EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2019), 34–40

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Dirihleov princip i njegove primjene

Dragoljub Milošević[a]

[a] *Republika Srbija*

Sažetak: Dana je formulacija najjednostavnijeg oblika Dirihleovog principa, a potom i formulacija njegovog poopćenja. Na pogodno odabranim primjerima je razmatrana primjena Dirihleovog principa namijenjena osnovcima, a nakon toga i primjena predviđena za srednjoškolce.U posljednjem dijelu ovog rada dane su dvije skupine zadataka predviđene za učenike: a) osnovne, b) srednje škole.

1. Uvod

Pri rješavanju problema razne vrste, osobito kod dokazivanja postojanja objekata koji imaju neku određenu karakteristiku, ne rijetko je uspješna primjena jednog od najpoznatijih kombinatornih principa, koji je znan pod različitim nazivima kao „princip kutija“, „princip golubarnika“, „problem zečeva i kaveza“, itd. Njemački matematičar francuskog porijekla P. G. L. Dirichlet (1805 – 1859) je prvi jasno formulisao i dao mu precizan matematički smisao. Radi toga se taj princip naziva - Dirihleov princip.

Najprije navodimo nekoliko formulacija najjednostavnijeg oblika Dirihleovog principa:

(1) ako je $n+1$ zečeva smješteno u n kaveza, onda se bar u jednom kavezu nalaze bar 2 zeca;

(2) ako je $n+1$ predmeta raspoređeno u n praznih kutija, onda postoji bar jedna kutija koja sadrži bar 2 predmeta;

(3) ako konačan skup S sa $n+1$ elemenata razdijelimo u najviše n disjunktnih podskupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$, $(m \leqslant n)$, onda postoji podskup S_k s najmanje 2 elementa;

(4) za bilo koje preslikavanje $f : A \to B$ konačnog skupa A sa $n+1$ elemenata u konačni skup B sa n elemenata postoje 2 elementa skupa A koji imaju istu sliku.

Dokaz samog principa je jednostavan, i svodi se na trivijalno zbrajanje zečeva (predmeta) u kavezima (kutijama). Naime, ako bi u svakom kavezu bio smješten najviše jedan zec, onda ukupan broj zečeva u kavezima ne bi bio veći od n.

Napomena 1: Uočimo da tvrdnja naročito vrijedi ako je broj zečeva, predmeta, odnosno elemenata skupa veći od $n+1$.

Dirihle je svoj princip upotrebljavao u teoriji brojeva. Međutim, Dirihleov princip je primjenljiv i u mnogim drugim oblastima matematike (algebra, geometrija, ...).

Iako je tvrdnja iskazana u Dirihleovom principu jedan od najjednostavnijih principa kombinatorike, ako se vješto upotrijebi može biti veoma efikasan. Vještina je da se u konkretnom zadatku izvrši raščlanjavanje i pravilno odabere šta će biti „zečevi“ („predmeti“), a šta „kavezi“ („kutije“). Zadaci u kojima se traži

Ciljna skupina: osnovna i srednja škola
Rad preuzet: maj 2019.
Kategorizacija: Stručni rad

dokaz egzistencije nekog objekta su često zadaci koji se mogu riješiti korištenjem Dirihleovog principa, pa su zadaci tipa „dokaži da postoji...“ prikladni za pokušaj primjene tog principa. Često se takvi zadaci umjesto Dirihleovim principom riješavaju tako što se pođe od hipoteze da tvrdnja ne vrijedi, pa se dođe do kontradikcije (na taj način se dokazuje i Dirihleov princip).

2. Dirihleov princip u osnovnoj školi

Na pogodno odabranim primjerima ukazat ćemo na primjenu Dirihleovog principa koja je namijenjena učenicima osnovne škole.

