EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 19 – 21

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Parabola - jedna osobina

Jens Carstensen[a], Alija Muminagić[a]

[a] *Frederiksberg, Danska*

Sažetak: U radu se rješava problem određivanja jednadžbe krivulje, odnosno geometrijskog mjesta tačaka, u ravni koje zadovoljava zakon odbijanja svjetlosti.

1. Uvod

Iz optike nam je dobro poznat zakon odbijanja svjetlosti, prema kojem upadni zrak, normala i odbojni zrak leže u istoj ravni i pri tome je ugao između upadnog zraka i normale jednak uglu između normale i odbojnog zraka. Lahko se pokazuje sljedeće: ako u fokus parabole stavimo izvor svjetlosti, onda zraka svjetlosti pada na parabolu i odbija se tako da je paralelna s osom parabole. Obrnuto, ako zraka svjetlosti paralelna s osom parabole pada na parabolu, onda se odbija tako da prolazi kroz fokus parabole (na ovom principu zasnovana je konstrukcija paraboličnog reflektora). Razmotrimo, međutim, sljedeći problem: pretpostavimo da nam nije poznata ova osobina parabole i odredimo jednadžbu krivulje u ravni koja zadovoljava zakon odbijanja svjetlosti, odnosno geometrijsko mjesto tačaka s navedenim svojstvom.

2. Rješenje problema

Neka je $P(x, y)$ proizvoljna tačka na krivulji, $F(a, 0)$ tačka na $Ox-$osi kroz koju prolazi zraka svjetlosti nakon odbijanja zrake paralelne s $Ox-$osom. Označimo sa K presječnu tačku normale na tangentu t u tački P sa $Ox-$osom i $\sphericalangle KPF = \alpha$ (vidi Sliku 1). Jednadžba tražene krivulje neka je $y = f(x)$. Poznato je da je koeficijent smjera tangente y', a koeficijent smjera normale $-\frac{1}{y'}$. Nije teško pokazati da su uglovi upravo kao na Slici 1. Tako imamo da je, zbog $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$,

$$k = -\frac{1}{y'} = \tan(180^\circ - \alpha) \Longleftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{y'} \tag{1}$$

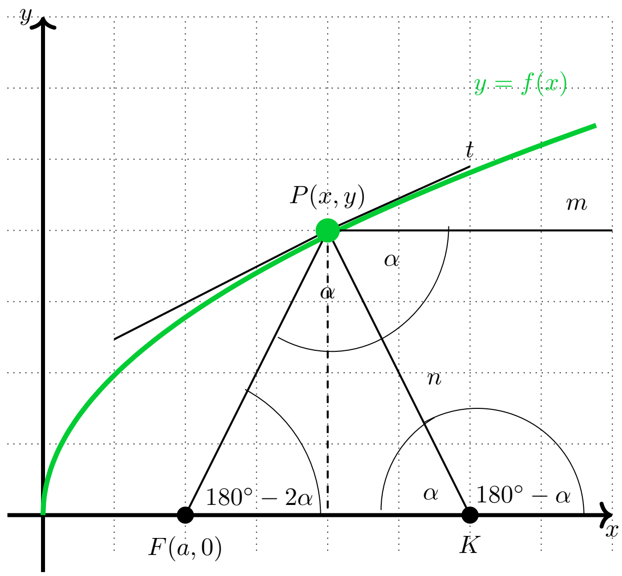
Koeficijent smjera pravca kroz tačke F i P jednak je

$$k = \tan(180^\circ - 2\alpha) = -\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1},$$

a kako je također $k = \frac{y}{x-a}$, imamo

$$k = \frac{y}{x-a} = \frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1} =^{(1)} \frac{2\frac{1}{y'}}{(\frac{1}{y'})^2 - 1} = \frac{2y'}{1 - y'^2} \Longleftrightarrow y \cdot y'^2 + 2(x-a)y' - y = 0.$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: parabola, diferencijalne jednadžbe, zakona prelamanja svjetlosti
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručni rad



Slika 1: Ilustracija zakona prelamanja svjetlosti

Ovo je diferencijalna jednadžba iz koje slijedi

$$y' = \frac{-2(x-a) \pm \sqrt{4(x-a)^2 + 4y^2}}{2y} = \frac{-(x-a) \pm \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{y}. \tag{2}$$

Definirajmo funkciju r sa $y = r(x-a)$, pa je $y' = r'(x-a) + r$, što uvrštavanjem u (2) daje

$$r'(x-a) + r = \frac{-(x-a) \pm \sqrt{(x-a)^2 + r^2(x-a)^2}}{r(x-a)} \Longleftrightarrow r'(x-a) + r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+r^2}}{r}$$

Ovdje možemo razdvojiti promjenljive

$$\begin{aligned} rdx + (x-a)dr &= \frac{(-1 \pm \sqrt{1+r^2})dx}{r} \Longleftrightarrow r^2dx + r(x-a)dr = (-1 \pm \sqrt{1+r^2})dx \\ &\Longleftrightarrow (r^2 + 1 \pm \sqrt{1+r^2})dx = -r(x-a)dr \\ &\Longleftrightarrow \frac{rdr}{-r^2 - 1 \pm \sqrt{1+r^2}} = \frac{dx}{x-a}. \end{aligned}$$

Uvedimo smjenu $t^2 = 1 + r^2$. Nakon diferenciranja dobijemo

$$2t\frac{dt}{dx} = 2r\frac{dr}{dx} \Longleftrightarrow tdt = rdr. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (2) imamo

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{tdt}{-t^2 \pm t} \Longleftrightarrow \frac{dx}{x-a} = \frac{dt}{\pm 1 - t},$$

pa je nakon integraljenja

$$\ln|x-a| = -\ln|\pm 1 - t| + C, \ C\text{-konstanta}.$$

Dalje je

$$\ln|(x-a)(\pm 1+t)| = C \Longleftrightarrow (x-a)(\pm 1+t) = C_1, C_1 > 0.$$

Smjenom "unatrag" dobijemo

$$(x-a)t = (x-a)\sqrt{1+r^2} = \sqrt{(x-a)^2+(x-a)^2r^2} = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

i time

$$\begin{aligned} \pm(x-a) - \sqrt{(x-a)^2+y^2} = C_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2+y^2} = \pm(x-a) - C_1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-a)^2+y^2 = (x-a)^2 + C_1^2 \pm 2C_1(x-a) \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 = \pm 2C_1(x-a) + C_1^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 = 2C_2(x-a) + C_2^2, \end{aligned}$$

gdje smo $\pm C_1$ zamijenili s C_2.
Posljednja jednadžba predstavlja familiju parabola. Parabolu koja prolazi kroz tačku $(0,0)$ ćemo dobiti određivanjem C_2, to jest

$$0 = -2C_2a + C_2^2 \Longleftrightarrow C_2 = 2a,$$

pa tražena kriva ima jednadžbu

$$y^2 = 4a(x-a) + 4a^2 \Longleftrightarrow y^2 = 4ax.$$

Literatura

[1] J. Carstensen: *Parablen og refleksionsegenskaben*, Matematik Mag, april 2008.
[2] Z. Kadelburg, V. Milić, S. Ognjanović: *Analiza sa algebrom 4*, "Krug" Beograd, 1999.
[3] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.