

## O značaju diskriminante kvadratne jednačine pri rješavanju nelinearnih Diofantovih jednačina

Šefket Arslanagić<sup>a</sup>

<sup>a</sup>PMF, Sarajevo

**Sažetak:** Neke nelinearne Diofantove jednačine se mogu efikasno riješiti ako se mogu napisati u obliku kvadratne jednačine po jednoj od promjenljivih te koristiti njenu diskriminantu. U radu je ovaj metod rješavanja nelinearnih Diofantovih jednačina ilustriran nekim vrlo zanimljivim primjerima.

### 1. Uvod

Poznato je da se kvadratne jednačine obrađuju u drugom razredu srednje škole. Njihova uloga u daljem toku školovanja je vrlo značajna jer se primjenjuje u svim oblastima matematike. Zbog toga ćemo se prvo ukratko podsjetiti najvažnijih činjenica u vezi s kvadratnom jednačinom.

Kvadratna jednačina ima oblik

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad (1)$$

a izraz

$$D = b^2 - 4ac$$

se naziva *diskriminantom* kvadratne jednačine (1) i pri tome su njena rješenja data sa

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Što se tiče diskriminante  $D$ , mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

1.  $D > 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  i  $x_1 \neq x_2$ ;
2.  $D = 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  i  $x_1 = x_2$ ;
3.  $D < 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{C}$  - skup kompleksnih brojeva).

Dakle, kvadratna jednačina (1) ima realna rješenja ako je  $D \geq 0$ .

Ove osnovne činjenice o kvadratnoj jednačini svima su dobro poznate, a to nam dobro dođe pri njihovoj primjeni, kao što je slučaj s primjenom u rješavanju (nešto težih) *Diofantovih* jednačina, a što ćemo demonstrirati na nekoliko primjera u narednoj sekciji.

---

*Ciljna skupina:* srednja škola

*Ključne riječi:* Diofantova jednačina, kvadratna jednačina, diskriminanta

*Rad preuzet:* januar 2019.

*Kategorizacija:* Stručno-metodički rad

## 2. Primjena u rješavanju Diofantovih jednačina

**Primjer 2.1.** Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine:  $x^2 + y^2 + 3x + 1 = 0$ .

**Rješenje:** Datu jednačinu posmatrajmo kao kvadratnu jednačinu po  $x$ . Imamo

$$x^2 + 3x + (y^2 + 1) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}) \implies D = 9 - 4(y^2 + 1) = 5 - 4y^2.$$

Da bi jednačina imala realna rješenja, mora biti  $D \geq 0$ , tj.

$$5 - 4y^2 \geq 0 \implies y^2 \leq \frac{5}{4} \implies |y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \implies y \in \{-1, 0, 1\}.$$

1° Za  $y = -1$  je  $D = 1$ , odakle je  $x_1 = -2$  ili  $x_2 = -1$ , pa je  $(x, y) \in \{(-2, -1), (-1, -1)\}$ .

2° Za  $y = 0$  je  $D = \sqrt{5}$ , a ovaj slučaj otpada jer  $x \notin \mathbb{Z}$ .

3° Za  $y = 1$  je  $D = 1$ , dakle slijedi da je  $x_1 = -2$  ili  $x_2 = -1$ , pa je  $(x, y) \in \{(-2, 1), (-1, 1)\}$ .

Dakle, imamo sljedeća rješenja date jednačine

$$(x, y) \in \{(-2, -1), (-1, -1), (-2, 1), (-1, 1)\}.$$

□

**Primjer 2.2.** Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine:  $x^2 - xy + y^2 = x + y$ .

**Rješenje:** Napišimo datu jednačinu u obliku

$$x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

i posmatrajmo ju kao kvadratnu jednačinu po  $x$ .

Sada je

$$x_{1,2} = \frac{y + 1 \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2},$$

gdje je  $D = -3y^2 + 6y + 1$ . Prema uslovima zadatka mora biti  $D \geq 0$ , tj.

$$-3y^2 + 6y + 1 \geq 0 \implies y \in \left[ \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right],$$

a odavde, zbog  $y \in \mathbb{Z}$ , slijedi  $y \in \{0, 1, 2\}$ . Slično kao u prethodnom primjeru, nalazimo rješenja date jednačine

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$

□

**Primjer 2.3.** Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine:  $5x^2 + y^2 - 2xy - 8y + 20 = 0$ .

**Rješenje:** Datu jednačinu možemo pisati kao kvadratnu jednačinu po  $x$ :

$$5x^2 - 2yx + (y^2 - 8y + 20) = 0.$$

Ovdje je

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{-4y^2 + 40y - 100}}{5},$$

pa je

$$D = -4y^2 + 40y - 100 = -4(y^2 - 10y + 25) = -4(y - 5)^2 \geq 0 \implies y = 5.$$

Za  $y = 5$  dobijamo  $x = 1$  te imamo samo jedno traženo rješenje date jednačine:  $(x, y) = (1, 5)$ .

□

**Primjer 2.4.** Riješiti jednačinu

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

u skupu cijelih brojeva.

**Rješenje:** Datu jednačinu možemo posmatrati kao kvadratnu jednačinu po  $x$ :

$$x^2 + yx + y^2 - 1 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}),$$

za čiju diskriminantu vrijedi

$$D = -3y^2 + 4 \geq 0 \implies y^2 \leq \frac{4}{3} \implies -\frac{4}{3} \leq y \leq \frac{4}{3},$$

pa zbog zahtjeva  $y \in \mathbb{Z}$ , slijedi da je  $y \in \{-1, 0, 1\}$ . Razmotrimo svaki od tih slučajeva.

