EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 6–12

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Osnovni principi i metode prebrojavanja

Hasan Jamak[a]

[a]*Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, Odsjek za matematiku*

Sažetak: U okviru ovog rada razmatraju se osnovni principi i metode određivanja broja elemenata konačnih skupova: princip bijekcije, princip sume i proizvoda, metoda isključivanja i uključivanja, princip dvostrukog prebrojavanja i metoda rekurzivnih relacija.

Prisjetimo se da je funkcija $f : A \to B$ bijekcija ako i samo ako je injektivna i sirjektivna. Neprazan skup A je konačan, ako za neki prirodan broj n postoji bijekcija $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow A$. U tom slučaju kažemo da skup A ima n elemenata. Broj elemenata konačnog skupa A označavamo sa $|A|$. Prazan skup je konačan. Dva neprazna konačna skupa sadrže jednak broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Zbog toga se može koristiti bijekcija da bi se ispitalo koliko elemenata ima neki skup.

1. Princip bijekcije

Teorem 1.1 (Princip bijekcije). *Neka su dati konačni skupovi A i B. Ako postoji bijekcija $f : A \to B$, tada je $|A| = |B|$.*

Primjer 1. *Koliko članova ima niz* $3, 8, 13, 18, \ldots, 118, 123$?

Rješenje: Stavimo $A = \{3, 8, 13, \ldots, 118, 123\}$. Potražimo prirodan broj k takav da postoji bijekcija $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to A$, gdje je $B = \{1, 2, \ldots, k\}$. Kako je $8-3 = 5$, $13-8 = 5$, $18-13 = 5, \ldots, 123-118 = 5$, to je u pitanju djeljivost sa 5. Kako je $3 = 0 \cdot 3+3$, $8 = 1 \cdot 5+3, \ldots, 123 = 24 \cdot 5+3$, definišimo preslikavanje $f : \{1, 2, \ldots, 25\} \to A$ relacijom $i \mapsto 3 + (i-1) \cdot 5$ $(i \in B)$. Prema definiciji preslikavanja f odmah se vidi da je f sirjektivno preslikavanje, tj. da je svaki element skupa A slika nekog elementa skupa B. Ispitajmo injektivnost preslikavanja f. Neka su $i, j \in B$ takvi da je $f(i) = f(j)$. Tada je $3 + (i-1) \cdot 5 = 3 + (j-1) \cdot 5$. Odavde slijedi $i = j$, pa je f injektivno preslikavanje. Dakle, preslikavanje $f : \{1, 2, \ldots, 24\} \to A$ je bijekcija, pa je $|A| = |B| = 25$.

Mogli smo raditi i ovako: $(123-3) : 5+1 = 24+1 = 25$. □

Primjer 2. *Koliko članova niza* $1, 3, 5, 7, \ldots, 995, 997, 999$ *je djeljivo sa* 7?

Rješenje: Iz datog niza izdvojimo sve one članove koji su djeljivi sa 7:

$$7,\ 21,\ 35,\ 49,\ \ldots,\ 973,\ 987\ ,$$

Ciljna skupina: srednja škola
Prezentovano na: Seminar Fojnica 2015
Rad preuzet: 12.12.2017.
Email adresa: hjamak@pmf.unsa.ba (Hasan Jamak)

ili drugačije napisano,

$$7 \cdot \mathbf{1},\ 7 \cdot \mathbf{3},\ 7 \cdot \mathbf{5},\ \ldots,\ 7 \cdot \mathbf{139},\ 7 \cdot \mathbf{141}.$$

Dakle, svaki član ovog niza je proizvod broja 7 i neparnog broja. Treba odrediti broj elemenata ovog skupa. Kako je $139 = 2\cdot 70-1$ i $141 = 2\cdot 71-1$, to možemo posmatrati preslikavanje $f(a) = 7(2a-1)$ za svako $a \in A$, gdje je $A = \{1, 2, \ldots, 70, 71\}$. Ovo preslikavanje je bijekcija između skupova A i $B = \{7, 21, 35, \ldots, 139, 141\}$. Zato je $|B| = |A| = 71$. Dakle, u datom nizu imamo 71 član sa datom osobinom. □

