EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2020), 22 – 28

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: `http://www.umtk.info`

Tragom jedne algebarske nejednakosti

Dragoljub Milošević

Republika Srbija

Sažetak: U ovom radu biće riječi o jednoj algebarskoj nejednakosti, njenim proširenjima i primjenama.

1. Umjesto uvoda

Tokom pripremanja za matematička takmičenja, Emina i Zaim su rješavali zadatak: Dokaži da, za pozitivne brojeve a, b, x, y vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}\ . \tag{1}$$

Eminino rješenje: Na osnovu poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 \geq 2\sqrt{\frac{y}{x}a^2\frac{x}{y}b^2} = 2ab\ .$$

Dodavanjem objema stranama ove nejednakosti po $a^2 + b^2$ dobijamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 + a^2 + b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 \\
\Longleftrightarrow &\frac{x+y}{x}a^2 + \frac{y+x}{y}b^2 \geq (a+b)^2 \\
\Longleftrightarrow &(x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) \geq (a+b)^2 \\
\Longleftrightarrow &\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}\ ,
\end{aligned}$$

to jest (1).
Zaimovo rješenje: Iz

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} = \frac{a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2}{xy(x+y)} = \frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)} \geq 0\ ,$$

direktno slijedi nejednakost (1).

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: nejednakosti
Rad preuzet: 2020.
Kategorizacija: Stručni rad

2. Primjena nejednakosti (1)

Sada ćemo dati nekoliko primjera primjene nejednakosti (1).

Primjer 2.1. *Za pozitivne brojeve a i b vrijedi*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \ . \tag{2}$$

Rješenje: Ako u dokazanu nejednakost (1) uvrstimo $x = b$ i $y = a$ dobijamo

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{(a+b)^2}{b+a} \ ,$$

a odavdje slijedi tražena nejednakost (2). □

Primjer 2.2. *Ako su a, b dužine kateta i c dužina hipotenuze pravouglog trougla ABC, onda vrijedi*

$$a + b \leq c\sqrt{2} \ . \tag{3}$$

Rješenje: Ako umjesto x i y stavimo broj 1 u nejednakost (1), imamo

$$\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} \geq \frac{(a+b)^2}{1+1} \ ,$$

ili

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \ ,$$

odakle je

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \ .$$

Kako je $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagorina teorema !), iz posljednje nejednakosti slijedi željena nejednakost (3). □

Primjer 2.3. *Za pozitivne brojeve a i b je*

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \ . \tag{4}$$

Za ovaj primjer ćemo dati dva rješenja.

Rješenje: Ako u (1) stavimo $x = \frac{1}{a}$ i $y = \frac{1}{b}$ dobijamo

$$\frac{a^2}{\frac{1}{a}} + \frac{b^2}{\frac{1}{b}} \geq \frac{(a+b)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \ ,$$

ili

$$a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^2}{\frac{b+a}{ab}} \ .$$

Iz posljednje nejednakosti, nakon skraćivanja sa $a + b$, slijedi nejednakost (4). □

Rješenje: Iz

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - ab(a+b) &= a^3 - a^2 b - (ab^2 - b^3) = a^2(a-b) - b^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2 - b^2) = (a-b)(a-b)(a+b) \\ &= (a-b)^2(a+b) \geq 0 \ , \end{aligned}$$

dobijamo željenu nejednakost (4). □

Primjer 2.4. *Ako su a i b pozitivni brojevi, onda je*

$$\frac{a}{3b+a} + \frac{b}{3a+b} \geq \frac{1}{2} \ . \tag{5}$$

Rješenje: Neka je $\dfrac{a}{3b+a} + \dfrac{b}{3a+b} = L$. Ako prvi razlomak proširimo sa a i druga sa b, pa primijenimo nejednakost (1), dobijamo

$$L = \frac{a^2}{a(3b+a)} + \frac{b^2}{b(3a+b)} \geq \frac{(a+b)^2}{(a^2+2ab+b^2)+4ab} \ ,$$

to jest,

$$L \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+4ab} \ . \tag{6}$$

S obzirom da je tačna nejednakost $0 \leq (a-b)^2$ ekvivalentna sa $4ab \leq (a+b)^2$, iz (6) slijedi

$$L \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)^2} \ ,$$

to jest $L \geq \dfrac{1}{2}$. □

3. Neka proširenja nejednakosti (1)

Nameće se pitanje validnosti nejednakosti koja je slična nejednakosti (1):

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \ , \tag{7}$$

gdje su a, b, c, x, y, z pozitivni brojevi.

