EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2019), 21–33

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe

Mehmed Nurkanović[a], Zehra Nurkanović[b]

[a] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se detaljnije razmatraju iracionalne jednadžbe i nejednadžbe, sa i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednadžbi i nejednadžbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Praksa pokazuje da su iracionalne jednadžbe i nejednadžbe možda i najkompliciranije od svih jednadžbi i nejednadžbi elementarne algebre. Naime, razlog za to je nepostojanje općeg postupka za njihovo rješavanje. Tako je moguće riješiti samo neke jednostavne tipove iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi, dok je bilo kakav pokušaj njihove klasifikacije prema načinu rješavanja relativno vrlo složen. U ovom radu bit će ipak napravljena osnovna klasifikacija ovih jednadžbi prema načinu rješavanja (s parnim ili neparnim korijenima) i date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednadžbama i nejednadžbama s i bez parametara. Treba istaknuti da se vrlo često ove jednadžbe i nejednadžbe pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola i obično veoma mali broj takmičara uspije da ih riješi. Poseban problem je ako se zahtijeva diskusija rješenja iracionalne jednadžbe ili nejednadžbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

2. Iracionalne jednadžbe

Definicija 2.1. *Jednadžba u kojoj se nepoznanica javlja i pod korijenom naziva se* ***iracionalnom*** *jednadžbom.*

Korijen se u tom slučaju uzima samo kao aritmetički.

Osnovni metod za rješavanje iracionalnih jednadžbi je metod eliminacije korijena. Taj metod se sastoji u tome da se jednadžba algebarskim transformacijama (prije svega stepenovanjem) svede na jednadžbu u kojoj se nepoznanice ne pojavljuju pod znakom korijena. Međutim, stepenovanje ne dovodi uvijek do ekvivalentne jednadžbe, već do jednadžbe koja je samo posljedica polazne.

Primjer 2.2. *a) Jednadžba* $\sqrt{x} = -1$ *nema rješenja (u skupu realnih brojeva), ali se nakon kvadriranja dobije* $x = 1$.

b) $\sqrt{x} = x - 2 \Longrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow (x = 1 \vee x = 4)$. *Provjerom ustanovimo da* $x = 1$ *nije rješenje polazne jednadžbe, već samo* $x = 4$.

Ciljna skupina: srednja škola
Rad preuzet: juni 2019.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad

a) *Iracionalne jednadžbe s neparnim korijenima*

Pri rješavanju ovakvih jednadžbi (da bismo se "oslobodili" korijena) koristimo se sljedećim teoremom.

Teorem 2.3. *Jednadžbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne za neparan broj n $(n \in \mathbb{N})$.

Kada se radi s iracionalnim jednadžbama s trećim korijenima ili korijenima višeg reda, postupak racionalizacije (tj. oslobađanja od korijena) obično dovodi do vrlo složenih jednadžbi. Zbog toga se one često rješavaju određenim smjenama ili nekim drugim 'trikovima'. Sljedeća dva primjera to dobro ilustriraju, ali i pokazuju da se procesom racionalizacije ne dobija uvijek niz ekvivalentnih jednadžbi.

Primjer 2.4. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x} = 3. \tag{1}$$

Rješenje: Definiciono područje je skup $\mathbb{R}$. Koristeći identitet

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab\,(a+b) + b^3, \tag{2}$$

nakon stepenovanja date jednadžbe s tri, dobijamo

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad 3 - x + 3\sqrt[3]{(3-x)(6+x)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x}\right)}_{\overset{(1)}{=}3} + 6 + x = 27 \\
&\iff \quad \sqrt[3]{(3-x)(6+x)} = 2 \iff (3-x)(6+x) = 8 \\
&\iff \quad x^2 + 3x - 10 = 0 \iff (x = 2 \vee x = -5)\,.
\end{aligned}$$

Budući da smo u prvom koraku izvršili zamjenu zbira dva kubna korijena brojem 3 (prema(1)), obavezno treba izvršiti provjeru dobijenih vrijednosti za x, tj. provjeriti da li zadovoljavaju polaznu jednadžbu. Ovdje je to zadovoljeno. □