Primjer 3. *Neka trougao ABC ima dužine stranica a, b i c koje su prirodni brojevi i za koje vrijedi $a < b < c$. Izraziti broj takvih trouglova u funkciji prirodnog broja b.*

Rješenje: Primijetimo prvo, ako su dužine stranica raznostraničnog trougla prirodni brojevi, onda ni jedna stranica trougla ne može imati dužinu 1. Naime, pretpostavimo suprotno, tj. da postoji raznostranični trougao sa stranicama $1 < b < c$, gdje su b i c prirodni brojevi. Kako je $b < c$, onda je $b + 1 \leq c$. S druge strane, svaka stranica trougla manja je od zbira druge dvije stranice, pa je $c < b + 1$. Dakle, $c < b + 1 \leq c$, što povlači $c < c$. Kontradikcija.

Prema uslovu zadatka vrijedi $1 \leq a < b < c$. Kako je zbir dvije stranice trougla veći od treće, to je $a + b > c$, pa je $b < c < a + b$, tj. $b + 1 \leq c \leq a + b - 1$, pri čemu je $1 \leq a \leq b - 1$. Prema prvom dijelu dokaza je $a \geq 2$. Dakle, $2 \leq a \leq b - 1$ i $b + 1 \leq c \leq a + b - 1$. Za jedno a postoje $(a + b - 1) - b = a - 1$ mogućnost. Ukupan broj takvih trouglova je

$$\sum_{a=2}^{b-1}(a-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (b-2) = \frac{(b-2)(b-1)}{2}\ .$$

Specijalno, za $b = 6$ imamo

$$7 \leq c \leq a + 5 \quad \text{i} \quad 1 \leq a \leq 5\ .$$

Za jedno izabrano $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ stranica c može uzeti $((a + 5) - 7) + 1 = a - 1$ vrijednosti.
Za $a = 2$ je $a - 1 = 1$, pa c ima jednu vrijednost $c = 7$.
Za $a = 3$ je $a - 1 = 2$, pa c ima dvije vrijednosti i to: $c = 7$ i $c = 8$.
Za $a = 4$ je $a - 1 = 3$, pa c ima tri vrijednosti i to: $c = 7$, $c = 8$ i $c = 9$.
Za $a = 5$ je $a - 1 = 4$, pa c ima četiri vrijednosti i to: $c = 7, c = 8, c = 9$ i $c = 10$.
Prema tome, traženih trouglova ima:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10\ .$$

Dužine stranica tih trouglova date kao uređene trojke su:

$$(2, 6, 7), (3, 6, 7), (3, 6, 8), (4, 6, 7), (4, 6, 8), (4, 6, 9), (5, 6, 7), (5, 6, 8), (5, 6, 9), (5, 6, 10)\ .$$

□

2. Princip sume i princip proizvoda

Pretpostavimo da treba odrediti broj elemenata nekog skupa. Prirodna ideja je taj skup podijeliti u nekoliko manjih skupova, tako da se svaki element skupa A nalazi u tačno jednom od tih dijelova.

Teorem 2.1 (Princip sume). *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi koji su po parovima disjunktni, tj. za sve $1 \leq i \neq j \leq n$ vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$. Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Ponekad je skup kojem želimo odrediti broj elemenata direktan proizvod nekoliko drugih konačnih proizvoda. Broj elemenata u takvom skupu dobijamo pomoću **principa proizvoda**.

Teorem 2.2 (Princip proizvoda). *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Tada je*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdot \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Primjer 4. *U nekoj učionici se nalazi 5 učenika prvog, 6 učenika drugog, 7 učenika treég i 8 učenika četvrtog razreda. Na koliko načina se iz te učionice može odabrati:*

(a) jedan učenik (bilo kojeg razreda)?

