Zabavna matematika

Zadatak 1. *Ponedjeljkom, utorkom i srijedom Bekir uvijek laže, a ostalim danima govori samo istinu. Utvrditi kojim danima u toku sedmice je Bekir mogao reći sljedeće tvrdnje.*

1. *Juče sam lagao.*
2. *Sutra ću lagati.*
3. *Lagao sam juče, a lagat ću i sutra.*
4. *Nazovi me za deset dana pa ću ti reći istinu.*

Zadatak 2. *Matematičari uvijek govore istinu, a fizičari uvijek lažu. Osobe F i G su matematičari.*
A izjavljuje da B tvrdi da je C uvjeren da D govori da E ostaje pri tome da F tvrdi da G nije matematičar. Ako je osoba A fizičar, koliko fizičara ima među pomenutim osobama?

Zadatak 3. *Za okruglim stolom sjedi $2n$ ljudi od kojih je n fizičara i n hemičara. Neki od njih uvijek govore istinu, a ostali uvijek lažu. Poznato je da je broj lažova među fizičarima jednak broju lažova među hemičarima. Na pitanje "Šta je vaš susjed sa desne strane?" - svi prisutni su odgovorili: "Hemičar.". Dokazati da je n paran broj!*

Zadatak 4. *Na ostrvu Logos svaki čovjek je ili lopov (onaj koji uvijek laže) ili vitez (onaj koji uvijek govori istinu). Svaki stanovnik tog ostrva izjavio je dvije iste rečenice:*

- *"Svi moji poznanici poznaju se međusobno."*
- *"Među mojim poznanicima ima lopova bar onoliko koliko ima vitezova."*

Pokazati da na ostrvu živi bar toliko vitezova koliko ima lopova.

Zadatak 5. *Osobe A, B i C osumnjičene su za pljačku banke. Osobe A i C su blizanci i toliko slični da ih niko ne može razlikovati. U policijskoj kartoteci nalaze se dosijei osumnjičenih, u kojima se nalaze podaci o njihovim karakterima, sklonostima i navikama. Poznato je da ni jedan od blizanaca ne ide u akciju bez bar jednog saučesnika. Osoba B uvijek ide u akciju sam. Pored toga policija ima saznanje da je u vrijeme pljačke jedan od blizanaca bio u restoranu Zlatnik, ali nije bilo moguće utvrditi koji od blizanaca.*
Pod pretpostavkom da niko drugi osim pomenute tri osobe nije mogao biti umješan u ovu pljačku, utvrditi ko je od njih kriv, a ko nevin.

Zadatak 6. *Za jedno nedjelo optužene su četiri osobe, A, B, C i D. Sud raspolaže sa sljedećim činjenicama:*

1. *Ako su A i B krivi, onda je C bio saučesnik.*
2. *Ako je A kriv, onda je bar jedan od optuženih B i C bio saučesnik.*
3. *Ako je C kriv, onda je D bio saučesnik.*
4. *Ako A nije kriv, onda je D kriv.*

Ko je od optuženih nepobitno kriv, a čija je krivica pod znakom pitanja.

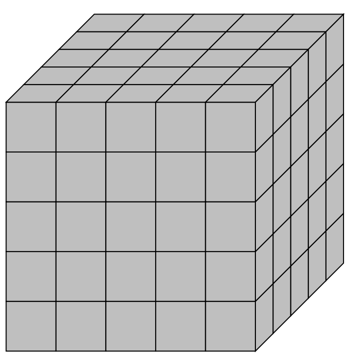
Ciljna skupina: svi uzrasti

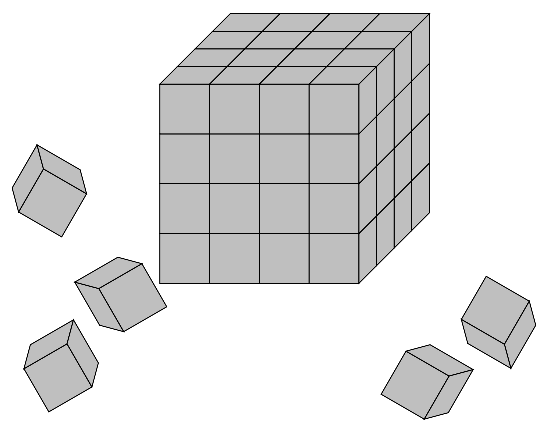
Nagradni zadatak: Problem sječenja

LASER (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) je optički izvor koji emituje fotone u uređenom mlazu. Laserska zraka je obično skoro jednobojna, to jest sadrži jednu valnu dužinu ili nijansu. Prvi upotrebljiv optički laser je napravio Theodore H. Maiman 1960 godine. U današnje vrijeme koriste se u raznim oblastima kao što su elektronika i komunikacije, u astronomiji, nauci, medicini, vojnoj industriji, saobraćajnoj sigurnosti. Jednu od primjena ima i u sječenju materijala, precizno rezanje bez strugotina uz maksimalnu uštedu materijala.

Zadatak 1. *Kocku stranice 5 cm siječemo laserom na manje dijelove. Manji dijelovi opet moraju biti kocke sa cjelobrojnom dužinom stranice (npr. kocka* $3 \times 3 \times 3$*). Kako je kocka stranice 5 cm, možemo naprimjer isjeći 125 malih kocki stranica 1 cm i to očigledno predstavlja najveći mogući broj novodobijenih dijelova. Kako isjeći datu kocku, a da dobijenih manjih kocki bude najmanji mogući broj? Taj broj je:*

1. *27*
2. *36*
3. *48*
4. *50*
5. *62*
6. *64*
7. *84*
8. *92*
9. *100*
10. *125* .