Primjer 2.5. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}. \tag{3}$$

Rješenje: Analogno prethodnom primjeru, imamo

$$\begin{aligned}
(3) \quad &\iff \quad x + 1 + 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right)}_{\overset{(3)}{=}\sqrt[3]{x-1}} + 3x + 1 = x - 1 \\
&\implies \quad 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -3x - 3 \\
&\iff \quad \left(x^2 - 1\right)(3x+1) = -(x+1)^3 \\
&\iff \quad x^2(x+1) = 0 \iff (x = 0 \vee x = -1)\,.
\end{aligned}$$

Neposrednim uvrštavanjem ovih vrijednosti u datu jednadžbu zaključujemo da je samo $x = -1$ njeno rješenje. □

Postavlja se pitanje: u čemu se razlikuju ove dvije jednadžbe iz posljednja dva primjera, bolje rečeno u čemu je razlika u rješavanju tih jednadžbi kada je korišten isti metod? Odgovor je zasnovan na činjenici da smo u prvom slučaju opći izraz predstavljen lijevom stranom jednadžbe zamijenili brojem, a u drugom ponovo novim izrazom (uočite da je u drugom koraku ovog primjera stavljen znak '$\Longrightarrow$'a ne znak ekvivalencije $\Longleftrightarrow$", te nismo dobili niz ekvivalentnih jednadžbi).

b) *Iracionalne jednadžbe s parnim korijenima*

U slučaju iracionalne jednadžbe u kojoj se pojavljuju parni korijeni treba voditi računa o definicionom području te jednadžbe, to jest o skupu dopustivih vrijednosti nepoznanice za koje su nenegativne sve potkorjene veličine parnih korijena. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.6. *Za paran broj n jednadžbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne u oblasti u kojoj je

$$f(x) \geqslant 0 \quad i \quad g(x) \geqslant 0,$$

ili

$$f(x) < 0 \quad i \quad g(x) < 0.$$

Specijalno,

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Uočimo da izraz $f(x)$ pod korijenom treba da je nenegativan (tj. $f(x) \geqslant 0$). Međutim, to je automatski zadovoljeno, jer je

$$f(x) = g^2(x) \geqslant 0.$$

Primjer 2.7. *Riješiti jednadžbu* $x + 1 = \sqrt{x+7}$.

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x+7} \Longleftrightarrow \left((x+1)^2 = x+7 \wedge x+1 \geqslant 0\right) \\ &\Longleftrightarrow [(x = 2 \vee x = -3) \wedge x \geqslant -1] \Longleftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.8. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4.$$

Rješenje: $DP: (2x + 1 \geqslant 0 \wedge x - 3 \geqslant 0) \Longleftrightarrow x \geqslant 3$
Budući da je lijeva strana date nejednadžbe nenegativna, ona se smije kvadrirati, naravno za one vrijednosti nepoznanice koje zadoviljavaju DP. Dakle, data njednadžba je, uz uvjet DP, ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} 2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)} &= 16 \Longleftrightarrow 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 18-3x \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 18-3x \geqslant 0 \\ 4(2x+1)(x-3) = (18-3x)^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Prema tome, uzimajući u obzir definiciono područje, data nejednadžba je ekvivalentna sa

$$(x = 4 \vee x = 84 \wedge x \geqslant 3 \wedge x \leqslant 6) \Longleftrightarrow x = 4.$$

□

Već smo ranije napomenuli da se iracionalne jednadžbe s trećim, četvrtim itd. korijenima vrlo često rješavaju određenim smjenama. Sljedeći primjer nam pokazuje kako se u određenim situacijama dobro odabranim smjenama iracionalna jednadžba može efikasno riješiti.

Primjer 2.9. *Riješiti jednadžbu*

$$\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4.$$

Rješenje: DP: $x\in\left[-\frac{35}{2},\frac{47}{2}\right]$. Uvedimo smjene: $u=\sqrt[4]{47-2x}, v=\sqrt[4]{35+2x}$. Tako dobijamo sljedeći sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} u^4+v^4 &= 82, \\ u+v &= 4. \end{aligned}$$

Transformacijom lijeve strane prve jednadžbe, te uvođenjem smjene $t=uv$, dobijamo

$$\begin{aligned} u^4+v^4 &= \left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2 \\ &= (16-2t)^2-2t^2, \end{aligned}$$

odnosno dobijamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2-32t+87=0,$$

s rješenjima $t_1=3, t_2=29$.

