EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 11 – 15

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Figurativni brojevi

Senada Mustafić

JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Sažetak: U ovom radu bavimo se jednom grupom zanimljivih prirodnih brojeva - figurativnim brojevima, koje možemo pomoću tačkica prikazati u obliku pravilnog mnogougla. Primjenom vizuelno-logičkog pristupa u zapažanju osobina trougaonih i kvadratnih brojeva kod učenika razvijamo kreativnost i sposobnost rješavanja problema na više različitih načina.

1. Uvod

"Algebra je pisana geometrija, a geometrija je slikovita algebra."

Marija-Sofija Žermen (1776.-1831.), francuska matematičarka

Istorija matematike potvrđuje da su mnogi matematičari još u ranoj mladosti pokazivali izuzetne matematičke sposobnosti. Njemački matematičar Karl Fridrich Gauss (1777. − 1855.) je u četvrtom razredu osnovne škole pronašao formulu za zbir konačnog broja članova aritmetičkog niza. Na postavljeni zadatak da saberu sve prirodne brojeve od 1 do 100, na veliko iznenađenje svog učitelja, Gauss je vrlo brzo dobio rezultat. Dok su drugi učenici rješavali sabiranjem broj po broj on je, posmatrajući sabirke, uočio zakonitost da zbir prvog i posljednjeg broja iznosi 101, isto kao i zbir drugog i pretposljenjeg broja, itd. Takvih parova je tačno 50, pa je traženi zbir 5050. Ovaj kreativan način rješavanja zadatka je ukazao na Gaussove izuzetne matematičke sposobnosti.

Švajcarski psiholog i filozof Jean Piaget (1896.-1980.) smatra da su osnovne mentalne strukture rezultat interakcije jedinke i njene sredine, nasljeđa i iskustva, sazrijevanja i učenja. Pod nadarenošću podrazumijevamo osobine učenika koje omogućavaju ostvarivanje izrazito natprosječnih postignuća u jednoj ili više oblasti ljudskih djelatnosti. Nadarenost predstavlja područje u kojem se preklapaju sposobnosti, kreativnost i osobine ličnosti, a sve to pod povoljnim uticajem okoline.

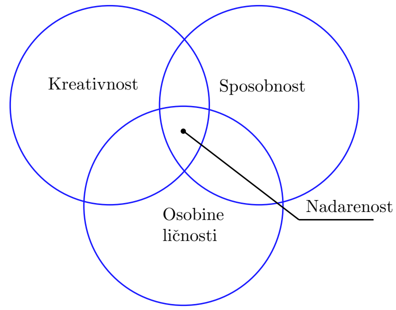
Istraživanja pokazuju da se među visoko darovitim učenicima mogu identifikovati tri tipa darovitih:

1. ***analitički tip*** - kojima razvijene verbalno-logičke komponente razmišljanja preovladavaju nad vizuelno-slikovnim komponentama;

2. ***geometrijski tip*** - posjeduje izražene vizuelne komponente i sposobnost uočavanja relacija na slici ili modelu;

3. ***harmonijski tip*** - posjeduju dobro razvijene i verbalno-logičke i vizuelno-slikovne sposobnosti.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi:
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad



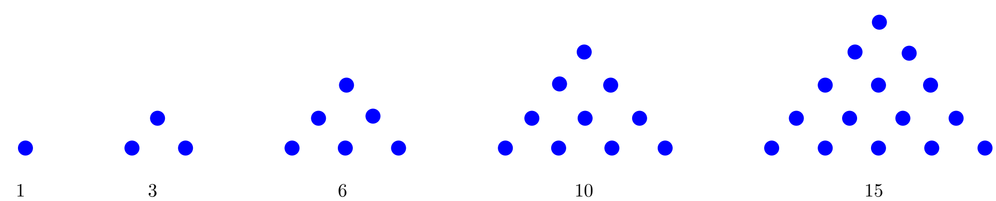
Slika 1: Nadarenost.

2. Figurativni brojevi

Kada dobijemo zadatak dokazati iskaz o prirodnim brojevima (npr. pokazati da je suma prvih n neparnih prirodnih brojeva jednaka n^2), prvo čega ćemo se sjetiti je korištenje matematičke indukcije. Geometrijski pristup, u kojem se može vizualizirati veza između brojeva kao veza između objekata, često može pružiti i lakše razumijevanje.