Primjer 2.1. *Možemo li utvrditi da u skupini od* 32 *učenika postoje bar dva učenika čija prezimena počinju istim slovom?*

Rješenje: Jednostavno se uočava da treba povezati učenike i slova abecede. Ovdje „zečeve“ predstavljaju učenici (ima ih 32), a „kaveze“- slova (ima ih 30). U najnepovoljnijem slučaju, prvih 30 učenika za početna slova svojih prezimena „zauzeli“ bi svih 30 slova, pa prezimena preostala 2 učenika moraju počinjati nekim od „zauzetih“ slova. Dakle, u toj skupini učenika sigurno postoje učenici (bar dva) čija prezimena počinju istim slovom. □

Primjer 2.2. *Koliko najmanje proizvoljno odabranih prirodnih brojeva treba da uzmemo da bi među njima postojala barem dva broja čija bi razlika bila djeljiva sa 5?*

Rješenje: Ako se neki prirodan broj podijeli sa 5, za ostatak se mora dobiti jedan od brojeva: 0, 1, 2, 3 ili 4. Radi toga, ako izaberemo pet prirodnih brojeva, u najnepovoljnijem slučaju imali bismo različite ostatke pri dijeljenju sa 5. Kažemo da je moguće da među njima ne može da se izabere par brojeva čija je razlika djeljiva sa 5. Prema tome, treba da se izabere najmanje 6 brojeva, zato što će taj šesti broj – na bazi Dirihleovog principa – imati isti ostatak kao neki od prethodno izabranih brojeva, pa će njihova razlika biti djeljiva sa 5. □

Napomena 2: Primjer 2 se može uopćiti. Kako?

Primjer 2.3. *U šumi raste 1 000 000 breza, a na svakoj ima ne više od 900 000 listova. Dokažimo da u šumi postoje dvije breze sa istim brojem listova.*

Rješenje: Pred nama je 1 000 000 „zečeva“ – breza i samo 900 001 kavez – kavezi su u ovom slučaju brojevi od 0 do 900 000. Svaki „zec“ – breza smješta se u kavez sa brojem koji je jednak broju listova na toj brezi. S obzirom na to da je „zečeva“ znatno više nego „kaveza“, u nekom „kavezu“ bit će dva „zeca“. Međutim, ako su dva „zeca“ u istom kavezu, onda oni imaju isti broj listova. □

Primjer 2.4. *Četiri prijatelja odlučila su jedne nedelje poći u 5 bioskopa (kina) svojega grada, u kojima predstave počinju u 9, 11, 13, 15, 17, 19 i 21 sat. Na svaku predstavu dva prijatelja išla su u jedan bioskop, druga dvojica u drugi bioskop. Kasno navečer pokazalo se da je svaki od njih bio u 5 bioskopa. Dokažimo da u svakom od 5 bioskopa bar na jednoj predstavi toga dana nije bio niko od prijatelja.*

Rješenje: Prijatelji su bili na ukupno $2 \cdot 7 = 14$ predstava. Da su u jednom bioskopu bili na svih 7 predstava, u ostala 4 bioskopa bili bi na ukupno 7 predstava, a to znači da bi bar u jednom bioskopu bila samo jedna grupa (Dirihle !). Neko od prijatelja ne bi bio u tome bioskopu ni na jednoj predstavi, što je suprotno činjenicama. Prema tome, polazna hipoteza je netačna. Ovim je dokaz okončan. □

Primjer 2.5. *U jednoj prodavnici se našlo petoro ljudi. Dokažimo da među njima postoje bar dvojica koji imaju isti broj poznanika među ostalim ljudima (svaki od njih među ostalom četvoricom).*

Rješenje: Promatrajmo pet soba i na njihovim vratima napišimo brojeve 0, 1, 2, 3, 4. Stavimo petoro ljudi iz prodavnice u te sobe i to tako da je broj na vratima sobe jednak broju poznanika čovjeka koji se nalazi u toj sobi. Moguća su dva slučaja: ili postoji čovjek koji ne poznaje nikoga od ostale četvorice, ili takav ne postoji. Ako takav čovjek postoji, onda u sobi 4 nema nikoga (inače bi se taj čovjek i onaj iz sobe 4 poznavali, jer bi posljednji imao četiri poznanika), U drugom slučaju, u sobi sa brojem 0 nema nikoga. Prema tome, u oba slučaja imamo istu situaciju: u četiri sobe je smješteno petoro ljudi pa, prema Dirihleovom principu, u jednoj od soba se nalaze dvije osobe. Njih dvije onda imaju isti broj poznanika (jednak broju sobe). □