Za nagradni zadatak iz prethodnog broja EVOLVENTE nismo dobili niti jedno rješenje, tako da i taj zadatak još uvijek vrijedi kao nagradni.

Ciljna skupina: svi uzrasti
Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 15.04.2020. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno prigodnom nagradom

EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2019), 44–45

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 21 (*). *Neka je*

$$A \cup B = \{0,1,2,3,6,8\}\,,\ A \backslash B = \{2,6\}\ \ i\ B \backslash A = \{0,8\}\,.$$

Odrediti $A \cap B$.

Zadatak 22 (*). *Koliko brojeva sadrži niz:* $3, 8, 13, 18, ..., 118, 123$.

Zadatak 23. *Učenici koji na svojim majicama nose brojeve 1,2,3,4 osvojili su na krosu prva četiri mjesta. Odrediti redoslijed učenika na cilju ako se zna:*

a) brojevi mjesta koje su učenici osvojili na krosu ne poklapaju se s brojevima koje učenici nose na majicama;

b) učenik s brojem 3 na majici nije osvojio prvo mjesto;

c) broj na majici učenika koji je osvojio četvrto mjesto poklapa se s brojem mjesta koji je osvojio onaj učenik, čiji je broj na majici ujedno broj mjesta koji je osvojio učenik s brojem 2 na majici.

Zadatak 24. *Debljina jednog lista hartije iznosi jednu četvrtinu mm. Ako se taj list savije napola i tako se nastavi s presavijanjem prethodno dobivenog uvijek napola, kolika će biti debljina ako se izvrši 12 presavijanja?*

Zadatak 25. *Dati su razlomci* $\frac{35}{396}$ *i* $\frac{28}{297}$. *Naći najmanji broj takav da količnik tog broja sa svakim od datih razlomaka bude prirodan broj.*

Zadatak 26. *Visine trougla* ΔABC *sijeku se u tački* M. *Ako je* $|AM| = |BC|$, *izračunati veličinu unutarnjeg ugla trougla kod tjemena* A.

Zadatak 27. *Dat je kvadrat* $ABCD$ *čija je stranica dužine* 1. *Nad stranicom* AB *kao nad prečnikom konstruiran je polukrug. Iz tačke* D *povuč ena je tangenta na polukrug koja stranicu* BC *siječe u tački* E. *Odrediti obim i površinu trougla* ΔDCE.

Zadatak 28. *Broj a je kvadrat prirodnog broja. Dokazati da je a ili djeljiv s 4 ili pri dijeljenu s 8 daje ostatak 1.*

Zadatak 29. *9. Dokazati da za pozitivne brojeve* x *i* y *vrijedi nejednakost*

$$(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8xy.$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 30. *Izračunati:* $\sqrt{\underbrace{1111...11}_{200\ jedinica} - \underbrace{222...22}_{100\ dvojki}}$.

Ciljna skupina: Osnovna škola, srednja škola

Zadaci označeni sa **(*)** su primjereni za najmlađi uzrast (4. i 5. razred)

Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 28.02.2020. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

Srednja škola

Zadatak 21. *Ako su a, b i c pozitivni racionalni brojevi, dokazati da je broj*

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}\ ,$$

racionalan.

Zadatak 22. *Ako su a. b i c realni brojevi takvi da je $a>0$, $b>0$, $c>0$ i $abc=3$, dokazati da vrijedi*

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\geq 72\ .$$

Zadatak 23. *Neka je $\overline{CD}$ visina pravouglog trougla $\triangle ABC$. Neka su R i S središta upisanih kružnica u pravouglim trouglovima $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$. Ako prave CR i CS sijeku stranicu AB u tačkama P i Q, dokazati da je $|AC|=|AQ|$ i $|BC|=|BP|$.*

Zadatak 24. *Za koje vrijednosti promjenljivih izraz*

$$A=\frac{4x^2+28x+11}{9x^2-6xy+y^2+6x-2y+12}\ ,$$

ima najmanju vrijednost i odrediti tu vrijednost (A_{min}).

Zadatak 25. *Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo. Njihov proizvod je tačno deset puta veći od njihovog zbira. Postoje li još koji ovakvi parovi prirodnih brojeva? Ako postoje, odrediti ih.*

Zadatak 26. *Naći vrijednost parametra p za koga jednačina*

$$x^4-(3p+2)x^2+p^2=0\ ,$$

ima četiri realna rješenja koja obrazuju aritmetički niz.

Zadatak 27. *Riješiti jednačinu*

$$\log_{\sin x}4\cdot\log_{\sin^2 x}2=4\ .$$

Zadatak 28. *Na stranici AB trougla $\triangle ABC$ leži tačka M tako da je $|AM|=3|MB|$, a na stranici AC leži tačka N takva da je $2|AN|=|NC|$. Površina trougla $\triangle ABC$ je n. Izračunati površinu četvorougla $MBCN$.*

Zadatak 29. *Ako ya uglove trougla vrijedi jednakost*

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\ ,$$

tada je trougao jednakostraničan. Dokazati!