Na taj način dobijamo sljedeća dva sistema jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{c} u+v=4, \\ uv=3, \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{c} u+v=4, \\ uv=29. \end{array}\right.$$

Rješenja prvog sistema su uređeni parovi $(1,3)$ i $(3,1)$, odakle slijedi $x_1=-17, x_2=23$. Drugi sistem nema realnih rješenja. Uočimo da oba rješenja pripadaju definicionom području date jednadžbe, tako da su to ujedno njena rješenja. □

b1) *Iracionalne jednadžbe s parametrima*

Istaknimo da su iracionalne jednadžbe s parametrima posebno komplicirane. Ilustrirat ćemo to sljedećim primjerima.

Primjer 2.10. *Diskutirati rješenje jednadžbe*

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x, \tag{4}$$

u ovisnosti o realnom parametru p.

Rješenje: DP: $x^2-p\geqslant 0\wedge x^2-1\geqslant 0$, pa razlikujemo sljedeće slučajeve

i) $p\leqslant 1\Longrightarrow DP:\ x\in\langle-\infty,-1]\cup[1,+\infty\rangle$,

ii) $p>1\Longrightarrow DP: x\in\left\langle-\infty,-\sqrt{p}\right]\cup\left[\sqrt{p},+\infty\right\rangle$

No, uočimo sljedeće: $L\geqslant 0\Longrightarrow D=x\geqslant 0$ (L označava lijevu stranu, a D desnu stranu date jednadžbe), pa zbog toga i zbog DP u obzir dolaze sljedeće vrijednosti za x :

$$p \leqslant 1\Longrightarrow x\in[1,+\infty\rangle, \tag{5}$$

$$p > 1\Longrightarrow x\in[\sqrt{p},+\infty\rangle. \tag{6}$$

Uz uvjete (5) ili (6) imamo:

$$\begin{aligned} (4) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2-p+4x^2-4+4\sqrt{\left(x^2-p\right)\left(x^2-1\right)}=x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4\sqrt{\left(x^2-p\right)\left(x^2-1\right)}=p+4-4x^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Desna strana posljednje jednadžbe (7) mora biti nenegativna, to jest mora biti

$$x^2 \leqslant \frac{p+4}{4}. \tag{8}$$

Uz uvjet (8) imamo

$$\begin{aligned}(7) \quad &\Longleftrightarrow \quad 16\left(x^2-p\right)\left(x^2-1\right) = p^2+8p+16-8(p+4)x^2+16x^4 \\ &\Longleftrightarrow \quad 8(2-p)x^2 = (p-4)^2 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)},\end{aligned}$$

odakle neposredno slijedi da mora biti $p < 2$. Provjerimo sada uvjet (8):

$$x^2 \leqslant \frac{p+4}{4} \Longleftrightarrow \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \leqslant \frac{p+4}{4} \Longleftrightarrow 3p^2-4p \leqslant 0 \Longleftrightarrow p \in \left[0, \frac{4}{3}\right].$$

Zbog toga preostaje provjeriti još samo uvjete (5) i (6) za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant p \leqslant 1 &\Longrightarrow \left(x^2 \geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geqslant 1 \Longleftrightarrow p^2 \geqslant 0\right), \\ p \in \left\langle 1, \frac{4}{3}\right] &\Longrightarrow \left(x^2 \geqslant p \Longleftrightarrow \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geqslant p \Longleftrightarrow (3p-4)^2 \geqslant 0\right),\end{aligned}$$

što je zadovoljeno u oba slučaja.

