EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 30 – 31

Zabavna matematika - Detektivski zadaci

Zadatak 1. *Alisa je starija od Barbare i Tome. Tomo je stariji od Dane. Bakir je mlađi od Barbare, ali je stariji od Dane. Bakir je mlađi od Tome. Alisa je mlađa od Fani. Poredajte ove likove od najmlađeg do najstarijeg!*

Zadatak 2. *Imamo pet kutija: bijela, crna, crvena, plava i zelena i deset kuglica, po dvije u istim bojama kao i kutije. U svaku kutiju su stavljene po dvije kuglice na sljedeći način:*

- *Ni jedna kuglica nije u kutiji iste boje kao i kuglica.*
- *U plavoj kutiji se nalazi jedna crna kuglica.*
- *U crvenoj kutiji nema plavih kuglica.*
- *U jednoj od kutija bijele ili crne boje se nalaze po jedna crvena i jedna zelena kuglica.*
- *U crnoj kutiji su loptice hladnih tonova (hladne boje su zelena i plava).*
- *U jednoj kutiji su zajedno jedna bijela i jedna plava kuglica.*

U kojoj kutiji su koje kuglice?

Zadatak 3. *Tri predavača, Enes, Vedad i Nermin predaju tri različita predmeta, analizu, algebru i geometriju, na tri različite godine studija matematike.*

- *Enes ne predaje na prvoj godini, a Vedad ne predaje na trećoj godini studija.*
- *Onaj koji predaje na prvoj godini, ne predaje geometriju.*
- *Onaj koji predaje na drugoj godini predaje analizu.*
- *Vedad ne predaje algebru.*

Šta i kome predaje Nermin?

Zadatak 4. *Arči, Bos i Vesli su gangsteri i jedan od njih trojice je opljačkao banku u Chikagu. Na saslušanju savki je dao izjavu:*

1. *Arči:*
    - *Ja nisam opljačkao banku.*
    - *Na dan pljačke nisam bio u Chikagu.*
    - *Banku je opljačkao Vesli.*
2. *Bos:*
    - *To je uradio Vesli.*
    - *I da sam je ja opljačkao, ne bih to priznao.*
    - *Što će mi to kad imam dovoljno novca.*
3. *Vesli:*

Ciljna skupina: svi uzrasti

- *Ja nisam to uradio.*
- *Odavno već razmišljam o bankama.*
- *Arči je u pravu kad kaže da toga dana nije bio u Chikagu.*

U daljem ispitivanju svaki od osumnjičenih je priznao da su dvije od tri izjave koje je dao tačne, a jedna je netačna. Ko je opljačkao banku?

Zadatak 5. *Pet ljudi različitih nacija žive u pet različitih kuća, puše pet različitih vrsta cigara, piju pet različitih vrsta pića i imaju pet različitih kućnih ljubimaca. O njima znamo sljedeće:*

- *Englez živi u crvenoj kući.*
- *Španac ima psa.*
- *U zelenoj kući piju kahvu.*
- *Ukrajinac pije čaj.*
- *Zelena kuća je predzadnja, a prije bijele kuće.*
- *U žutoj kući puše cigarete "Kent".*
- *U srednjoj kući piju mlijeko.*
- *Čovjek koji puši "Old gold" uzgaja puževe.*
- *Norvežanin živi u prvoj kući.*
- *Čovjek koji puši "Marlboro" komšija je čovjeku koji ima lisicu.*
- *Cigarete "Kent" puše do kuće u kojoj uzgajaju konje.*
- *Čovjek koji puši "Lucky strike" pije orandžadu.*
- *Japanac puši "Winstton".*
- *Norvežanin živi u susjedstvu plave kuće.*

Ko pije vodu i ko je vlasnik zebre?

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 32 – 33

Nagradni zadatak: Problem desetocifrenog broja

John Horton Conway bio je jedan od najsvestranijih matematičara prošlog vijeka koji je dao veliki doprinos teoriji grupa, analizi, topologiji, teoriji brojeva, geometriji, algebri i teoriji kombinatornih igara. Njegovo duboko, ali dostupno djelo, osobnost veća od života, neobičan smisao za humor i sposobnost razgovora o matematici sa svima koji bi ga slušali, učinili su ga središtem pozornosti i popularnom ikonom svugdje gdje je išao, među matematičarima ali i među amaterima. Njegova predavanja o brojevima, igrama, magiji, čvorovima, dugama, pločicama, slobodnoj volji i još mnogo toga zarobila su maštu javnosti.