Primjer 2.6. *Na list papira oblika pravougaonika $21\ cm \times 30\ cm$. Nespretnjaković je prolio tuš tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka $100\pi\ cm^2$. Dokažimo da postoje dvije tačke u čistom dijelu pravougaonika koje su simetrične u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika.*

Rješenje: Preslikajmo sve mrlje simetrično u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika. Površina zamrljanog dijela će se povećati, ali neće biti veća od $2 \cdot 100\pi\ \mathrm{cm}^2 < 628,32\ \mathrm{cm}^2$. Budući da je površina pravougaonika jednaka $630\ \mathrm{cm}^2$, to će uvijek ostati bar $1,68\ \mathrm{cm}^2$ čiste površine. Ona je simetrična u odnosu na promatranu osu simetrije, pa u njoj postoje dvije tačke koje su simetrične u odnosu na tu osu simetrije. □

U rješavanju nekih zadataka nam mnogo ne pomaže Dirihleov princip u navedenoj formulaciji. Zato ćemo primijeniti poopćeni Dirihleov princip, koji glasi: Ako je $nk + 1$ zečeva smješteno u n kaveza, onda je u nekom kavezu smješteno bar $k + 1$ zečeva. Ovaj uopćeni Dirihleov princip lahko dokazujemo, po analogiji sa dokazom „običnog“ (naprijed formulisanog) Dirihleovog principa.

Napomena 3: U većini netrivijalnih zadataka primjenjuje se upravo uopćeni Dirihleov princip. *Napomena 4:* Tvrdnja naročito vrijedi ako je broj zečeva veći od $nk + 1$.

Primjer 2.7. *U razredu ima 27 učenika. Dokaži da postoji mjesec u godini u kojem rođendan slave najmanje 3 učenika tog razreda.*

Rješenje: Ovdje imamo 27 „zečeva“ (učenici) i 12 „kaveza“ (mjeseci). Kako je $27 > 25 = 12 \cdot 2 + 1$, to na temelju uopćenog Dirihleovog principa direktno slijedi da postoji mjesec u kojem rođendan slave najmanje 3 učenika. Staviše uočavamo da se već u razredu sa 25 učenika mogu naći 3 učenika koji rođendan slave u istom mjesecu. □

Primjer 2.8. *Deset učenika riješili su ukupno 35 zadataka. Poznato je da među njima ima onih koji su riješili tačno jedan zadatak, onih koji su riješili tačno dva zadatka i onih koji su riješili tačno tri zadatka. Dokažimo da postoji učenik koji je riješio bar 5 zadataka.*

Rješenje: Uočimo jednog učenika koji je riješio tačno jedan zadatak, jednog koji je riješio tačno dva zadatka i jednog koji je riješio tačno tri zadatka. Zaključujemo da su preostalih 7 učenika ukupno riješili bar $35–(1 + 2 + 3) = 29$ zadataka. Kako je $29 = 4 \cdot 7 + 1$, postoji učenik koji je riješio bar 5 zadataka (Dirihle!). □

Primjer 2.9. *Na prozoru oblika kvadrata duljine stranice $2m$ nalazi se 51 komarac. Može li Zaim metlicom oblika kruga polumjera (radijusa) $\frac{1}{7}m$, jednim udarcem ubiti 3 komarca?*