Rezultat: $x = \dfrac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$ za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$; za ostale vrijednosti paramatra p jednadžba nema rješenja. □

Primjer 2.11. *Diskutirati rješenje jednadžbe*

$$\sqrt{x-2} = x+a$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje: Jasno je da treba biti $x \geqslant 2$ i $x \geqslant -a$. Razlikujemo dva slučaja:

$$-a < 2, \text{ tj. } a > -2: \quad x \geqslant 2 \tag{9}$$

i

$$-a \geqslant 2, \text{ tj. } a \leqslant -2: \quad x \geqslant -a. \tag{10}$$

Uz te uvjete data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} x-2 &= x^2+2ax+a^2 \Longleftrightarrow x^2+(2a-1)x+a^2+2=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1-2a \pm \sqrt{-4a-7}\right).\end{aligned}$$

Odavde slijedi da data jednadžba nema rješenja kada je $-4a-7 < 0$, to jest kada je $a > -\frac{7}{4}$. U slučaju kada je $a = -\frac{7}{4}$, polazna jednadžba ima rješenje $x = \frac{9}{4}$, a za $a < -\frac{7}{4}$, imamo da je $x_{\pm} \in \mathbb{R}$. Treba vidjeti samo kada te vrijednosti zadovoljavaju uvjete (9) i (10).

i) Za $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$ imamo

$$x_+ \geqslant 2 \Longleftrightarrow \sqrt{-4a-7} \geqslant 3+2a,$$

što je za sve promatrane vrijednosti od a zadovoljeno (naime, $3+2a<0$, za sve $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$), pa je x_+ rješenje date jednadžbe. Također,

$$x_- \geqslant 2 \Longleftrightarrow -3-2a \geqslant \sqrt{-4a-7} \Longleftrightarrow (a+2)^2 \geqslant 0$$

$$(\text{jer je } -3a-2>0 \text{ za } \ a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle),$$

što je uvijek zadovoljeno, pa je i x_- rješenje.

ii) Za $a \in \langle -\infty, -2]$ imamo

$$x_+ \geqslant -a \Longleftrightarrow 1+\sqrt{-4a-7} \geqslant 0,$$

što je očito uvijek zadovoljeno, pa je x_+ rješenje date jednadžbe. Također,

$$x_- \geqslant -a \Longleftrightarrow 1 \geqslant \sqrt{-4a-7} \Longleftrightarrow a \geqslant -2.$$

Pošto je $a \leqslant -2$, to znači da je x_- rješenje samo za $a=-2$.

Rezime:

1° Za $a \in \langle -\infty, -2\rangle$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x_+ = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-7}}{2}$.

2° Za $a \in \left[-2, -\frac{7}{4} \right\rangle$ jednadžba ima dva rješenja $x_\pm = \frac{1}{2}\left(1-2a \pm \sqrt{-4a-7}\right)$.

3° Za $a = -\frac{7}{4}$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{9}{4}$.

4° Za $a \in \left\langle -\frac{7}{4}, +\infty \right\rangle$ jednadžba nema rješenja. □

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće jednadžbe:

1. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$.
2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.
3. $\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-37} = 6$.
4. $\sqrt[3]{4x^2+10x+4} + \sqrt[3]{2x^2-5x-3} = \sqrt[3]{2x+1}$.
5. $x - \sqrt[3]{x^2-x-1} = 1$.
6. $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}$.
7. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}$.

8. $x+\sqrt{1-15x}=3.$

9. *a)* $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=5,$ *b)* $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$

10. $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x+5}=\sqrt{x-7}.$

11. $\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{2(x^2+4x+6)}.$

12. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34.$

13. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$

14. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

15. $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

16. *a)* $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$ *b)* $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8.$

Diskutirati rješenja sljedećih jednadžbi u ovisnosti o parametru $a\in\mathbb{R}$:

17. $\sqrt{2-x}=-\dfrac{x}{2}+a.$

18. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

19. $\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}=a.$

20. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=x.$

3. Iracionalne nejednadžbe

Definicija 3.1. *Nejednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi i pod korijenom zove se* ***iracionalna*** *nejednadžba.*