(b) po jedan učenik iz svakog razreda?

Rješenje: Neka je A skup učenika prvog razreda, B skup učenika drugog razreda, C skup učenika trećeg razreda i D skup učenika četvrtog razreda. Skupovi A, B, C i D su disjunktni.

(a) Izbor jednog učenika iz posmatrane učionice ustvari je izbor jednog elementa iz skupa $A \cup B \cup C \cup D$. Na osnovu principa sume je

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| = 5 + 6 + 7 + 8 = 26.$$

Dakle, jednog učenika bilo kojeg razreda možemo izabrati na 26 načina.

(b) Izbor po jednog učenika iz svakog razreda je izbor jednog elementa iz skupa $A \times B \times B \times C \times D$. Na osnovu principa proizvoda, zaključujemo da je broj mogućih izbora jednak

$$|A \times B \times B \times C \times D| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D| = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680.$$

□

Primjer 5. *Navedimo nekoliko zadataka koji se rješavaju principom sume ili principom proizvoda.*

1. Na koliko načina se na šahovskoj tabli 8×8 može odabrati jedno bijelo i jedno crno polje? Isto pitanje, ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim vrstama i kolonama?
2. Kvadrat stranice n je pomoću pravih koje su paralelne stranicama kvadrata podijeljen na n^2 kvadrata stranice jedan. Koliki je ukupan broj kvadrata na toj slici?
3. Na koliko načina možemo postaviti figuru kralja na jedno polje šahovske table 8×8, a zatim odigrati potez?

Rješenje: 1. Ako je C skup crnih a B skup bijelih polja na šahovskoj tabli, vrijedi $|C| = |B| = 32$. Izbor jednog crnog i jednog bijelog polja je izbor elementa iz $C \times B$, pa je broj načina da se to uradi jednak $32 \cdot 32 = 1024$. Ako želimo da odabrana polja nisu u istoj vrsti ili koloni, tada crno polje biramo kao i ranije na 32 načina, dok bijelo polje možemo odabrati na $32 - 8 = 24$ načina. Koristeći princip proizvoda dobijamo da je broj izbora koje tražimo jednak $32 \cdot 24 = 768$.

2. Pretpostavimo da je posmatrani kvadrat $[0, n] \times [0, n]$ u koordinatnom sistemu. Neka je S traženi skup svih kvadrata. Sa S_k označimo podskup od S koji čine kvadrati čija je stranica dužine k. Lako je primijetiti da je S disjunktna unija skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Kvadrat stranice k je potpuno određen ako znamo koordinate (i, j) donjeg lijevog tjemena. Tada je gornje desno tjeme $(i + k, j + k)$. Kako se kvadrat stranice k nalazi u kvadratu $[0, n] \times [0, n]$, to je $0 \leq i, j \leq n$ i $0 \leq i + k, j + k \leq n$, pa je $0 \leq i, j \leq n - k$, tj. tačka (i, j) je tjeme takvog kvadrata ako i samo ako

$$(i, j) \in \{0, 1, \ldots, n - k\} \times \{0, 1, \ldots, n - k\}.$$

Na osnovu principa proizvoda dobijamo da je $|S_k| = (n - k + 1)^2$. Kako je S disjunktna unija skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$, to na osnovu principa sume imamo

$$|S| = |S_n| + |S_{n-1}| + \cdots + |S_2| + |S_1| = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

odnosno

$$|S| = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Iz svakog od četiri ugaona polja kraljem se mogu povući po tri poteza; iz svakog od preostala 24 polja na rubu table može se povući pet poteza; iz ostalih 36 polja, koja nisu na rubu table, kraljem se može odigrati po osam poteza. Kombinujući metode sume i proizvoda, dobijamo da je traženi broj poteza

$$4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 36 \cdot 8 = 12 + 120 + 288 = 420.$$