Rješenje: Ovdje su „predmeti“ očito tačke, ima ih 51, a „kutije“ dijelovi kvadrata čiji broj tek treba odrediti. Kako je broj „kritičnih“ tačaka jednak $k + 1 = 3$ i da se broj 51 može prikazati kao $25 \cdot 2 + 1$, zaključujemo da je $k = 2$ i $n = 25$. To, pak, znači da zadani kvadrat (prozor) treba razdijeliti na 25 dijelova, podudarnih kvadratića duljine stranice $\frac{1}{5}m$ (Nacrtaj odgovarajući crtež !). Saglasno Dirihleovom principu bar u jednom od tih kvadratića nalaze se bar 3 tačke (komarca). Još nam preostaje da dokažemo da polumjer r_1 kruga opisanog oko tog kvadratića nije veći od $\frac{1}{7}m$. Dijagonala d_1 kvadratića stranice duljine $a_1 = \frac{1}{5}m$ je $d_1 = a_1\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{2}m$ (Pitagorina teorema!), a polumjer kruga opisanog oko kvadratića je $r_1 = \frac{1}{2}d_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}m = \sqrt{\frac{1}{50}}m < \sqrt{\frac{1}{49}}m = \frac{1}{7}m$. □

3. Dirihleov princip u srednjoj školi

Sada ćemo ukazati na nekoliko primjera primjene Dirihleovog principa namijenjenog učenicima srednje škole.

Primjer 3.1. *Na takmičenju (natjecanju) iz matematike svaki od 5 postavljenih zadataka boduje se sa 0, 1, 2, 3, 4 ili 5 poena. Koliko najmanje takmičara treba da sudjeluje na natjecanju da bi među njima postojala dva koji su na svakom zadatku osvojili jednak broj poena?*

Rješenje: Rezultat pojedinog učenika je niz a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, gdje je a_i broj poena koji je učenik osvojio na i-tom zadatku. Kako je a_i broj iz skupa $\{0,1,2,3,4,5\}$, to je broj različitih rezultata (po principu proizvoda) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$. Na temelju Dirihleovog principa, najmanji broj takmičara koji garantuje da postoji dva takmičara sa istim brojem poena na svakom zadatku je 7777. □

Primjer 3.2. *U državi Liliputanaca broj stanovnika ne premašuje 24 000 000, a u njoj postoji bar 7 000 naselja. Dokažimo da postoje dva naselja sa jednakim brojem stanovnika.*

Rješenje: Ako ne bi postojala dva naselja sa jednakim brojem stanovnika, broj stanovnika ne bi bio manji od $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 7000 = \frac{1}{2}(7000 \cdot 7001) = 24,5035 \cdot 10^6 > 24 \cdot 10^6$, što je kontradikcija. □

Primjer 3.3. *Dokažimo da se od 12 prirodnih brojeva mogu izabrati dva broja tako da je njihov zbir (zbroj) ili razlika (diferencija) djeljiva sa 20.*

Rješenje: Ukoliko među ovih 12 brojeva postoje dva koji daju iste ostatke pri dijeljenju sa 20, tvrdnja je dokazana (jer je razlika ta dva broja djeljiva sa 20). Pretpostavimo da svi brojevi daju različite ostatke pri dijeljenju sa 20. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da tih 12 brojeva pripada skupu $\{0, 1, 2, \dots, 19\}$. Podijelimo taj skup na skupove $\{1, 19\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 17\}$, $\{4, 16\}$, ... , $\{9, 11\}$, $\{0\}$ i $\{10\}$. Prema Dirihleovom principu, postoje dva broja od ovih 12 koji se nalaze u istom skupu. Zbir ta dva broja je 20, pa je ovim tvrdnja dokazana u cjelosti. □

Primjer 3.4. *Iz skupa $\{1, 2, \dots, 2n\}$ izabrano je $n + 1$ brojeva.Dokažimo da se među njima mogu naći 2 takva da:*

(a) jedan dijeli drugi,

(b) su uzajamno prosti,

(c) njihov zbir je $2n$ ili je izabran broj n.