Takvi su postupci razvijeni još u Staroj Grčkoj, a osobito su ih njegovali pitagorejci. Jednom tačkicom ili kvadratićem prikazan je broj 1, a slaganjem tačkica ili kvadratića u određene oblike dobijamo ostale prirodne brojeve. Posebnim rasporedom i slaganjem tačkica oblikuju se tzv. figurativni brojevi. Oni omogućuju jasno vizualno predstavljanje algebarskih svojstava i relacija. Trougaoni i kvadratni brojevi sa svojom geometrijskim prikazom su interesantni za učenike.

Pogodna su tema za istraživanje koju je moguće predložiti učenicima 4. razreda za samostalan rad ili ih prezentirati kao dodatni zadatak. Na taj način učenici će sami uvidjeti ljepotu i čar matematike, jasnije će razumjeti gradivo, a razvijat će i sposobnost rješavanja novih, dotada neviđenih problema, što će biti korisno u njihovom daljem obrazovanju i životu.



Slika 2: Trougaoni brojevi.

Ukoliko jednoj tački dodamo dvije tačke dobivamo jednakostraničan trougao. Zatim, dodajući tri tačke prethodnom jednakostraničnom trouglu dobijamo treći po redu trougaoni broj 6. Broj 10, četvrti po redu trougaoni broj, bio je jedan od mističnih simbola Pitagorejaca.
Sa samih slika trougaonih brojeva jasno je na koji se način iz nekog broja u pojedinom nizu obrazuje broj koji mu neposredno slijedi. Proučavanjem trougla moguće je uočiti:

- u svakom koraku trougao ima jedan red više nego u prethodnom koraku,
- svaki sljedeći red ima jednu tačku više nego prethodni red.

Lako ćemo primijetiti da je n-ti po redu trougaoni broj jednak zbiru prvih n članova aritmetičkog niza

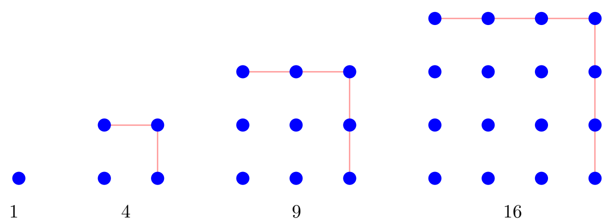
$1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n, ...$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ &= \frac{n}{2}(1 + n) \ . \end{aligned}$$

Dakle, važi $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2}(1 + n)$. Tako niz trougaonih brojeva glasi: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...
Na osnovu navedenih osobina trougaonih brojeva jednostavno izvodimo rekurzivne formule za iste:

$$T_1 = 1 \ ,$$

$$T_n = T_{n-1} + n \ .$$



Slika 3: Kvadratni brojevi.

Kad jednoj tački dodajemo tri tačke, dobijamo kvadrat. Kad tom kvadratu pridodamo pet tačaka, zatim sedam itd., dobijamo sve kvadratne brojeve, to jest brojeve koje mozemo prikazati tačkama raspoređenim u ravni u obliku kvadrata.
Na osnovu vizuelnog prikaza kvadratnih brojeva jednostavno određujemo rekurzivnu formulu za iste:

$$K_1 = 1 \ ,$$

$$K_n = K_{n-1} + (2n - 1) \ .$$

Niz kvadratnih brojeva glasi: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
Lako ćemo primijetiti da je n-ti po redu kvadratni broj jednak zbiru prvih n članova aritmetičkog niza $1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$

$$K_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) \ .$$

Na osnovu formule za sumu prvih n članova aritmetičkog niza, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, dobijamo:

$$K_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2 \ .$$

Dakle, važi

$$K_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1) = n^2 \ .$$

Zbir svaka dva uzastopna trougaona broja je kvadratni broj, jer je

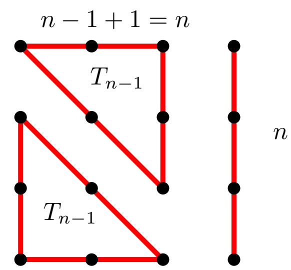
$$T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2 = K_n \ .$$

Do ove jednakosti smo mogli doći i korištenjem figurativnih brojeva. Naime, s obzirom da je

$$T_n + T_{n-1} = (T_{n-1} + n) + T_{n-1} = 2T_{n-1} + n,$$

onda iz vizuelnog prikaza vidimo da je dobijen kvadrat, to jest figurativni broj $K_n = n^2$. Na slici je prikazan slučaj za $n = 4$, a analogno bi složili figurativne brojeve $2T_{n-1}$ i n za bilo koji prirodan broj n. Dakle zaista vrijedi

$$T_n + T_{n-1} = 2T_{n-1} + n = K_n \ .$$



Slika 4: KVADRAT n^2.