Problematika rješavanja iracionalnih nejednadžbi slična je problematici rješavanja iracionalnih jednadžbi. Zbog toga su i metodi za njihovo rješavanje dosta slični, ali ima i bitnih razlika o kojima itekako valja voditi računa. Tu se prije svega misli na poteškoće koje se javljaju kao rezulltat množenja nejenadžbe negativnim brojem, što prouzrokuje promjenu smisla nejednakosti. Naročito je opasno izvoditi neoprezno i nekritički množenje nejednadžbe brojnim izrazom u kojem figurira nepoznanica. Zato se preporučuje da se to nikad i ne radi, osim u slučaju kada za brojni izraz znamo da je pozitivan ili negativan za sve dozvoljene vrijednosti nepoznanice. S druge strane, posebnu pažnju moramo posvetiti i kvadriranju date nejednadžbe u cilju oslobađanja od kvadratnog korijena. To se smije raditi samo u slučaju kada su i lijeva i desna strana nejednadžbe nenegativne. Da je kvadriranje nedozvoljeno u slučaju kad su obje strane nejednadžbe negativne pokazuje sljedeći primjer: ako tačnu nejednakost $-4<-2$ kvadriramo, dobit ćemo nejednakost $16<4$, koja je netačna. Slično će se dogoditi i u slučaju $-3<2$. S druge strane, nakon kvadriranje nejednakosti $-1<2$, dobit čn tačnu nejednakost. Dakle, ako je barem jedna strana nejednakosti negativna, nismo sigurni da li čn nakon kvadriranja dobiti tačnu nejednakost. Prema tome, treba strogo voditi računa o sljedećem pravilu:

$$(L<D\wedge L\geqslant 0\wedge D\geqslant 0)\Longleftrightarrow L^2<D^2. \tag{11}$$

Pri tome se nejednakost $<$ može zamijeniti bilo kojom od nejednakosti: $>,\geqslant$ ili $\leqslant$.

Ako se ne držimo ovog pravila, mogu nastupiti različite problematične situacije. Pokazuje nam to sljedeći jednostavni primjer.

Primjer 3.2. *Riješiti sljedeće nejednadžbe:*
a) $\sqrt{x} < 2$; *b)* $\sqrt{x} < -2$; *c)* $\sqrt{x} > 2$; *d)* $\sqrt{x} > -2$.

Rješenje: Uočimo da je definiciono područje svake od nejednadžbi $x \geqslant 0$.

a) Obje strane ove nejednadžbe su nenegativne, pa se može primijeniti gornje pravilo kvadriranja nejednadžbe, nakon čega dobijemo $x < 4$. Uzimajući u obzir definiciono područje, vidimo da mora biti $x \in [0, 4\rangle$ i to je traženi skup rješenja nejednadžbe.

b) Desna strana nejednadžbe je negativan broj, pa se ne smije kvadrirati. No, budući da je lijeva strana nejednadžbe nenegativna, jasno je da taj broj ne može biti manji od negativnog broja na desnoj strani. Dakle, u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja.

c) Kao i u slučaju *a)* smijemo kvadrirati nejednadžbu, nakon čega dobijemo $x > 4$. Upoređujući to s DP, dobijamo skup rješenja nejednadžbe $\langle 4, +\infty\rangle$.

d) Ni ovdje ne smijemo kvadrirati nejednadžbu, jer je desna strana negativna. Kako je, međutim, lijeva strana nenegativna, ona je uvijek veća od desne strane. Zato je skup rješenja skup svih vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju DP, tj. $x \in [0, +\infty\rangle$.

□

Vrlo je bitno promatrati sljedeća četiri tipa iracionalnih nejednadžbi:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[2n]{f(x)} > g(x), \quad \sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

Posljednja dva tipa su jednostavna, dok su prva dva kompliciranija i zato obratimo posebnu pažnju na njih.

U prvoj nejednadžbi je $DP : f(x) \geqslant 0$ i lijeva strana je nenegativna. Zbog navedenog pravila kvadriranja nejednakosti (11) i stroge nejednakosti desna strana nejednadžbe mora biti pozitivna, tj. $g(x) > 0$. Uz ta dva uvjeta, nakon stepenovanja sa $2n$, dobijamo $f(x) < [g(x)]^{2n}$. Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

Primjedba 3.3. *Naravno, u svim slučajevima treba uključiti i definiciona područja funkcija f i g, što u daljem tekstu nećemo posebno isticati, ali će se podrazumijevati.*

Teorem 3.4. *Nejednadžba*

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je sistemu nejednadžbi i to:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < [g(x)]^{2n} \\ f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Primjer 3.5. *Riješiti nejednadžbu* $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3$.