Rješenje: Dodamo li lijevoj i desnoj strani nejednakosti (1) po $\dfrac{c^2}{z}$, imamo

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \ . \tag{8}$$

Primjenom nejednakosti (1) na desnu stranu nejednakosti (8), dobijamo

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{((a+b)+c)^2}{(x+y)+z} \ . \tag{9}$$

Iz nejednakosti (8) i (9) slijedi nejednakost (7). □

Napomena 3.1. *Jednakost u (7) vrijedi za sve realne brojeve a, b, c (dakle, i za nepozitivne brojeve a, b, c).*

Posljedica 3.2. *Za $x = y = z = 1$ imamo*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \ .$$

Ova nejednakost je za $a, b, c > 0$ ekvivalentna sa

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \ ,$$

što predstavlja nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine tri pozitivna broja a, b, c.

Posljedica 3.3. *Za $a = b = c = 1$ dobijamo*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} ,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3} .$$

Ovo je nejednakost između harmonijske i aritmetičke sredine tri pozitivna broja x, y i z.

Idemo korak dalje, ispitajmo tačnost nejednakosti koja, u odnosu na nejednakost (1), umjesto kvadrata brojeva a, b i $a + b$, ima kubove istih elemenata, to jest

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{x+y} .$$

Naprimjer, ako u ovu nejednakost stavimo $a = b = 1$ i $x = y = 2$ imamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2^3}{2+2} ,$$

to jest $1 \geq 2$, što nije tačno.
Sada, da vidimo šta se dešava ako desnu stranu te nejednakosti smanjimo dva puta, to jest ispitajmo da li je validna sljedeća nejednakost

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} \geq \frac{(a+b)^3}{2(x+y)} . \tag{10}$$

Za $a = b = 1$ i $x = y = 2$ dobijamo $1 \geq 1$, što je tačno. Pokušajmo dokazati nejednakost (10).
Rješenje: Nejednakost (10) je ekvivalentna sa

$$2(x+y)(a^3y + b^3x) \geq xy(a+b)^3 ,$$

to jest sa

$$a^3xy + b^3xy + 2(a^3y^2 + b^3x^2) \geq 3a^2bxy + 3ab^2xy . \tag{11}$$

Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti za tri pozitivna broja, imamo

$$a^3xy + a^3y^2 + b^3x^2 \geq 3\sqrt[3]{a^3xya^3y^2b^3x^2} = 3a^2bxy$$

i

$$a^3y^2 + b^3x^2 + b^3xy \geq 3ab^2xy .$$

Ako saberemo posljednje dvije nejednakosti dobijamo nejednakost (11). Ovim je potvrđena validnost nejednakosti (11), a samim tim i validnost nejednakosti (10). □

Napomena 3.4. *Za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z vrijedi*

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} . \tag{12}$$

Ova nejednakost se može dokazati pomoću metode primijenjene za dokaz nejednakosti (10).

4. Primjena nejednakosti (7)

Ukazat ćemo na nekoliko primjera primjene nejednakosti (7).