Zadatak 30. *Odrediti x-ti član geometrijskog niza čija su prva tri člana*

$$11-x^{\log x}\ ,\ x^{\log x}-5\ ,\ 35-x^{logx}\ .$$

Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 28.02.2020. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2019), 46–57

Rješenja konkursnih zadataka 11 – 20

Osnovna škola

Zadatak 11 (*). *U izrazu* $6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 7$ *zamijeniti* $*$ *sa* $+$ *ili* $-$ *tako da je lijeva strana jednakosti jednaka desnoj.*

Rješenje: Lahko se vidi da je jedno od mogućih rješenja je $6 - 5 + 4 + 3 - 2 + 1 = 7$. Suma brojeva ispred kojih stoji $-$ treba da bude 7. □

Delić Sumea, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 12 (*). *Nana je napravila pekmez od jabuka. Pekmez je upakovala u* 2 *tegle od* 2 *litra,* 3 *tegle od* 3 *litra,* 4 *tegle od* 4 *litra i* 5 *tegli od* 5 *litara. Ove tegle želi rasporediti na dvije police tako da na svakoj polici bude jednak broj tegli i da broj litara pekmeza na obje police bude jednak.*

Rješenje: Broj uptrijebljenih tegli je $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, a broj litara je

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54.$$

Dakle, treba na obje police postaviti po 7 tegli koje zajedno sadrže 27 litara. To možemo poredati ovako:
-prva polica: jedna tegla od $2l$, dvije tegle od $3l$, jednu teglu od $4l$ i tri tegle od 5 litara;
-druga polica: jednu teglu od $2l$, jednu teglu od $3l$, tri tegle od $4l$ i dvije tegle od 5 litara. □

Mešanović Nejra, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 13 (*). *Napišite* 7 *susjednih prirodnih brojeva za čije pisanje je potrebno upotrijebiti* 17 *cifara.*

Rješenje: Ako bi brojevi bili trocifreni, onda bi se za njihovo pisanje upotrijebile $7 \cdot 3 = 21$ cifre. Previše! Ako bi bili svi dvocifreni onda bi se upotrijebile 14 cifara. Premalo! Dakle, brojevi su dvocifreni i trocifreni. Ako uzmemo tri dvocifrena i četiri trocifrena onda bi upotrijebili $3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$. Previše. Ako uzmemo četiri dvocifrena i tri trocifrena broja onda ćemo za njihovo pisanje upotrijebiti $4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 8 + 9 = 17$ cifara. To smo i tražili. Dakle, traženi brojevi su: $96, 97, 98, 99, 100, 101$ i 102. □

Hankušić Abdulah, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 14. *Pet dječaka Muharem, Predrag, Rasim, Samir i Vejsil stoje u vrsti. Poznato je da:*

- *Predrag i Vejsil ne stoje jedan do drugog,*
- *Milorad i Predrag ne stoje jedan do drugog,*
- *Rasim i Milorad ne stoje jedan do drugog,*
- *Samir i Milorad ne stoje jedan do drugog,*
- *Vejsil i Samir ne stoje jedan do drugog,*
- *Predrag stoji desno u odnosu na Milorada.*

U kom poredku stoje dječaci?

Ciljna skupina: Osnovna škola, Srednja škola

Rješenje: Prema navedenim podacima do Milorada ne stoje: Predrag, Rasim i Samir. To znači da Milorad ima samo jednog susjeda i to Vejsila. Zbog toga se Milorad nalazi na početku ili na kraju reda. Iz posljednjeg uslova slijedi da je Milorad prvi (računajući slijeva). Do njega je Vejsil. Do Vejsila nisu Predrag i Samir. Dakle, desno od Vejsila je Rasim. Na preostala dva mjesta nalaze se Predrag i Samir. Kako nemamo nikakvih podataka o njihovom redosljedu, to imamo dva moguća rasporeda i to: Milorad, Vejsil, Rasim, Predrag i Samir ili Milorad, Vejsil, Rasim, Samir i Predrag. □

Selimović Ena, 7r, OŠ "Hasan Kikić" Gračanica

Zadatak 15. *Pokažite da se od brojeva* $1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10$ *može sastaviti* 5 *razlomaka (treba upotrijebiti svih deset brojeva) tako da je suma ovih* 5 *razlomaka cio broj.*

Rješenje:

$$\frac{9}{1} + \frac{7}{2} + \frac{6}{3} + \frac{8}{4} + \frac{5}{10} = 17.$$

□

Osmanhodžić Medina, 7r, OŠ "Hasan Kikić" Gračanica

Zadatak 16. *Na svakoj strani kocke napisan je tačno po jedan od sljedećih brojeva:* $8, 9, 10, 12, 13, 19$. *Pri prvom bacanju kocke zbir brojeva na četiri bočne strane je bio* 43, *a pri drugom bacanju kocke zbir je bio* 40. *Odredite koji je broj napisan na stranici kocke koji je suprotan broju* 19.