□

3. Metoda uključivanja i isključivanja

Teorem 3.1. *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi konačnog skupa S. Tada važi sljedeća formula uključivanja i isključivanja:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j < \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + \\ + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Na primjer, za $n = 2$ imamo $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, a za $n = 3$ imamo

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Primjer 6. *U razredu ima 21 učenika. Sedamnostorica imaju četvorku iz fizike, devetnaestorica imaju četvorku iz biologije, petnaestorica imaju četvorku iz matematike i osamnaestorica imaju peticu iz hemije. Dokazati da bar šestorica učenika imaju petice iz sva četiri predmeta.*

Rješenje: Neka su: F, B, M i H skupovi učenika koji imaju petice iz fizike, biologije, matematike i hemije, respektivno. Nadalje, neka je S skup svih učenika tog razreda. Očigledno su skupovi $F \cup B$ i $M \cup H$ podskupovi skupa S. Tada je

$$|S| \ge |F \cup B| = |F| + |B| - |F \cap B|.$$

Odavde je

$$|F \cap B| \ge |F| + |B| - |S| = 17 + 19 - 21 = 15.$$

Dakle, bar petnaestorica učenika imaju peticu iz fizike i biologije. Anaogno, iz $S \supseteq M \cup H$, slijedi

$$|S| \ge |M \cup H| = |M| + |H| - |M \cap H|,$$

pa je

$$|M \cap H| \ge |M| + |H| - |S| = 15 + 18 - 21 = 12.$$

Dakle, bar dvanaestorica učenika imaju odlične ocjene iz matematike i hemije.

Neka je $T = (F \cap B) \cup (M \cap H)$. Tada je $T \subseteq S$, pa je $|T| \le |S|$. Dakle,

$$\begin{aligned} |S| \ge |T| &= |F \cap B| + |M \cap H| - |(F \cap B) \cap (M \cap H)| \\ &\ge 15 + 12 - |(F \cap B) \cap (M \cap H)|. \end{aligned}$$

Odavde je

$$|F \cap B \cap M \cap H| \ge 15 + 12 - |S| = 27 - 21 = 6.$$

Dakle, bar šestorica učenika imaju odličnu ocjenu iz sva četiri predmeta. □

Primjer 7. *Lewis Caroll, pravim imenom Charles Lutwidge Dogston je bio engleski pisac i matematičar, čije su dvije priče*[1)2)] *o Alisinim pustolovinama u čudesnom svijetu postale sastavni dio dječije školske lektire, u jednoj pripovjetci daje ovakav zadatak: "U žestokoj borbi* 70 *od* 100 *gusara izgubilo je jedno oko,* 75 *jedno uho,* 80 *jednu ruku i* 85 *jednu nogu. Koliko je najmanje gusara izgubilo i oko, i uho, i ruku i i nogu istovremeno?" Odgovorite na ovo pitanje.*

Rješenje: Neka je S skup svih gusara, A skup gusara koji su izgubili jedno oko, B skup svih gusara koji su izgubili jedno uho, C skup svih gusara koji su izgubili jednu ruku i D skup svih gusara koji su izgubili jednu nogu. Kao u prethodnom zadatku posmatramo skupove $A \cup B$ i $C \cup D$ i na osnovu datih podataka zaključujemo da je $|A \cap B| \geq 45$ i $|C \cap D| \geq 65$. Tada je

$$|A \cap B \cap C \cap D| \geq |A \cap B| + |C \cap D| - |S| \geq 45 + 65 - 100 = 10.$$

Dakle, bar 10 gusara je izgubilo po jedno oko, uho, ruku i nogu istovremeno. □

4. Dvostruko prebrojavanje

Ako elemente nekog skupa X prebrojimo na dva različ ačina (ali oba puta tačno!), svakako moramo dobiti isti rezultat. To je suština metode dvostrukog prebrojavanja. Posmatrajmo sljedeći jednostavan primjer.