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 5x + 4} \quad < \quad x - 3 &\Longleftrightarrow \left[0 \leqslant x^2 - 5x + 4 < (x-3)^2 \wedge x - 3 > 0\right] \\ &\Longleftrightarrow \{x \in \langle -\infty, 1] \cup [4, +\infty\rangle \wedge x < 5 \wedge x > 3\} \\ &\Longleftrightarrow x \in [4, 5\rangle \,. \end{aligned}$$

□

I u drugoj nejednadžbi u (12) je $DP : f(x) \geqslant 0$ i lijeva strana je nenegativna. Ovdje su moguća dva slučaja: da je desna strana negativna ili da je nenegativna. Ako je $g(x) < 0$, tada je rješenje svako x iz DP. Dakle, u ovom slučaju skup rješenja R_1 nejednadžbe ima oblik

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0 \wedge g(x) < 0\} \,.$$

Ako je $g(x) \geqslant 0$, tada smijemo nejednadžbu spepenovati sa $2n$, jer su joj obje strane nenegativne, pa dobijamo $f(x) > [g(x)]^{2n}$. Uočimo da je uvjet DP u ovom slučaju automatski ispunjen, budući da je $f(x) > [g(x)]^{2n} \geqslant 0$, za sve realne vrijednosti nepoznanice x. Prema tome, u ovom slučaju skup rješenja R_2 nejednadžbe je predstavljen skupom

$$R_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > [g(x)]^{2n} \wedge g(x) \geqslant 0 \right\}.$$

Na taj način dobijamo skup rješenja R nejednadžbe kao $R = R_1 \cup R_2$, a što se može iskazati i sljedećim teoremom.

Teorem 3.6. *Za nejednadžbu oblika*

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

vrijedi

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) > [g(x)]^{2n} \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \right).$$

Primjer 3.7. *Riješiti nejednadžbu* $\sqrt{1-4x^2} \geqslant 1-3x$.

Rješenje: Koristeći prethodni teorem imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x^2} \quad &\geqslant \quad 1-3x \Longleftrightarrow \left(\begin{cases} 1-4x^2 \geqslant 0 \\ 1-3x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-4x^2 \geqslant (1-3x)^2 \\ 1-3x \geqslant 0 \end{cases} \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{6}{13} \\ x \leqslant \frac{1}{3} \end{cases} \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2} \vee 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \right) \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

□

Primjer 3.8. *Riješiti nejednadžbu*

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$$

Rješenje: DP: $\left(x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} \geqslant 0 \wedge x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geqslant 0 \right) \Longleftrightarrow x \in [-1, 0\rangle \cup [1, +\infty\rangle$.

Za ove vrijednosti nepoznanice x, desna strana nejednadžbe je nenegativna, pa rješenje nejednadžbe postoji ako je lijeva strana nejednadžbe pozitivna, tj. ako je

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \sqrt{1 - \frac{1}{x}},$$

što je zadovoljeno za $x > 1$. Uz taj uvjet datu nejednadžbu smijemo kvadrirati pa imamo

$$x - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} > \left(\frac{x-1}{x} \right)^2,$$

odnosno

$$x - \frac{2}{x} + 1 - 2\frac{x-1}{x}\sqrt{x+1} > 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Sada, množenjem sa x^2 i dijeljenjem sa $x-1$ (što je dozvoljeno za $x>1$) dobijamo

$$\left(x^2+x+1>2x\sqrt{x+1}\wedge x>1\right)\Longleftrightarrow\left[\left(x^2+x+1\right)^2>4x^2\left(x+1\right)\wedge x>1\right],$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned}
&\left[x^4+2x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^2>4x^2\left(x+1\right)\wedge x>1\right]\\
\Longleftrightarrow\quad&\left[x^4-2x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^2>0\wedge x>1\right]\\
\Longleftrightarrow\quad&\left[\left(x^2-x-1\right)^2>0\wedge x>1\right]\\
\Longleftrightarrow\quad&\left(x>1\wedge x\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Za posljednja dva tipa iracionalnih nejednadžbi iz (12), tj. za nejednadžbe s neparnim korijenima vrijede sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.9. *Nejednadžba oblika*

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x)\quad(n\in\mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x)<\left[g(x)\right]^{2n+1}\ .$$

Nejednadžba oblika

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x)\quad(n\in\mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x)>\left[g(x)\right]^{2n+1}\ .$$

I ovdje moramo istaknuti da su posebno komplicirane **iracionalne nejednadžbe s parametrima**. Ilustriraćemo to sljedećim primjerom.