Rješenje: Zbir brojeva napisan na stranama kocke je

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 63.$$

Pri prvom bacanju kocke zbir brojeva na bočnim stranama je bio 43, pa je zbir brojeva na preostale dvije stranice bio $63 - 43 = 20$. Pri drugom bacanju zbir brojeva na preostale dvije stranice je bio $63 - 40 = 23$. Tako smo odredili zbirove brojeve koji su napisani na dva para naspramnih stranica. Odredimo zbir brojeva napisanih na trećem paru naspramnih stranica. Kako je zbir brojeva na sva tri para naspramnih stranica 63, to je zbir brojeva na preostalon paru stranica $63 - 23 - 20 = 20$. Vidimo da dva para naspramnih stranica imaju iste zbirove 20, a preostali par ima zbir 23. Broj 20 jedino možemo dobiti na sljedeća dva načina: $8 + 12$ i $9 + 11$. Dakle, naspram broja 8 je napisan broj 12, a naspram broja 9 je napisan broj 11. Preostala dva broja 10 i 13 su napisana jedan naspram drugog. □

Husanović Dalila, 7r, OŠ "Hasan Kikić" Gračanica

Zadatak 17. *U dvije posude raspoređeno je* 60 *klikera, tako da je u prvu posudu stavljeno* 35, *a u drugu posudu* 25. *Dvojica igrača, Haso i Huso, naizmjenično odabiraju jednu posudu i iz nje uzimaju koliko žele klikera. Pobjeđuje onaj igrač nakon čijeg poteza su obje posude prazne. Koji igrač podjeđuje pri pravilnoj igri? Odgovor obrazložiti.*

Rješenje: Pri pravilnoj igri prvi igrač pobjeđuje. Naime, on u svakom svom potezu treba uočiti posudu u kojoj ima više klikera i da iz nje uzme onoliko klikera kako je potrebno da u obje zdjele bude jednak broj klikera. Dakle, u prvom potezu iz prve posude uzima 10 klikera i nakon toga u obje posude će biti po 25. Drugi igrač može samo iz jedne odabrane uzeti koliko želi klikera. Tada prvi igrač, u svom drugom potezu, uzima onoliko klikera koliko je uzeo prvi, ali iz druge posude i tako dovodi do jednakosti broja klikera u obje posude. □

Zadatak 18. *Na stranici* BC *trougla* $\triangle ABC$ *izabrana je tačka* F. *Duž* $\overline{AF}$ *siječe težišnu liniju* BD *u tački* E *tako da je* $|AE| = |BC|$. *Dokazati da je* $|BF| = |FE|$.

Rješenje: Težišnu duž $\overline{BD}$ produžimo preko D do tačke G tako da vrijedi $|DG| = |BD|$. Kako je $|AD| = |DC|$, to četverougao $ABCG$ ima osobinu da njegove dijagonale imaju zajedničko središte, pa je taj četverougao paralelogram. Tada je $AG \parallel BC$ i $|AG| = |BC|$. Kako je $|AE| = |BC|$, to je $|AG| = |AE|$. To znači da je trougao $\triangle AEG$ jednakokraki. Tada je $m(\measuredangle AEG) = m(\measuredangle AGD)$. Uglovi $\measuredangle AEG$ i $\measuredangle BEF$ su unakrsni, pa su podudarni.

Dakle, $m(\measuredangle AEG) = m(\measuredangle BEF)$ i $m(\measuredangle AGE) = m(\measuredangle BEF)$. Iz paralelnosti duži AG i BC slijedi podudarnost odgovarajućih naizmjeničnih uglova. Tako imamo $m(\measuredangle AGE) = m(\measuredangle EBF)$ i tako smo dokazali $m(\measuredangle BEF) = m(\measuredangle EBF)$. To znači da je trougao $\triangle BEF$ jednakokraki sa kracima BF i EF.

Zbog toga je $|BF| = |FE|$. □

Zadatak 19. *Dokazati da se svaki trougao može razrezati na tri mnogougla od kojih je jedan tupougli trougao, a da se pritom od ova tri mnogougla može složiti pravougaonik.*

Rješenje: Primijetimo prvo da je površina trougla jednaka polovini proizvoda dužine njegove jedne stranice i visine na tu stranicu. Tako, naprimjer, ako je AB jedna stranica i CD visina, onda je $P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|$. Zbog toga ćemo pokušati trougao razrezati na tri mnogougla, od kojih je jedan tupougli trougao i koji pri novom aranžiranju daju pravougaonik sa stranicama $\frac{1}{2}|AB|$ i $|CD|$.

Neka je trougao $\triangle ABC$ raznostranični i neka je npr. $|AB| > |BC| > |CA|$. Kako naspram veće stranice trougla leži veći ugao, to je ugao $\measuredangle ACB$ najveći ugao trougla $\triangle ABC$. Iz tjemena najvećeg unutrašnjeg ugla trougla, to jest iz tjemena C, povucimo visinu CD. Kako je $|AC| < |BC|$, to je $|DC| > |AD|$. Zbog toga na duži $\overline{DB}$ postoji tačka E takva da je $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$. Konstruišimo tačku F tako da je četverougao $CDEF$ paralelogram. Kako je $CD \perp DE$, to je taj paralelogram pravougaonik. Ovaj pravougaonik ima istu površinu kao i dati trougao. Dovoljno je dokazati da se on može razrezati na tri mnogougla od kojih je jedan tupougli trougao. Neka je G tačka duži $\overline{CF}$ takva da je $|GF| = |AD|$. Kako je $|FE| = |CD|$, jer je $BDEF$ pravougaonik i $m(\measuredangle EFG) = m(\measuredangle CDA) = 90^0$, to je $\Delta EFG \cong \Delta CDA$. Nadalje, imamo

$$|CG| = |CF| - |FG| = |DE| - |AD| \ .$$

S druge stane je $|AB| = |AD| + |DE| + |EB|$.

