EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 16 – 18

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Jedna zanimljiva primjena Stjuartove teoreme

Šefket Arslanagić

Sarajevo, BiH

Sažetak: U ovom radu, koristeći dobro poznatu Stjuartovu [1] teoremu, dokazujemo zanimljivu trigonometrijsku nejednakost za trougao kod kojeg težište pripada upisanoj kružnici.

Povod za pisanje ovog rada je bio dokaz jedne trigonometrijske nejednakosti za trougao $\triangle ABC$ koja glasi:

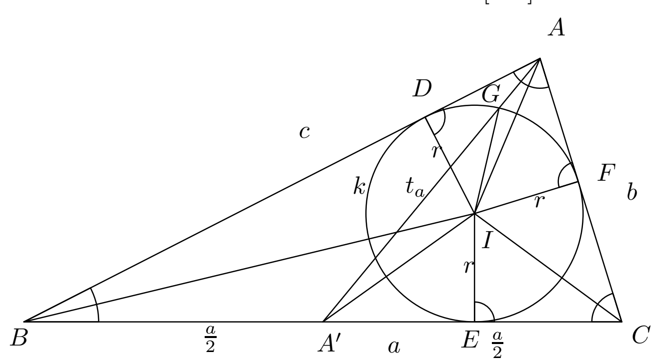
$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) > \frac{27}{5}\ , \tag{1}$$

gdje su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla $\triangle ABC$, a težište tog trougla, tačka G, pripada kružnici k upisanoj tom trouglu čiji je centar tačka I.

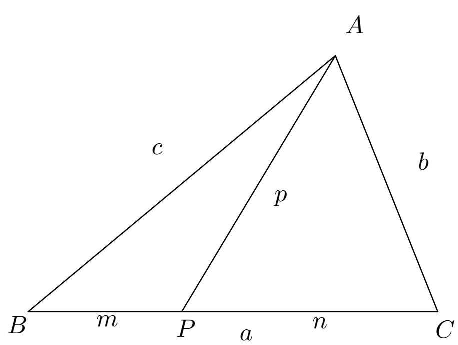
Najprije ćemo iskazati Stjuartovu teoremu. Posmatrajmo trougao $\triangle ABC$ i duž AP pri čemu je P tačka na stranici BC. Neka je $|AP| = p$, $|BP| = m$, $|CP| = n$, odakle je $|BC| = m + n$. Tada vrijedi

$$a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n\ . \tag{2}$$

Više raznih dokaza ove teoreme se može naći u [1–4]. Pređimo sada na dokaz nejednakosti (1).



Slika 1



Slika 2

Neka su tačke I i G (Slika 1) centar upisane kružnice k i težište trougla $\triangle ABC$ gdje $G \in k$. Primjenjujući Stjuartovu teoremu (2) (Slika 2) na trougao $\triangle IAA'$, dobijamo:

$$|IA|^2 \cdot |GA'| + |IA'|^2 \cdot |AG| = |IG|^2 \cdot |AA'| + |GA| \cdot |GA'| \cdot |AA'|\ . \tag{3}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: Stjuartova teorema, sinusna i kosinusna teorema, A-G nejednakost, stroga nejedankost
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručni rad

[1] Matthew Stewart (1917.-1785.), škotski matematičar

Pošto težište G dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ (računajući od vrha trougla), to imamo da je $|GA'| = \frac{1}{3}t_a$, $|AG| = \frac{2}{3}t_a$, $|AA'| = t_a$, pa iz (3) slijedi zbog $|IG| = r$

$$|IA|^2 \cdot \frac{1}{3}t_a + |IA'|^2 \cdot \frac{2}{3}t_a = r^2 \cdot t_a + \frac{2}{9}t_a^3 \ ,$$

što je ekvivalenstno sa

$$\frac{1}{3}|IA|^2 + \frac{2}{3}|IA'|^2 = r^2 + \frac{2}{9}t_a^2 \ , \tag{4}$$

a odavde na osnovu činjenice da je IA' težišnica trougla $\triangle IBC$ te da je $|IA'|^2 = \frac{2|IB|^2+2|IC|^2-|BC|^2}{4}$, dobijamo iz (4)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}|IA|^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2|IB|^2 + 2|IC|^2 - |BC|^2}{4} = r^2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(|IA|^2 + |IB|^2 + |IC|^2\right) = r^2 + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(|AD|^2 + r^2 + |BE|^2 + r^2 + |CF|^2 + r^2\right) = r^2 + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left((s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + 3r^2\right) = r^2 + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(3s^2 - 2s(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &-\frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &3s^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &3\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &3(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = 8(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Longleftrightarrow\ &5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ac).
\end{aligned} \tag{5}$$

Na osnovu kosinusne teoreme slijedi

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ , \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \ , \\
c^2 &= a^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma \ ,
\end{aligned}$$

a odavdje nakon sabiranja ovih jednakosti:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - bc\cos\alpha - ac\cos\beta - ab\cos\gamma) \ ,$$

to jest

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma) \ . \tag{6}$$

Sada dobijamo iz (5) i (6)

$$5\left(\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c}\right) = 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ ,$$

a odavdje nakon sinusne teoreme

$$5\left(\frac{\cos\alpha}{2R\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{2R\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{2R\sin\gamma}\right) = 3\left(\frac{1}{2R\sin\alpha} + \frac{1}{2R\sin\beta} + \frac{1}{2R\sin\gamma}\right) \ ,$$

što je ekvivalentno sa

$$5(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) = 3\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right) \ . \tag{7}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine imamo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right) > \frac{3}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \ ,$$

to jest

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} > \frac{9}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \ . \tag{8}$$

Najzad iz (7) i (8) dobijamo

$$5(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) > \frac{27}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \ ,$$

to jest

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) > \frac{27}{5} \ .$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer u (8) vrijedi stroga nejednakost pošto bi vrijedila jednakost ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tj. ako je trougao $\triangle ABC$ jednakostranični u kome vrijedi da je $I \equiv G$, što nije slučaj jer tačka G pripada upisanoj kružnici k u trougao $\triangle ABC$ čiji je centar tačka I.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
[2] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.
[3] A. Marić: *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.
[4] E. Specht: *Geometria-sciential atlantis*, Otto van Guericke Universität, Magdeburg, 2001.