Primjer 8. *Koliko ima dijagonala u konveksnom n-touglu?*

Rješenje: Neka je d_n traženi broj dijagonala. Ako je V skup tjemena, a D skup dijagonala u $n-$touglu, vrijedi $|V| = n$ i $|D| = d_n$. Uočimo skup

$$X = \{(v, d) \mid v \in V; d \in D; d \text{ sadrži } v\} \subseteq V \times D.$$

Primijetimo da je svako tjeme iz V sadržano u tačno $n - 3$ dijagonale i da svaka dijagonala sadrži tačno dva tjemena. Ako u paru $(v, d) \in V$ prvo odaberemo tjeme v, pa onda dijagonalu koja ga sadrži, dobijemo $|X| = n(n - 3)$.

Ako prvo odaberemo dijagonalu, pa onda tjeme koje je pripada toj dijagonali dobićemo $|X| = 2d_n$. Stoga je $X = n(n - 3) = 2d_n$, odnosno $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$. □

Formalno, metodu dvostrukog prebrojavanja iskazujemo sljedećom teoremom.

Teorem 4.1 (Metoda dvostrukog prebrojavanja). *Neka su dati skupovi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ i neka je $S \subseteq A \times B$. Dalje, neka je $x_i = |\{(x, y) \in S | \, x = a_i\}|$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$, odnosno $y_j = |(x, y \in S| \, y = b_j\}|$ za sve $j = 1, 2, \ldots, m$. Tada je*

$$|S| = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Primjer 9. *(Republičko takmičenje u SRBiH) Dato je m tačaka unutar $n-$tougla $(n \geq 3)$ među kojima nikoje tri nisu kolinearne. Ove tačke i tjemena $n-$tougla su povezane nepresjecajućim dužima i dijele mnogougao na trouglove. Odrediti broj trouglova.*

Rješenje: Kao osnov za brojanje trouglova koristićemo zbir uglova u trouglu. Neka je k broj trouglova. Zbir uglova u ovih k trouglova je $k \cdot 180^0$. Svaka od m tačaka je tjeme nekoliko trouglova. Zbir svih uglova čije je tjeme u toj tački je 360^0. Kako imamo m tačaka, to je zbir uglova $m \cdot 360^0$. Ostalo nam je da odredimo zbir uglova trouglova čija se tjemena nalaze u tjemenima $n-$tougla. Taj zbir jednak je zbiru unutrašnjih uglova mnogougla, tj. $(n-2) \cdot 180^0$. Prema tome ukupan zbir uglova ovih trouglova je $m \cdot 360^0 + (n-2) \cdot 180^0$. Konačno imamo

$$k \cdot 180^0 = m \cdot 360^0 + (n - 2) \cdot 180^0 \ .$$

Odavde je $k = 2m + n - 2$. □

[1)] Alisa u zemlji čudesa
[2)] Alisa s one strane ogledala

Primjer 10. *(IMO1998) Na takmičenju učestvovalo je a takmičara i b sudija, pri čemu je $b \geq 3$ neparan prirodan broj. Svaki sudija ocjenjuje svakog takmičara sa "prošao" ili "pao". Neka je k broj takav da se za svaku dvojicu sudija njihove ocjene poklapaju kod najviše k takmičara. Dokazati da je*

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Rješenje: Brojat ćemo ukupan broj poklapanja kod svih parova i svih takmičara. Broj sudija je b, pa je broj parova sudija $\binom{b}{2}$. Svaki par sudija se slaže kod najviše k takmičara, pa ukupan broj poklapanje ne prelazi broj $k \cdot \binom{b}{2}$. S druge strane, ako za $i-$tog takmičara x_i sudija glasa za prolaz, a $b - x_i$ sudija za pad, onda broj poklapanja na ovom takmičaru je $\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2}$. Ukupan broj poklapanja je

$$\sum_{i=1}^{a} \left[\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \right] ,$$

pri čemu je

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} = \frac{2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b}{2} .$$