Kako je $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$, to je $|DE| = |AD| + |EB|$. Sada imamo

$$|CG| = |DE| - |AD| = (|AD| + |EB|) - |AD| = |EB| \ .$$

Dakle, $|EB| = |CG|$. Neka je H tačka presjeka duži BC i EG. Kao je $CG \parallel EB$, to je $m(\measuredangle HEB) = m(\measuredangle CGH)$ i $m(\measuredangle EBH) = m(\measuredangle GCH)$, jer su naizmjenični ugovi. Tada je $\Delta EBH \cong \Delta CGH$. Posmatrajmo tri mnogougla: ADC, $DEHC$ i EBH. Trougao $\triangle EBH$ je tupougli trougao. Stavljanjem trougla $\triangle ADC$ na mjesto trougla $\triangle GFE$, i trougla $\triangle ECH$ na mjesto trougla $\triangle GCH$ dobijamo pravougaonik $DEFC$.

Neka je sada trougao ABC jednakokrak i $|CA| = |CB|$. Visina na osnovicu jednakokrakog trougla je i simetrala osnovice i simetrala ugla između krakova. Neka je CD visina. Tada je $\Delta ADC \cong \Delta BDC$. Konstruišimo tačku E (kao na slici) tako da je $\Delta ACE \cong \Delta CBD$. Tada je četverougao $ADCE$ pravougaonik. Na ovaj način smo razrezali trougao $\triangle ABC$ na dva dijela i od njih napravili pravougaonik. No, od nas se traži da razrežemo trougao na tri dijela od kojih će jedan biti tupougli trougao. Da bi se to postiglo uzmimo F na AC i G na BD tako da je trougao $\triangle CFG$ tupougli. Sada mnogouglovii: $ADGF$, GCF i DCB novim grupisanjem daju pravougaonik. □

Zadatak 20. *Koliko se četverocifrenih brojeva sa različitim ciframa može obrazovati od cifara:* $0, 1, 2, 4, 5, 7$ *tako da su djeljivi sa* 4?

Rješenje: Četverocifreni broj $\overline{abcd}$ je djeljiv sa 4 ako i samo ako je broj $\overline{cd}$ djeljiv sa 4. Od cifara $0, 1, 2, 4, 5, 7$ mogu se formirati sljedeći "dvocifreni" brojevi sa različitim ciframa koji su djeljivi sa 4: $04, 12, 20, 24, 40, 52$ i 72. Dakle,

$$\overline{cd} \in \{04, 12, 20, 24, 40, 52, 72\} \ .$$

Odredimo sada odgovarajuće brojeve $\overline{ab}$. Za dvocifreni završetak 04 za cifru a imamo 4 mogućnosti, a za cifru b imamo tri mogućnosti. Dakle, u ovom slučaju imamo $4 \cdot 3 = 12$ mogućnosti.

Za dvocifreni završetak 12 za cifru a imamo samo tri mogućnosti: $4, 5$ i 7. Za cifru b imamo kandidate: 0 i dvije od cifara $4, 5$ i 7. Dakle, za drugu cifru imamo 3 mogućnosti, pa brojeva $\overline{ab12}$ imamo $3 \cdot 3 = 9$ mogućnosti.

Za dvocifreni završetak 20 imamo 12 mogućnosti za $\overline{ab}$.

Za dvocifreni završetak 24 imamo 9 mogućnosti za $\overline{ab}$.

Za dvocifreni završetak 40 imamo 12 mogućnosti za $\overline{ab}$.

Za dvocifreni završetak 52 imamo 9 mogućnosti za $\overline{ab}$.

Za dvocifreni završetak 72 imamo 9 mogućnosti za $\overline{ab}$.

Dakle, traženih četverocifrenih brojeva ima

$$12 + 9 + 12 + 9 + 12 + 9 + 9 = 72\ .$$

$\square$

Aljić Lejla, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Srednja škola

Zadatak 11. *Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^{2019} + x^{2018} + x^{19} + x^{18} + 1$, *polinomom* $g(x) = x^2 - 1$.

Rješenje: Ako je $f(x) : g(x) = n(x)$ sa ostatkom $r(x)$, tada je

$$f(x) = g(x) \cdot n(x) + r(x) \ .$$

Stepen polinoma $r(x)$ mora biti manji od stepena polinoma $g(x)$, pa polinom $r(x)$ zapisujemo kao $r(x) = ax + b$. Dalje, $g(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Ako je $g(x) = 0$ za neko x, tada je $f(x) = r(x)$. Imamo da je $g(x) = 0$ za $x = 1$ i $x = -1$, pa razmatrajmo dva slučaja:
1. $x = 1$
Tada je $f(1) = r(1)$, a to nam daje

$$1^{2019} + 1^{2018} + 1^{19} + 1^{18} + 1 = a \cdot 1 + b \implies a + b = 5 \ .$$

1. $x = -1$
Tada je $f(-1) = r(-1)$, a to nam opet daje

$$(-1)^{2019} + (-1)^{2018} + (-1)^{19} + (-1)^{18} + 1 = a \cdot (-1) + b \implies -a + b = 1 \ .$$

Dobili smo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ -a + b &= 1 \ , \end{aligned}$$

a njegovim rješavanjem dobijamo da je $a = 2$ i $b = 3$. Tada je ostatak dijeljenja zadatih polinoma dat sa $r(x) = 2x + 3$.