Rješenje: (a) Svaki prirodni broj m se na jedinstven način može zapisati u obliku $m = 2^\alpha(2k - 1)$, gdje je $\alpha \geqslant 0$ i $k \geqslant 1$. Razdijelimo zadani skup na podskupove $A_1, A_3, A_5, \dots, A_{2n-1}$ tako da element m pripada skupu A_{2i-1} ako je $2i$–1 najveći neparni djelilac broja m. Od izabranih $n + 1$ brojeva, prema Dirihleovom principu bar 2 se moraju naći u istom podskupu A_{2k-1}. To su dva broja $2^\alpha(2k-1)$ i $2^\beta(2k-1)$. Ne gubeći općenitost, neka je $\beta \geqslant \alpha$. Tada očito $2^\beta(2k - 1)$ dijeli $2^\alpha(2k - 1)$ i tvrdnja je dokazana.

(b) Razdijelimo zadani skup na podskupove $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\cdots$, $\{2n-1, 2n\}$. Prema Dirihleovom principu od $n+1$ brojeva, bar 2 će biti iz istog podskupa, tj. bit će uzastopni brojevi. Dva uzastopna broja su uvijek uzajamno prosta, pa je i ovaj dio tvrdnje dokazan.

(c) Razdijelimo zadani skup na podskupove $\{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \cdots, \{n-1, n+1\}$ i $\{n, 2n\}$. Prema Dirihleovom principu od $n + 1$ brojeva, bar 2 će biti iz istog podskupa. Ukoliko je taj podskup $\{n, 2n\}$ broj n ispunjava uvjet zadatka. Ukoliko su iz nekog od preostalih podskupova, zbir ta dva broja je $2n$. Ovim smo dokazali tvrdnju. □

Primjer 3.5. *Dokažimo da se između bilo kojih 10 dvocifrenih brojeva mogu izabrati dve disjunktne podgrupe tako da je zbir elemenata u jednoj podgrupi jednak zbiru elemenata u drugoj podgrupi.*

Rješenje: Od zadanih 10 brojeva se može načiniti $2^{10}-1 = 1023$ nepraznih podskupova (nije teško dokazati). Najveći mogući zbir jednog podskupa je $90 + 91 + ... + 99 = 945$. Po Dirihleovom principu postoje bar dva podskupa koji imaju isti zbir. Ako ta dva podskupa nisu disjunktna, odbacimo im zajedničke elemente i dobit ćemo željene podskupove. $\square$

Primjer 3.6. *Ako je zadana tačka P na nekoj, naprimjer dijagonali A_iA_j konveksnog mnogougaonika $A_1A_2A_3 \dots A_{2n-1}A_{2n}$, onda prave A_iP i A_jP nemaju zajedničkih unutarnjih tačaka.*

Rješenje: Ako tačka P ne pripada niti jednoj dijagonali, promatrajmo dijagonalu A_1A_{n+1} koja zadani $2n$-tougaonik dijeli tako da se i sa jedne i sa druge strane uočene dijagonale nalazi po $n-1$ tjeme (vrh) $2n$-tougaonika (Nacrtaj odgovarajući crtež!). Neka je tačka P unutar mnogougla $A_1A_2 \dots A_{n+1}$. U tom slučaju prave $PA_{n+1}PA_{n+2} \dots PA_{2n}PA_1$ ne sijeku stranice $A_{n+1}A_{n+2} \dots A_{2n}A_1$, dakle n stranica, što znači da mogu sijeći najviše n preostalih stranica. Analogno prave $PA_2PA_3 \dots PA_n$, dakle $n-1$ prava, može sijeći najviše $n-1$ stranicu. Budući da imamo $2n$ stranica i najviše $n+n-1 = 2n-1$ presjeka, zaključujemo da postoji bar jedna stranica koju ne presijeca niti jedna prava. $\square$

Primjer 3.7. *U staklenoj kocki ivice 1 metar nalazi se 2019 muha. Dokažimo da postoji sfera radijusa $\frac{1}{11}$ m unutar koje se u svakom momentu, neovisno od rasporeda muha, nalaze barem 3 muhe.*