Funkcija $2x^2 - 2bx + b^2 - b$ je parabola i njena najmanja vrijednost je u tjemenu, tj. za $x = \frac{b}{2}$. Kako je b neparan prirodan broj, to $\frac{b}{2}$ nije cio broj, a x_i je cio broj. Zato izraz $2x_i^2 - 2bx_i + b^2 - b$ dostiže svoj minimum na prirodnom broju koji je najbliži broju $\frac{b}{2}$. To su brojevi $\frac{b-1}{2}$ i $\frac{b+1}{2}$. Stavimo $b = 2r + 1$. Tada je $\frac{b-1}{2} = r$, pa je

$$\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \geq \binom{b-r}{2} + \binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(r+1)r}{2} = r^2 .$$

Ukupan broj poklapanja je

$$\sum_{i=1}^{a} \left[\binom{x_i}{2} + \binom{b-x_i}{2} \right] \geq \sum_{i=1}^{a} r^2 = ar^2 = a\,\frac{(b-1)^2}{4}.$$

Prema tome,

$$k \binom{b}{2} \geq a\,\frac{(b-1)^2}{4} \iff \frac{kb(b-1)}{2} \geq a\,\frac{(b-1)^2}{4} ,$$

odnosno $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$, što je i trebalo dokazati. □

5. Rekurzivne relacije

Naš zadatak je odrediti neki niz cijelih brojeva (a_n) $n \in \mathbb{N}$. Jedan od efikasnih načina da to uradimo je da pronađemo formulu koja svaki član tog niza izrazi pomoću jednog ili višene prethodnih članova niza. Takva formula se naziva rekurzivna relacija za niz (a_n) $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 11. *(Broj podskupova datog konačanog skupa). Koliko podskupova ima skup od n elemenata?*

Rješenje: Kako nam za broj podskupova nije bitna priroda elemenata posmatranog skupa, pretpostavimo da brojimo podskupove skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je A_n skup svih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, i neka je $a_n = |A_n|$. Sve podskupove skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ možemo podijeliti u dvije grupe s obzirom na to da li sadrže broj n ili ne. Neka je U skup svih podskupova skupa S koji ne sadrže element n, a V skup svih podskupova koji sadrže broj n kao svoj element. Tada je $A_n = U \cup V$. Kako su skupovi U i V disjunktni, to je $|A_n| = |U| + |V|$.

(a) Elementi skupa U su svi podskupovi skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Stoga, takvih podskupova ima a_{n-1}.

(b) Neka je A proizvoljan element skupa V. Tada je $n \in A$ i skup $A \setminus \{n\}$ je element skupa U. Zbog toga preslikavanje $f : A \mapsto A \setminus \{n\}$ je preslikavanje skupa V u skup U. Pokažimo da je ovo preslikavanje bijekcija. Neka su A i B elementi skupa V takvi da je $f(A) = f(B)$, tj. $A \setminus \{n\} = B \setminus \{n\}$. Tada je

$$A = (A \setminus \{n\}) \cup \{n\} = (B \setminus \{n\}) \cup \{n\} = B.$$

Dakle, preslikavanje f je injekcija.

Neka je C proizvoljan element skupa U. Tada $n \notin U$, pa je $C \cup \{n\} \in V$. Odavde slijedi

$$f(C \cup \{n\}) = (C \cup \{n\}) \setminus \{n\} = C.$$

Dakle, C je slika nekog elementa skupa V. Kako je C bio proizvoljan element skupa U, to je preslikavanje f sirjektivno. Dakle, preslikavanje $f : V \to U$ sirjektivno. Tada je $|V| = |U| = a_{n-1}$.