□

Kanita Rakovac, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 12. *U skupu* $\mathbb{Z}$ *riješiti jednačinu* $x^2 - y^2 = 2018$.

Rješenje: 1.

$$x^2 - y^2 = 2018 \iff (x-y)(x+y) = 2018 \ .$$

1: Ako je $x - y = 1$, onda je $x + y = 2018$. Sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = 1 + 2018 \implies 2x = 2019 \ .$$

Ovo je nemoguće jer je $2x$ paran broj, a 2019 je neparan broj.

2: Ako je $x - y = 2$, onda je $x + y = 1009$. Opet sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = 2 + 1009 \implies 2x = 1011 \ .$$

Slično kao gore zaključujemo da je i ovo nemoguća situacija.

3: Ako je $x - y = -1$, onda je $x + y = -2018$. Opet sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = -1 + (-2018) \implies 2x = -2019 \ .$$

Slično kao prethodno zaključujemo da je i ovo nemoguća situacija.

4: Ako je $x - y = -2$, onda je $x + y = -1009$. Opet sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = -2 + (-1009) \implies 2x = -1011 \ .$$

Slično kao prethodno zaključujemo da je i ovo nemoguća situacija.

Dakle, zadata jednačina nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje: 2.

$2018 \equiv 2 (mod\ 3)$, to jest dijeleći 2018 sa 3 dobijamo ostatak 2. Ako i lijevu stranu jednačine dijelimo sa 3 imamo sljedeće rasuđivanje,
x^2 može dati ostatak 0 ili 1 u dijeljenju sa 3, a isto tako i y^2. Dakle, $x^2 - y^2$ u dijeljenju sa 3 može dati ostatak ili 0 ili 1, a kako desna strana ima ostatak 2 u dijeljenju sa 3, zaključujemo da polazna jednačina nema rješenja. □

Eman Suljendić, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 13. *Odrediti interval za x u kome je funkcija*

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x + 34 - 12\sqrt{x-2}} \ ,$$

konstantna.

Rješenje: Uvedimo smjenu $t = \sqrt{x-2}$, $t \geq 0$. Tada je $t^2 = x - 2$, odnosno $x = t^2 + 2$. Uvrstimo ovo u polaznu funkciju,

$$\begin{aligned} y &= t + \sqrt{t^2 + 2 + 34 - 12t} \\ &= t + \sqrt{t^2 - 12t + 36} \\ &= t + \sqrt{(t-6)^2} \\ &= t + |t-6| \end{aligned}$$

Razmatrajmo sada dva slučaja:

1. $t \in [0, 6]$. Tada je

$$y = t - (t-6) = t - t + 6 = 6 = const \ .$$

Kako je $0 \leq t \leq 6$ onda imamo da je $0 \leq \sqrt{x-2} \leq 6$. Dakle, $0 \leq x - 2 \leq 36$, to jest $2 \leq x \leq 38$.

2. $t \in (6, +\infty)$. Tada je

$$y = t + (t-6) = t + t - 6 = 2t - 6 \ .$$

Dakle, na ovom intervalu funkcija nije konstantna.

Zaključujemo da je $y = 6 = const$ za $x \in [2, 38]$. □

Zerina Ahmetović, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 14. *Odrediti sumu datog izraza:*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 \quad , \quad x \neq \pm 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Rješenje: Označimo sa S sumu koju trebamo naći. Tada imamo,

$$\begin{aligned}
S &= x^2+2+\frac{1}{x^2}+x^4+2+\frac{1}{x^4}+\cdots+x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\\
&= (x^2+x^4+\cdots+x^{2n})+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots+\frac{1}{x^{2n}}\right)+2n\\
&= \frac{x^2((x^2)^n-1)}{x^2-1}+\frac{\frac{1}{x^2}\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{x^2}-1}+2n\\
&= \frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1}+\frac{\frac{1}{x^2}\frac{1-x^{2n}}{x^{2n}}}{\frac{1-x^2}{x^2}}+2n\\
&= \frac{x^{4n+2}-x^{2n+2}+x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}+2n\\
&= \frac{(x^{2n}-1)(x^{2n+2}+1)}{x^{2n}(x^2-1)}+2n
\end{aligned}$$

□

Zadatak 15. *Riješiti jednačinu:*

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}\ .$$

Rješenje: D.P. $x \geq 0$, $x+\sqrt{x} \neq 0$, $x-\sqrt{x} \geq 0$. Ovi uslovi nam daju da mora biti $x \in [1,+\infty)$.
Polazna jednačina je ekvivalentna sa

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}=\sqrt{x-\sqrt{x}}\ .$$

Kvadriranjem gornje jednačine, dobijamo

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-2\frac{3}{2}\sqrt{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\frac{9}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}\right)^2=\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)^2\ .$$

Sređujući gornju jednakost imamo

$$x+\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\frac{9}{4}\frac{x}{x+\sqrt{x}}=x-\sqrt{x}\ ,$$

odnosno

$$\frac{9x}{4(x+\sqrt{x})}-\sqrt{x}=0\ .$$

Množimo posljednju jednakost sa $4(x+\sqrt{x}) \neq 0$, te dobijamo jednakost

$$9x-4x\sqrt{x}-4x=0\ ,$$

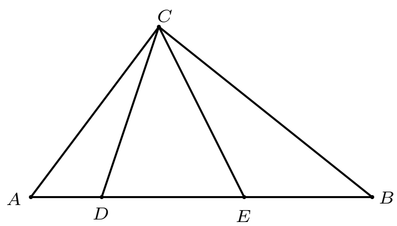
to jest $5x=4x\sqrt{x}$. Dijeleći ovu jednakost sa $x \neq 0$ imamo, $5=4\sqrt{x}$, a nakon kvadriranja je $25=16x$. Iz ovoga dobijamo vrijednost za x, to jest $x=\dfrac{25}{16}$, a kako ovaj x pripada oblasti definisanosti, zaključujemo da je to rješenje jednačine. □