Primjer 4.1. *Dokažimo da je za pozitivne brojeve x, y, z tačna nejednakost*

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}\ . \tag{13}$$

Rješenje: Neka je

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}=L\ .$$

Tada je

$$L=\frac{x^2}{x(x+2y+3z)}+\frac{y^2}{y(y+2z+3x)}+\frac{z^2}{z(z+2x+3y)}\ ,$$

pa je, na osnovu dokazane nejednakosti (7):

$$L\geq\frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)}\ . \tag{14}$$

Poznato je da vrijedi

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \tag{15}$$

i

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)\ . \tag{16}$$

($\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$ (tačno)). Sabiranjem nejednakosti (15) i (16) dobijamo

$$2(x+y+z)^2\geq x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)\ . \tag{17}$$

Iz nejednakosti (17) i (14) slijedi $L\geq\frac{1}{2}$, što je trebalo i dokazati. □

Primjer 4.2. *Dokažimo da za pozitivne brojeve vrijedi*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq a^2+b^2+c^2\ . \tag{18}$$

Rješenje: Primjenom nejednakosti (7) dobijamo

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}\ ,$$

a odavdje, zbog $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$, slijedi nejednakost (18). □

Rješenje: Korištenjem nejednakosti (12) imamo

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^6}{a^3b}+\frac{b^6}{b^3c}+\frac{c^6}{c^3a}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(a^3b+b^3c+c^3a)}\ . \tag{19}$$

Preostaje nam da dokažemo tačnost sljedeće nejednakosti

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)\ . \tag{20}$$

Naime, ako u nejednakost (16) stavimo

$$x = a^2 + bc - ab,\ y = b^2 + ca - bc,\ z = c^2 + ab - ca\ ,$$

dobijamo željenu nejednakost (20). Konačno, iz nejednakosti (20) i (19) slijedi nejednakost (18). □

Rješenje: Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti za dva pozitivna broja dobijamo

$$\frac{a^3}{b} + ab \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b}ab} = 2a^2, \quad \frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2, \quad \frac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2\ ,$$

pa je

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2\ . \tag{21}$$

Iz nejednakosti (21) i $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ slijedi nejednakost (18). □

5. Zadaci za vježbanje

Prva tri zadatka mogu rješavati osnovci, a preostalih pet-srednjoškolci.

Zadatak 5.1. *Ako su x i y pozitivni brojevi, dokaži tačnost nejednakosti:*

a) $\dfrac{x}{2y+x} + \dfrac{y}{2x+y} \geq \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Zadatak 5.2. *Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi*

a) $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c,$

b) $\dfrac{a}{2a+b} + \dfrac{b}{2b+c} + \dfrac{c}{2c+a} \leq 1$.

Zadatak 5.3. *Dokaži da za dužine kateta a, b i dužinu hipotenuze c pravouglog trougla vrijedi nejednakost*

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}c^4\ .$$

Zadatak 5.4. *Nejednakost (7) dokaži na način različit od prikazanog.*

Zadatak 5.5. *Neka su x, y, z, k pozitivni realni brojevi i $M = \dfrac{x}{kx+y+z} + \dfrac{y}{x+ky+z} + \dfrac{z}{x+y+kz}$. Dokaži da je*

a) $M \geq \dfrac{3}{k+2}$ *za* $0 < k \leq 1,$

b) $M \leq \dfrac{3}{k+2}$ *za* $k \geq 1.$

Zadatak 5.6. *Ako su a, b, c pozitivni brojevi i $a + b + c = 1$, dokaži da je*

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}\ .$$

Zadatak 5.7. *Ako je $k > 1$, onda za dužine stranica a, b, c trougla $\triangle ABC$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{a}{k(b+c)-a} + \frac{b}{k(c+a)-b} + \frac{c}{k(a+b)-c} \geq \frac{3}{2k-1} \ .$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 5.8. *Ako su a, b, c dužine stranica i t_a, t_b, t_c dužine težišnica trougla $\triangle ABC$, onda vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{t_a^2} + \frac{b^2}{t_b^2} + \frac{c^2}{t_c^2} \geq 4 \ .$$

Literatura

[1] Z. Cvetovski: *Inequalities (Theorems, Tehniqueus and Selected Problems)*, Berlin/Heidelberg, Springer, 2012.
[2] D. Milošević: *Jedna nejednakost i njene primene*, Tangenta, Beograd 55/3, 8-10, 2008/09.
[3] M. Milošević: *Neke primene jedne algebarske nejednakosti*, Matematički list, Beograd XLIX, 4, 1-3, 2014/15.