1° Za  $y = -1$  je  $x^2 - x = 0$ , odakle je  $x_1 = 0$  ili  $x_2 = 1$ , pa je  $(x, y) \in \{(0, -1), (1, -1)\}$ .

2° Za  $y = 0$  je  $x^2 - 1 = 0$ , odakle je  $x_1 = -1$  ili  $x_2 = 1$ , pa je  $(x, y) \in \{(-1, 0), (1, 0)\}$

3° Za  $y = 1$  je  $x^2 + x = 0$ , odakle je  $x_1 = 0$  ili  $x_2 = -1$ , pa je  $(x, y) \in \{(0, 1), (-1, 1)\}$ .

Dakle, imamo sljedeća rješenja:

$$(x, y) \in \{(0, -1), (1, -1), (-1, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 1)\}.$$

□

**Primjedba 2.5.** Preporučujemo da se riješe jednačine iz prethodnih primjera posmatrajući ih kao jednačine po drugoj promjenljivoj.

**Primjer 2.6.** Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$$

**Rješenje:** Na prvi pogled izgleda vrlo komplicirana jednačina. ali neće biti teško riješiti je ako ju posmatramo kao kvadratnu jednačinu po promjenljivoj  $x$ , tj.

$$8x^2 + 4(y^2 + y - 10)x + y^4 - 11y^2 - 8y + 52 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

Tada imamo

$$D = 16(y^2 + y - 10)^2 - 32(y^4 - 11y^2 - 8y + 52) = -16(y^2 - y - 2)^2 \leq 0.$$

Pošto mora biti  $D \geq 0$ , to u obzir dolazi samo  $D = 0$ , tj.  $y_1 = 2$  ili  $y_2 = -1$ . Zbog  $D = 0$  sada imamo

$$x_{1,2} = -\frac{y^2 + y - 10}{4},$$

a odatle

$$x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Dakle, imamo samo rješenje  $(x, y) = (1, 2)$ .

□

**Primjer 2.7.** Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine

$$y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0.$$

**Rješenje:** Opet na prvi pogled vrlo nezgodna jednačina. Međutim, ako je posmatramo kao kvadratnu jednačinu po promjenljivoj  $x$ , imamo

$$yx^2 + (y^2 - 36)x + y^2(y - 12) + 36y = 0,$$

čija je diskriminanta

$$\begin{aligned} D &= (y^2 - 36)^2 - 4y^2(y^2 - 12y + 36) = (y^2 - 36)^2 - [2y(y - 6)]^2 \\ &= [y^2 - 36 - 2y(y - 6)][y^2 - 36 + 2y(y - 6)] \\ &= -3(y - 6)^2(y^2 - 4y - 12). \end{aligned}$$

Pošto mora biti  $D \geq 0$ , to dobijamo

$$y^2 - 4y - 12 \leq 0 \implies (y - 6)(y + 2) \leq 0 \implies y \in [-2, 6].$$

Imamo sljedeće slučajeve:

$$1^\circ y = -2 \implies -2x^2 - 32x - 128 = 0 \implies x^2 + 16x + 64 = 0 \implies (x + 8)^2 = 0 \implies x = -8;$$

$$2^\circ y = -1 \implies D = 21 \cdot 7^2 = 3 \cdot 7^3 \text{ nije potpun kvadrat pa ovaj slučaj ne dolazi u obzir};$$

$$3^\circ y = 0 \implies -36x = 0 \implies x = 0;$$

$$4^\circ y = 1 \implies D = 3^2 \cdot 5^3 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir};$$

$$5^\circ y = 2 \implies D = 3 \cdot 4^4 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir};$$

$$6^\circ y = 3 \implies D = 3^4 \cdot 5 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir};$$

$$7^\circ y = 4 \implies 4x^2 - 20x + 16 = 0 \implies (x - 1)(x - 4) = 0 \implies x_1 = 1 \vee x_2 = 4;$$

$$8^\circ y = 5 \implies D = 21 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir};$$

$$9^\circ y = 6 \implies 6x^2 = 0 \implies x = 0.$$

Dakle, imamo sljedeća cjelobrojna rješenja date jednačine:

$$(x, y) \in \{(-8, -2), (0, 0), (0, 6), (1, 4), (4, 4)\}.$$

□

**Primjedba 2.8.** *S pravom možemo reći da se mnoge nelinearne Diofantove jednačine mogu efikasno riješiti ako se mogu napisati u obliku kvadratne jednačine po jednoj od promjenljivih te koristiti njenu diskriminantu  $D$ . Sigurni smo da bi se sve jednačine iz navedenih primjera znatno teže riješile na neki drugi način. Pokušajte!*

## Literatura

- [1] T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations*, Gil Publishing House, Zalau (Romania), 2002.
- [2] V. Andrić, *Diofantove jednačine (Priručnik za dodatnu nastavu matematike za osnovne i srednje škole)*, Krug, Beograd, 2006.
- [3] Š. Arslanagić, I. Glogić, *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1995.-2008.)*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
- [4] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heilderberg, 1997.
- [5] M. Stanić, N. Ikinović, *Teorija brojeva - Zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2004.