Aida Mazalović, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 16. *Na hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke D i E takve da je $|AE| = |AC|$ i $|BD| = |BC|$. Izračunati $\angle DCE$.*

Rješenje: Trouglovi $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$ su jednakokraki, pa vrijedi $\angle ACE = \angle CEA$ i $\angle DCB = \angle CDB$. Označimo $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle CBA$. Iz trougla $\triangle ABC$ imamo $\alpha+\beta+90° = 180°$, a to nam daje $\alpha+\beta = 90°$. Stavimo $\gamma = \angle ACE = \angle CEA$. Iz trougla $\triangle ACE$ imamo

$$2\gamma + \alpha = 180° \implies 2\gamma = 180° - \alpha \implies \gamma = 90° - \frac{\alpha}{2} \ .$$



Označimo $\delta = \angle DCB = \angle CDB$, pa iz trougla $\triangle BCD$ imamo

$$2\delta + \beta = 180° \implies 2\delta = 180° - \beta \implies \delta = 90° - \frac{\beta}{2} \ .$$

Sada traženi ugao nalazimo iz trougla $\triangle CDE$.

$$\angle DCE = 180° - \gamma - \delta = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha+\beta}{2} = 45° \ .$$

Dakle, $\angle DCE = 45°$. □

Marinela Mitić, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 17. *Ako je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ i $a_i > -\frac{1}{4}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tada je*

$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \cdots + \sqrt{4a_n+1} < n+2 \ .$$

Dokazati!

Rješenje: Trasformišimo polazni uslov $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, množeći ga sa 4.

$$4a_1 + 4a_2 + \cdots + 4a_n = 4 \ .$$

Uvećajmo i lijevu i desnu stranu ove jednakosti za $2n$ (svakom izrazu $4a_i$ dodajmo 2),

$$4a_1 + 2 + 4a_2 + 2 + \cdots + 4a_n + 2 = 4 + 2n \ .$$

Posljednju jednakost zapišimo malo drugačije,

$$((4a_1+1)+1) + ((4a_2+1)+1) + \cdots + ((4a_n+1)+1) = 2n+4 \ ,$$

podjelimo ovu jednakost sa 2 imamo

$$\frac{(4a_1+1)+1}{2} + \frac{(4a_2+1)+1}{2} + \cdots + \frac{(4a_n+1)+1}{2} = n+2 \ . \qquad (1)$$

Koristeći AG nejednakost vrijedi,

$$\begin{aligned}
\frac{(4a_1+1)+1}{2} &> \sqrt{(4a_1+1)\cdot 1}\ , \\
\frac{(4a_2+1)+1}{2} &> \sqrt{(4a_2+1)\cdot 1}\ , \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{(4a_n+1)+1}{2} &> \sqrt{(4a_n+1)\cdot 1}\ ,
\end{aligned}$$

U gornjem korištenju AG nejednakosti uzimamo strogu nejednaksot jer je $a_i > \frac{1}{4}$ za sve $i = 1, 2, ..., n$. Sada sabirajući ove nejednakosti dobijamo,

$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \cdots + \sqrt{4a_n+1} < \frac{(4a_1+1)+1}{2} + \frac{(4a_2+1)+1}{2} + \cdots + \frac{(4a_n+1)+1}{2}\ .$$

Koristeći jednakost (1), konačno zaključujemo

$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \cdots + \sqrt{4a_n+1} < n+2\ ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Amina Jahić, 2r, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 18. *Ako je* $\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$*, gdje su* a *i* b *istog predznaka,* $a \neq 0$ *i* $b \neq 0$*, dokazati da je*

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}\ .$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{1}{a+b}\ /\cdot b &\Longrightarrow \frac{b}{a}\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{b}{a+b} \\
&\Longrightarrow \frac{b}{a}\sin^4\alpha + (1-\sin^2\alpha)^2 = \frac{b}{a+b} \\
&\Longrightarrow \frac{b}{a}\sin^4\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha - \frac{b}{a+b} = 0 \\
&\Longrightarrow \left(\frac{b}{a}+1\right)\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + \frac{a+b-b}{a+b} = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{a+b}{a}\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + \frac{a}{a+b} = 0\ .
\end{aligned}$$

Posljednju jednačinu rješavamo kao kvadratnu jednačinu po $\sin^2\alpha$.

$$\sin^2\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\frac{a}{a+b}\frac{a+b}{a}}}{2\frac{a+b}{a}} = \frac{2\pm 0}{2\frac{a+b}{a}} = \frac{a}{a+b}\ .$$

Tada je,

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}\ .$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3} &= \frac{(\sin^2\alpha)^4}{a^3}+\frac{(\cos^4\alpha)^4}{b^3} = \frac{\frac{a^4}{(a+b)^4}}{a^3}+\frac{\frac{b^4}{(a+b)^4}}{b^3} \\
&= \frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4} = \frac{a+b}{(a+b)^4} \\
&= \frac{1}{(a+b)^3}\ .
\end{aligned}
$$