Primjer 3.10. *Diskutiarti rješenje nejednadžbe*

$$2\sqrt{x+a}>x+1$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje: Prema Teoremu 3.6 imamo

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x+a}\quad>\quad x+1\;&\Longleftrightarrow\left(\left\{\begin{array}{l}x+a\geqslant 0\\ x+1<0\end{array}\right.\vee\left\{\begin{array}{l}4\left(x+a\right)>\left(x+1\right)^2\\ x+1\geqslant 0\end{array}\right.\right)\\
&\Longleftrightarrow\left(\left\{\begin{array}{l}x\geqslant -a\\ x<-1\end{array}\right.\vee\left\{\begin{array}{l}x^2-2x+1-4a<0\\ x\geqslant -1\end{array}\right.\right).
\end{aligned}$$

Primijetimo da u prvoj nejednadžbi drugog sistema vrijedi

$$x^2-2x+1-4a<0\quad\Longleftrightarrow\quad x\in\left\langle 1-2\sqrt{a},1+2\sqrt{a}\right\rangle\quad\text{za } a>0,$$

dok za $a \leqslant 0$ slijedi $x \in \emptyset$. No, također, za $a \leqslant 0$, ni prvi sistem nema rješenja (jer je $-1 < 0 \leqslant -a$). To znači da data nejednadžba nema rješenja za $a \leqslant 0$. Zbog toga preostaje da promatramo oba sistema u slučaju $a > 0$. Kako broj $-a$ može biti ili s lijeve ili s desne strane broja -1, imamo sljedeće slučajeve.

i) Za $0 < a \leqslant 1$, sistem nejednadžbi $x \geqslant -a \wedge x < -1$ nema rješenja, dok je

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geqslant -1 \end{array}\right\} \iff x \in \left\langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \right\rangle,$$

što i predstavlja skup rješenja R nejednadžbe za ove vrijednosti parametra a.

ii) Za $a > 1$ imamo

$$\begin{array}{ccc} (x \geqslant -a \ \wedge \ x < -1) & \iff & x \in [-a, -1\rangle, \\ & & \vee \\ \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geqslant -1 \end{array}\right\} & \iff & x \in \left[-1, 1 + 2\sqrt{a}\right\rangle. \end{array}$$

Dakle, skup rješenja nejednadžbe za $a > 1$ je:

$R = [-a, -1\rangle \cup [-1, 1 + 2\sqrt{a}\rangle = [-a, 1 + 2\sqrt{a}\rangle$.

Rezime:

1° Za $0 < a \leqslant 1$ rješenje nejednadžbe je $\langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a}\rangle$.
2° Za $a > 1$ rješenje nejednadžbe je $[-a, 1 + 2\sqrt{a}\rangle$.
3° Za $a \leqslant 0$ data nejednadžba nema rješenja.

□

Primjer 3.11. *Diskutirati rješenja nejednadžbe*

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} < \sqrt{2a+x}. \tag{13}$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje: DP: $a + x \geq 0, a + x \neq 0, 2a + x \geq 0$, odnosno $x > -a, x \geq -2a$.
Kako

$$\begin{array}{rcl} a & \geq & 0 \Longrightarrow -a \geq -2a, \\ a & < & 0 \Longrightarrow -a < -2a, \end{array}$$

to je

$$\text{DP: } \left\{\begin{array}{ccc} x \geq -2a & \text{za} & a < 0, \\ x \geq -a & \text{za} & a \geq 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Uzimajući u obzir da je $a + x > 0$ i

$$\sqrt{a^2} = |a| = \left\{\begin{array}{ccc} -a & \text{za} & a < 0, \\ 0 & \text{za} & a = 0, \\ a & \text{za} & a > 0, \end{array}\right.$$

imat ćemo da je

$$\sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \frac{|a|}{\sqrt{a+x}} = \left\{\begin{array}{ccc} -\frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za} & a < 0, \\ 0 & \text{za} & a = 0, \\ \frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za} & a > 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

Dakle, imamo tri kvalitativno različita slučaja.