Rješenje: S obzirom da ima 2019 muha i 1000 kubnih decimetara, te kako je $2019 : 1000 = 2$ sa ostatkom 19, zaključujemo da postoji kubni decimetar unutar koga se nalaze bar $2 + 1 = 3$ muhe. Preostaje da se dokaže da se oko kubnog decimetra može opisati sfera radijusa $\frac{1}{11}\ m = \frac{10}{11}\ dm$. Dokaz slijedi direktno iz činjenice da je dijametar sfere ($2 \cdot \frac{10}{11}\ dm = 1,818 \dots\ dm$) veći od dijagonale kubnog decimetra ($\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\ dm = \sqrt{3}\ dm = 1,732 \dots\ dm$). $\square$

Primjer 3.8. *U dvije jednake kutije je smještenu ukupno 65 zelenih, crvenih, žutih i plavih loptica. Pored toga što su različitih boja, one se razlikuju i po veličini. Među pet izvučenih loptica iste boje iz jedne kutije, bar dvije su iste veličine. Dokažimo da postoje bar tri loptice koje se nalaze u istoj kutiji i koje su iste boje i veličine.*

Rješenje: Kako imamo 65 loptica, na osnovu Dirihleovog principa, u jednoj kutiji imamo sigurno 33 loptice. Nadalje, budući da loptice mogu biti zelene, crvene, žute ili plave, to znači da u kutiji koja ima 33 loptice bar 9 loptica mogu biti iste boje ($33 = 8+8+8+9$). Pošto su od pet loptica iste boje izvučenih iz iste kutije bar dvije iste veličine, zaključujemo da najviše mogu biti četiri različite veličine za istu boju ($5 = 1+1+1+2$). Prema tome, u kutiji u kojoj se nalazi 9 loptica iste boje, bar 3 su iste veličine ($9 = 2+2+2+3$). $\square$

Primjer 3.9. *Neka je A skup članova aritmetičkog niza (progresije) $1, 4, 7, ..., 100$. Dokažimo da, bez obzira na to kojih 19 brojeva izaberemo iz skupa A, postoji sigurno par brojeva čiji je zbir 104.*

Rješenje: Uređeni parovi brojeva koji pripadaju zadanom aritmetičkom nizu, a čiji je zbir 104 su: $(4, 100)$, $(7, 97)$, ..., $(49, 55)$. Dakle postoji 16 uređenih parova. Brojevi 1 i 52 su elementi skupa A, ali ne ulaze u sastav navedenih parova. Ne računajući ova dva broja, dakle od $19 - 2 = 17$ brojeva biramo dva. Sada na temelju Dirihleovog principa, od 17 brojeva koliko biramo, moramo izabrati dva broja koji pripadaju istom uređenom paru, odnosno čiji je zbir 104. $\square$

Iskažimo Dirihleov princip u drugačijoj formi: Ako je m kuglica raspoređeno u n kutija, tada bar jedna kutija sadrži bar $\left\lfloor \dfrac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ kuglica.

Napomena 5: Sa $\lfloor x \rfloor$ je obilježen cijeli dio realnog broja x, tj. najveći cio broj koji nije veći od broja x. Naprimjer, $\lfloor 3,28 \rfloor = 3$, $\lfloor -3,28 \rfloor = -4$. Lahko se uočava da je $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Dokaz: U slučaju da imamo tačno $n \cdot \left\lfloor \dfrac{m-1}{n} \right\rfloor$ kuglica, tada možemo kuglice rasporediti u n kutija tako da se u svakoj kutiji nađe po $\left\lfloor \dfrac{m-1}{n} \right\rfloor$ kuglica. Kako je $n \cdot \left\lfloor \dfrac{m-1}{n} \right\rfloor \leqslant n \cdot \dfrac{m-1}{n} = m-1 = m$ zaključujemo da u nekoj kutiji mora da se nađe više od $\left\lfloor \dfrac{m-1}{n} \right\rfloor$ kuglica. $\square$