□

Amina Fazlić, 3r, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 19. *Tačke P i R su redom središta stranica AB i CD konveksnog četverougla $ABCD$. Duži $\overline{BR}$ i $\overline{CP}$ se sijeku u tački Q, a duži $\overline{AR}$ i $\overline{PD}$ u tački S. Dokazati da je*

$$P_{\square PQRS} = P_{\triangle ASD} + P_{\triangle BQC}\ .$$

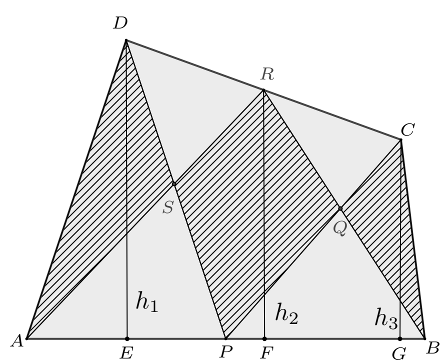
Rješenje: Četverougao $CDEG$ je trapez. pa je RF srednja linija tog trapeza i vrijedi $|RF| = \frac{1}{2}(|CG|+|DE|)$. Označimo redom $DE = h_1$, $RF = h_2$ i $CG = h_3$. Tada je $h_2 = \frac{1}{2}(h_1+h_3)$.

$$
\begin{aligned}
P_{\triangle ABR} &= \frac{1}{2}|AB|\cdot h_2 = \frac{1}{2}|AB|\frac{1}{2}(h_1+h_3) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|AB|\cdot h_1 + \frac{1}{2}|AB|\cdot h_3\right) \\
&= P_{\triangle APD} + P_{\triangle PBC}\ .
\end{aligned}
$$

Sada imamo,

$$
\begin{aligned}
P_{\square PQRS} &= P_{\triangle ABR} - P_{\triangle APS} - P_{\triangle PBQ} \\
&= P_{\triangle APD} + P_{\triangle PBC} - P_{\triangle APS} - P_{\triangle PBQ} \\
&= (P_{\triangle APD} - P_{\triangle APS}) + (P_{\triangle PBC} - P_{\triangle PBQ}) \\
&= P_{\triangle ASD} + P_{\triangle BQC}\ ,
\end{aligned}
$$

što je i trebalo pokazati.



Slika 1: Konveksni četverougao

□

Zadatak 20. *Uglovi trougla čine aritmetički niz. Izračunati ih ako je zbir njihovih sinusa jednak* $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje: Neka su α, β i γ uglovi trougla koji čine aritmetički niz. Dakle, za ove uglove vrijedi $\beta-\alpha=\gamma-\beta$. Ovo znači da je $2\beta=\alpha+\gamma$, to jest $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$. Kako je $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, tada imamo

$$\begin{aligned}\alpha+\frac{\alpha+\gamma}{2}+\gamma=180^\circ &\Longrightarrow 2\alpha+\alpha+\gamma+2\gamma=360^\circ\\ &\Longrightarrow 3\alpha+3\gamma=360^\circ\\ &\Longrightarrow \alpha+\gamma=120^\circ\ .\end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $\beta=60^\circ$.

Po uslovu zadatka je

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\ .$$

Primjenjujući adicionu formulu na prvi i treći sabirak i koristeći da je $\beta=60^\circ$, sada imamo,

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}+\sin 60^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{2} &\Longrightarrow 2\sin\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\ &\Longrightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Longrightarrow \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Longrightarrow \frac{\alpha-\gamma}{2}=30^\circ\\ &\Longrightarrow \alpha-\gamma=60^\circ\ .\end{aligned}$$

Sada imamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma&=120^\circ\\ \alpha-\gamma&=60^\circ\ ,\end{aligned}$$

čije je rješenje $\alpha=90^\circ$, $\gamma=30^\circ$, a od ranije znamo $\beta=60^\circ$. □

Muhibija Kavazović, 3r, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Rješavatelji zadataka 11 – 20: Osnovna škola

OŠ "Malešići" Malešići - sljedeći učenici: *Aljić Lejla* (6r): 13,20; *Buljubašić Tarik*(6r): 11,13; *Delić Sumea* (6r): 11,20; *Mešanović Nejra* (6r): 11,12; *Hankušić Abdulah* (6r): 11,13;
OŠ "Hasan Kikić" Gračanica - sljedeći učenici: *Selimović Ena* (7r): 14; *Zaketović Senada* (7r): 20; *Osmanhodžić Medina* (7r): 15; *Husanović Dalila* (7r): 16; *Hodžić Ejub* (7r): 17;

Rješavatelji zadataka 11-20: Srednja škola

Gimanzija "Meša Selimović Tuzla - sljedeći učenici: *Suljendić Emana* (1r): 12. i 16.; *Mitić Marinela* (2r): 12. i 16.; *Mazalović Aida* (2r): 11., 15. i 16.; *Rakovac Kanita* (2r): 11., 12. i 16.; *Ahmetović Zerina* (3r): 12., 13. i 16.;
Gimnazija "Ismet Mujezinović" - sljedeći učenici: *Jahić Amina* (3r): 11., 12., 13., 15. (uz korekciju), 16. i 17.; *Fazlić Amina* (4r): 11., 12. i 18.; *Kavazović Muhibija* (3r): 18. i 20.;