1) Za $a < 0$, koristeći (15), nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x} + \frac{a}{\sqrt{a+x}} < \sqrt{2a+x}, \tag{16}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad a+x+a < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2a+x < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}.\end{aligned}$$

Sada, zbog $2a + x \geq 0$, smijemo kvadrirati obje strane posljednje nejednakosti, pa je

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2a+x)^2 < (a+x)(2a+x) \Longleftrightarrow (2a+x)^2 - (a+x)(2a+x) < 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (2a+x)(2a+x-a-x) < 0 \Longleftrightarrow (2a+x)\,a < 0 \overset{a<0}{\Longleftrightarrow} 2a+x > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x > -2a.\end{aligned}$$

Imajući na umu (14) zaključujemo da za $a < 0$ nejednadžba (13) ima rješenje $x > -2a$, odnosno

$$R_1 = \langle -2a, +\infty\rangle \quad \text{za } a < 0.$$

2) Za $a = 0$ vrijedi

$$(13) \Longleftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x} \Longleftrightarrow 1 < 1,$$

što nije tačno. Dakle, $R_2 = \emptyset$ za $a = 0$.

3) Za $a > 0$ nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x} - \frac{a}{\sqrt{a+x}} < \sqrt{2a+x}.$$

odnosno

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad a+x-a < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x} \\ &\Longleftrightarrow \quad x < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}. \qquad (17)\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost je sigurno tačna za $x \leq 0$, tj. za

$$x \in R_3 = \langle -\infty, 0] \cap DP = \langle -\infty, 0] \cap \langle -a, +\infty\rangle = \langle -a, 0]\,.$$

S druge strane, za $x > 0$, kvadriranjem (17) dobijamo da je

$$\begin{aligned}(16) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 < (a+x)(2a+x) \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 < a(2a+3x)\,,\end{aligned}$$

što je uvijek tačno za $a > 0$ i $x > 0$, tj. $x \in R_4 = \langle 0, +\infty\rangle$. Dakle, u slučaju $a > 0$ rješenje je

$$R_5 = R_3 \cup R_4 = \langle -a, 0] \cup \langle 0, +\infty\rangle = \langle -a, +\infty\rangle\,.$$

Rezime:

1° Za $a < 0$ rješenje date nejednadžbe je $\langle -2a, +\infty\rangle$.

2° Za $a = 0$ data nejednadžba nema rješenja.

3° Za $a > 0$ rješenje date nejednadžbe je $x \in \langle -a, +\infty\rangle\,.$

□

◦ ◦ ◦

Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće nejednadžbe:

1. a) $\sqrt{4x+10} < 2x+1$, b) $\sqrt{x+7} < x+1$.
2. a) $\sqrt{2x+1} > x-1$, b) $\sqrt{x-1} > x-3$.
3. a) $x > \sqrt{x^2-3x+2}$, b) $\sqrt{x^2-55x+250} < x-14$.
4. $\sqrt{x+1} < \sqrt{2x-4}$.
5. $\sqrt{x-6} + \sqrt{1-x} \leqslant \sqrt{2x-1}$.
6. $\sqrt{5x+4} + \sqrt{5x-4} > \sqrt{10x-6}$.
7. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} > 2$.
8. $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} - \sqrt{\dfrac{x-2}{x}} > \dfrac{1}{x}$.
9. $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$.
10. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1$.

Diskutirati rješenja sljedećih nejednadžbi u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$:

11. $\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{2ax-x^2} > a, \quad (a \in \mathbb{R})$.
12. $a\sqrt{x+1} < 1$.
13. $\sqrt{x-1} \geqslant a-x$.
14. $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} > a$.
15. $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}$.

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin, *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.

[2] V.T. Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[5] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar, *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.