Primjer 3.10. *Dokažimo da u grupi od 2600 osoba bar 8 osoba slavi rođendan istog dana.*

Rješenje: Najprije rasporedimo te osobe u „kutije“ po danu rođenja, tj. „kutije“ su dani u godini od 1. januara do 31. decembra (skupa 366 „kutija“, ako uključimo 29. februar). Na temelju Dirihleovog principa bar jedna „kutija“ sadrži bar $\left\lfloor \dfrac{2600-1}{366} \right\rfloor + 1 = 7 + 1 = 8$ „predmeta“, odnosno bar 8 osoba slavi rođendan istog dana. $\square$

4. Zadaci za vježbanje

Za osnovnu školu

1. Postoji li među 2020 proizvoljno odabranih prirodnih brojeva dva čija je razlika djeljiva sa 2019?
2. Dokaži da u školi sa 733 učenika najmanje 3 učenika imaju rođendan istog dana.
3. Imamo 55 sanduka jabuka od 3 sorte (u svakom sanduku su jabuke iste sorte). Da li među njima postoji 19 sanduka jabuka iste sorte?
4. U kvadrat stranice 8 cm na proizvoljan način je razmešteno 200 tačaka. Dokaži da se može konstruisati kvadrat površine kvadratnog centimetra unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane tačke.
5. Svaka od stranica i dijagonala šestougla obojena je crvenom ili zelenom bojom. Da li se proizvoljnim bojenjem uvijek može dobiti trougao čija su tjemena ujedno i tjemena šestougla i čije su sve stranice iste boje?
6. U jednakostraničnom trouglu ABC, stranice 3 cm, na slučajan način je raspoređeno 10 tačaka. Dokaži da pri svakom rasporedu tačaka postoje barem dvije tačke čije je rastojanje manje od 1 cm.
7. Na kružnici je označeno 16 tačaka koje su tjemena jednog pravilnog 20-ougla, među kojima je 9 plavih i 7 zelenih. Dokaži da su neke dvije plave tačke krajevi jednog prečnika.
8. Zaim je napisao na tabli niz od 100 prirodnih brojeva čiji je zbir 198. Da li u tom nizu postoji jedan ili više uzastopnih članova čiji je zbir 99?
9. Sto osoba sjedi za okruglim stolom, pri čemu su više od polovine muškarci. Dokaži da neka dva muškarca sjede: a) jedan pored drugog, b) jedan nasuprot drugoga.
10. Bela ravan je na proizvoljan način poprskana zelenom bojom. Dokaži da u toj ravni postoje dvije tačke iste boje čije je rastojanje 1 cm.
11. Unutar pravougaonika, čije su stranice 3 i 4, zadano je 6 tačaka. Dokaži da u toj skupini tačaka postoje dvije na rastojanju ne većem od $\sqrt{5}$.
12. U kvadrat stranice 1 na proizvoljan način je smještena 51 tačka. Dokaži da među tim tačkama postoje barem tri koje se mogu prekriti krugom radijusa $\frac{1}{7}$.
13. U kocki ivice 13 cm izabrano je 2019 tačaka. Može li se u tu kocku smjestiti jedna kocka ivice 1 cm, tako da unutar nje ne bude nijedna od izabranih tačaka?
14. U prodavnicu su dovezli 28 gajbi sa tri različite sorte krušaka (u svakoj gajbi su kruške iste sorte). Dokaži da se u nekih 10 gajbi nalaze kruške iste sorte.
15. U svako polje tablice 10×10 upisan je jedan cio broj. Razlika dva broja u susjednim poljima (poljima koja imaju zajedničku ivicu) nije veća od 5. Dokaži da se u tablici mogu naći dva jednaka broja.
16. Na kružnici s centrom O zadano je 15 tačaka koje su vrhovi jednog pravilnog 15-ougla. Nekih 6 tačaka je obojeno zeleno. Dokaži da postoje dvije zelene tačke A i B takve da je $\sphericalangle AOB = 120^\circ$.