3. Anketa

Cilj date ankete je da istraži koliko se u nastavi matematike primjenjuje rješavanje jednog problema (zadatka) na različite načine i kako to utiče na razvoj matematičkih sposobnosti učenika.
U anketiranju su učestvovali učenici iz JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla (33 učenika trećeg razreda, izborna nastava iz matematike i učenici matematičkog smjera), učenici JU Mješovita srednja škola Banovići (9 učenika trećeg razreda, izborna nastava iz matematike) i učenici JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla (24 učenika trećih i četvrtih razreda, izborna nastava iz matematike). Dakle, ukupno 66 učenika od kojih 21 dječak i 45 djevojčica.

Ocjenjivanje u anketi je rađeno prema sljedećoj nivelaciji:
1 "Uopće se ne slažem", **2** "Ne slažem se", **3** "Niti se slažem, niti se ne slažem", **4** "Slažem se", **5** "U potpunosti se slažem".

Tvrdnje	1	2	3	4	5
1. Na nastavi matematike rješavamo jedan zadatak na više različitih načina.	0	1	6	37	22
2. Uspijevam samostalno riješiti neke matematičke zadatke na drugačiji način nego što radimo na nastavi.	0	9	20	25	12
3. Volim kada vježbamo geometriju.	8	23	11	13	11
4. Slike i grafički prikazi mi pomažu da lakše razumijem zadatak, uočim veze i odnose	0	7	12	35	12
5. Volim kada vježbamo algebru.	2	1	13	24	26
6. Zadaci sa više različitih načina rješavanja su mi interesantni.	0	6	13	31	16
7. Raduje me i osjećam zadovoljstvo kad riješim zadatak na svoj način.	0	1	5	22	38
8. Zadaci sa više različitih načina rješavanja razvijaju kritičko i logičko mišljenje.	0	0	3	31	32

Tablica 1: Rezultati ankete.

Broj učenika koji su se istovremeno izjasnili da vole vježbati i algebru i geometriju iznosi 16, to jest $24,24\%$.
Broj učenika koji izjasnili da vole vježbati zadatke iz algebre, a ne vole da rade geometriju iznosi 32, to jest $48,48\%$.

Komentari učenika o primjeni različitih načina rješavanja istog zadatka:

- „Uči nas da budemo otvoreni za drugačiji način razmišljanja, ali da i način na koji mi razmišljamo nije pogrešan“.

- „Smatram da je bitno za razvijanje samostalnog razmišljanja kod učenika.“

- „Zadaci sa više različitih načina su bitni kao priprema za rješavanje raznih životnih problema."
- „Smatram da zadaci koji se rješavaju na više načina nisu za sve učenike. Ponekad zbunjuju, ponekad pomognu."
- „Zadaci koji se mogu riješiti na više načina mi se sviđaju jer automatski postoji veća mogućnost da sam dobro riješila zadatak."
- „Ako bi bilo manje takvih zadataka, učenici ne bi mogli da razmišljaju na svoj način i radili bi sve po šablonu."

4. Zaključak

"Riješiti jedan problem na dva ili više načina je od veće vrijednosti nego riješiti stotinu problema sve na isti način."

George Pólya (1887 - 1985), mađarski matematičar

- Pored analitičkog tipa učenika imamo geometrijski i harmonijski tip, tako da su vizualna pojašnjenja od velike pomoći učenicima za bolje razumijevanje i usvajanje matematičkih sadržaja.
- Zadavanje istog zadatka unutar različitih nastavnih cjelina pomaže učenicima da lakše usvoje i duže pamte različite nastavne sadržaje.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, doktorska disertacija, Sarajevo, 1998.
[2] B. Dakić: *Figurativni brojevi*, Miš, godina VII, br. 31, 2005.
[3] M. Jurčević: *Poligonalni brojevi*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2018.
[4] Z. Kurnik: *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola, br.10. 2000/2001.
[5] J. Matić: *Vizualizacije u matematici*, diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2018.
[6] https://mis.element.hr/list/16/broj/55/clanak/775/bez-rijeci;