Dakle, za sve $n > 1$ vrijedi $a_n = 2a_{n-1}$. Odavde je

$$a_n = 2a_{n-1} = 2\,(2a_{n-2}) = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = \ldots = 2^{n-1} a_1 \ .$$

Kako je a_1 broj podaskupova skupa $\{1\}$, to je $a_1 = 2$, jer su $\emptyset$ i $\{1\}$ jedini podskupovi skupa $\{1\}$. Konačno je $a_n = 2^n$. □

Primjer 12. *Triangulacija konveksnog mnogougla je podjela tog mnogougla na trouglove pomoću nepresijecajućih dijagonala, tj. duži koje spajaju njegova nesusjedna tjemena. Za dvije triangulacije nekog mnogougla kažemo da su različite ako bar jedna od njih sadrži trougao kojeg druga ne sadrži. Odredimo broj različitih triangulacija $n-$tougla.*

Rješenje: Trougao ima jednu triangulaciju. Četverougao $ABCD$ ima dvije triangulacije. Prva triangulacija se dobije pomoću dijagonale AC koja četverougao dijeli na trouglove ABC i ACD. Druga triangulacija se dobije povlačenjem dijagonale BD koja dijeli četverougao na trouglove ABD i BCD.

Razmotraimo sada opšti slučaj. Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ $n-$tougao. Označimo sa T_n broj triangulacija $n-$tougla. Posmatrajmo trougao $A_1A_kA_n$, gdje je $1 < k < n$ proizvoljan. Ovaj trougao dijeli $n-$tougao na mnogougle $A_1A_2\ldots A_k$ i $A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Prvi mnogougao ima k strana, a drugi mnogougao ima $n+1-k$ strana. Broj triangulacija $k-$tougla $A_1A_2\ldots A_k$ je T_k, a broj triangulacija mnogougla $A_kA_{k+1}\ldots A_n$ je T_{n+1-k}. Neka je S_1 skup svih triangulacija $k-$tougla, a S_2 skup svih triangulacija mnogougla $A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Posmatrajmo skup $P_k = S_1 \times S_2 \times \{A_1A_kA_n\}$. Ovaj skup ima $T_k \cdot T_{n+1-k} \cdot 1$ elemenata. Ako je $(S_1, S_2, \{A_1A_kA_n\})$ neki element skupa P_k, onda je $S_1 \cup S_2 \cup \{A_1A_kA_n\}$ jedna triangulacija datog mnogougla. Prema tome, triangulacija mnogougla određenih dijagonalama A_1A_k i A_nA_k je $T_k \cdot T_{n+1-k}$. Da bismo odredili sve triangulacije moramo pustiti da se k kreće od 2 do $n-1$, pa dobivene rezultate sabrati. Tako imamo

$$T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \ldots + T_{n-1}T_2. \tag{1}$$

U ovoj formuli se javljaju broj T_2 koji prema definiciji treba da predstavlja broj triangulacija $2-$ugla. Kako dvougao nije mnogougao, to nam broj T_2 nije definisan. U sumi se T_2 javlja dva puta, jednom za $k = 2$ i drugi put za $k = n-1$. U prvom slučaju se mnougougao dijeli na trougao $A_1A_2A_n$ i $n-1$-ugao $A_2A_3\ldots A_n$. U ovom slučaju broj triangulacija odgovara broju triangulacija mnogougla $A_2A_3\ldots A_n$, tj. jednak je T_{n-1}. Na isti način se pokaže da je i u drugom slučaju broj triangulacija jednak brju traiangulacija $(n-1)$-tougla $A_1A_2\ldots A_{n-1}$, a taj broj je T_{n-1}. Prema tome možemo definisati da je $T_2 = 1$ pa formula (1) ima smisla i izražava rekurzivnu relaciju za određivanje broja triangulacija $n-$tougla.

Iz ove formule se nalazimo: $T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = 5, T_6 = 14$. □

Literatura

[1] C.C. Chen, K.M. Koh: *Principles and Tehniques in Combinatorics*, Word Scientific, Singapore - New York-London-Hong-Kong, 1992.
[2] H. Jamak: *Matematički olimpijski kutak 1*, Grafičar promet d.o.o. Sarajevo, 2016.
[3] D. Jojić: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.
[4] L.K. Ho, L. T. Wing, L.K. Yin: *Double Counting*, Mathematical Excallibur, Vol. 13, No. 4, 2008.