Za srednju školu

1. Zadana su 52 proizvoljna prirodna broja. Dokaži da među njima postoje dva čiji zbir ili razlika je djeljiva sa 100. Vrijedi li ta tvrdnja za 51 broj?

2. Da li postoji prirodan broj koji počinje ciframa 9876543210, a djeljiv je sa 2019?

3. Dokaži da postoji prirodni broj n tako da se decimalni zapis broja 3^n završava sa 0001.

4. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji broj oblika $11\ldots100\ldots0$ koji je djeljiv sa n.

5. Dokaži da je između 100 proizvoljnih cijelih brojeva uvijek moguće izabrati 15 takvih da je razlika bilo koja dva od njih djeljiva sa 7.

6. Dokaži da među $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu izabrati tri takva broja da jedan od njih bude jednak zbiru ostala dva.

7. Zadano je n cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Dokaži da se može odabrati nekoliko od njih čiji je zbir kvadrata djeljiv sa n.

8. Čvorovi beskonačne kvadratne mreže obojeni su plavom i zelenom bojom. Dokaži da postoje dvije horizontalne i dvije vertikalne linije koje grade u kvadratnoj mreži pravougaonik čija su sva tjemena iste boje.

9. Dokaži da svaki konveksni 21-ougao ima dvije dijagonale koje zaklapaju ugao ne veći od 1°.

10. Unutar kvadrata duljine stranice 15 raspoređeno je 20 kvadrata duljine stranice 1. Dokaži da se unutar zadanog „velikog“ kvadrata može smjestiti krug radijusa 1, koji nema zajedničkih tačaka ni sa jednim od jediničnih kvadrata.

11. Na okruglom stolu radijusa 25 se nalazi manje od 144 okruglih novčića radijusa 1. Dokaži da se na sto može postaviti bar još jedan novčić , tako da on ne pokriva ni djelomično nijedan od prethodnih novčića.

12. Unutar kvadrata stranice duljine 1 cm nalazi se konveksni mnogougao sa 100 stranica. Dokaži da postoji trougao, čija su tjemena – tjemena zadanog mnogougla i čija je površina manja od $0,0008\ cm^2$.

13. Svaka od 9 pravih dijeli kvadrat na dva četverougla čije su površine u razmjeri $2:3$. Dokaži da postoje 3 od tih 9 pravih koje se sijeku u jednoj tački.

14. Soba ima oblik kocke duljine ivice (brida) 3 m. U njoj zuji 36 muha. Dokaži da se u svakom trenutku bar 6 muha može obuhvatiti sferom polumjera 9 dm.

15. Dokaži da ma kako smjestili 10 tačaka u krug dijametra 5 dm, među njima se mogu naći dvije na rastojanju manjem od 2 dm.

16. Dokaži da za svaki iracionalni broj x i svaki prirodni broj n postoji racionalni broj $\frac{p}{q}$, $(1 \leqslant q \leqslant n)$, tako da vrijedi nejednakost $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{nq}$.

Literatura

[1] Z. Kurnik: *Neke posebne metode rješavanja matematičkih problema*, (iz Biltena seminara iz matematike za nastavnike - mentore, str. 3 - 9), Hrvatsko matematičko društvo, 1991.

[2] B. Marinković, *Dirihleov princip, Arhimedes*, Beograd, 1985.

[3] P. Mladenović, *Kombinatorika* (5. izdanje), Društvo matematičara, Beograd, 2013.

[4] A.I. Orlov, *Princip Dirihle*, Kvant 7(1971), 17 – 21.

[5] R. Tošić, *Rešeni zadaci iz matematike - za mlade matematičare*, Naučna knjiga, Beograd, 1986.

[6] Časopisi *Matematičko- fizički list* (Zagreb) i *Tangenta* (Beograd), godište 2011/12 i nadalje.