_1$, $\triangle FEE_1$, $\triangle GFF_1$, $\triangle HGG_1$ i $\triangle AHH_1$. Dokazati da su tačke A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 i H_1 tjemena pravilnog osmougla.*

Zadatak 5.3. *Dat je pravilan osmougao. Nacrtajmo sve prave određene stranicama osmougla.*

1. *Tačke u kojima se sijeku prave kojima pripadaju stranice pravilnog osmougla čine tjemena novog pravilnog osmougla. Dokazati!*
2. *Odrediti odnos površina takvih osmouglova.*

Zadatak 5.4. *Ako je $|AB| = a$ i $|AD| = d$ u pravilnom osmouglu $ABCDEFGH$, dokazati da je $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 2$!*

Zadatak 5.5. *Dokazati da u pravilnom osmouglu vrijede sljedeće jednakosti:*

1. $h = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2})$.
2. $a = 2h(\sqrt{2} - 1)$.
3. $r = h\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.
4. $h = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Zadatak 5.6.
1. *Izračunati dužine dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ pravilnog osmougla $ABCDEFGH$, ako mu je stranica dužine a.*
2. *Da li vrijedi jednakost: $|AD|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$?*

Zadatak 5.7. *Dokazati da je površina kružnog prstena koga čine opisana i upisana kružnica pravilnog osmougla jednaka površini kruga prečnika a, gdje je a stranica tog osmougla.*

Zadatak 5.8. *Tjemena pravilnog osmougla $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8$ pripadaju stranicama kvadrata $ABCD$.*

1. *Ako je dužina stranice kvadrata jednaka a, izračunati stranicu i poveršinu osmougla.*
2. *Da li je tačna tvrdnja: Dijagonala kvadrata $ABCD$ jednaka je zbiru stranice tog kvadrata i stranice datog osmougla?*
3. *Konstruisati pravilan osmougao čija tjemena pripadaju stranicama datog kvadrata.*

Zadatak 5.9. *Zadana je prava p i tačka O izvan te prave. Konstruisati pravilan osmougao kome je tačka O centar, a jedna stranica pripada pravoj p.*

Literatura

[1] D. Milošević: *Površina pravilnega osemkotnika*, Presek (Ljubljana), VI,4 (1979/80), 224 - 225.
[2] M. Prvanović: *Osnovi geometrije*, Građevinska kniga, Beograd, 1987.
[3] R. Tošić: *O pravilnom dvanaestouglu*, Matematički list (Beograd), L, 3 (2015/16), 1 - 8.