Conway, koji je umro u 82. godini od komplikacija povezanih s COVID-19, bio je ljubitelj igara svih vrsta. Proveo je sate u zajedničkim prostorijama Univerziteta Cambridge u Velikoj Britaniji i Univerziteta Princeton u New Jerseyju, igrajući backgammon, Go i druge razbibrige, a neke i od vlastitih kreacija. Nekoliko najpoznatijih Conwayevih doprinosa dobijeno je dok je razmišljao o igrama i njihovim strategijama. Možda je njegovo najveće otkriće bila iznenadujuća korespondencija brojeva i igara koja ga je dovela do uistinu gigantskog sistema, nadrealnih brojeva, koji je zapanjio matematičku zajednicu. Sadržao je ne samo pozitivne i negativne stvarne brojeve koje svi znamo, već i nove beskrajno velike brojeve, beskrajno malene i sve vrste novih brojeva između.

Conwayev rad na nadrealnim brojevima proizašao je iz utjecajnog istraživačkog projekta i knjige *Winning Ways for your Mathematical Plays* (1982), zbirke informacija o teoriji igara, napisane s Elwynom Berlekampom i Richardom Guyem. Ova fascinacija igrama također je Conwaya dovela do razvoja *Igre života*, ćelijskog automata u kojem se obrazac živih ili mrtvih stanica u dvodimenzionalnoj mreži razvija prema skupu pravila za 'rođenje' i 'smrt' svake od njih, bazirano na statusu najbližih susjeda. Jednostavnost i pristupačnost ove igre popularizirao je 1970. naučni američki novinar Martin Gardner. Do sredine 1970-ih procijenjeno je da četvrtina svjetskih računara koristi Conwayevu *Game of Life* kao čuvar zaslona.

Conway, kome je John von Neumann bio profesor matematike na Univerzitetu Princeton prije penzionisanja 2013. godine, rođen je u Liverpoolu u Velikoj Britaniji 1937. Otac mu je zarađivao igranjem karata, a kasnije je radio kao hemijski laboratorijski tehničar u lokalnoj visokoj školi, školi koju su pohađali George Harrison i Paul McCartney. Conway je, poput svoje majke, bio strastveni čitalac. Pokazao je rano zanimanje za matematiku; do 11. godine želio je biti matematičar na Cambridgeu. Doktorirao je na Univerzitetu u Cambridgeu 1964. godine pod mentorstvom Harolda Davenporta, a zatim i radi u Cambridgeu kao predavač. 1983. postao je profesor. 1987. godine preselio se u Princeton.

Conway je slavu prvi put stekao 1968. godine utvrdivši svih 8.315.553.613.086.720.000 simetrija Leech rešetke - izvanredno pravilnog rasporeda tačaka u 24-dimenzionalnom prostoru koji je John Leech otkrio 1967. To je dovelo do njegovog otkrića Conwayevih jednostavnih grupa, koje su bile temeljne u klasifikaciji konačnih jednostavnih grupa - jedno od glavnih dostignuća matematike dvadesetog vijeka.

Conway je imao primarnu ulogu u istraživanju i sastavljanju ikonične knjige o simetriji *ATLAS konacnih grupa* (1985). Njegovo duboko poznavanje simetrija dovelo ga je do toga da sa svojim koautorom ATLAS-a Simonom Nortonom predloži monstruozne mjesečine. Ove su, po prvi put, ozbiljno povezale grupe konačnih simetrija s analizom - a time i diskretnu matematiku s nediskretnom matematikom. Danas nagađanja o Moonshineu igraju ključnu ulogu u fizici - uključujući razumijevanje crnih rupa u teoriji struna - nadahnjujući val daljnjih takvih otkrića koja povezuju algebru, analizu, fiziku i šire.

Conwayevo otkriće novog invarijantnog čvora - koji se koristi za razdvajanje različitih čvorova - nazvanog Conwayev polinom, postalo je važna tema istraživanja u topologiji. U geometriji je otkrio ključna otkrića u proučavanju simetrija, naboja kuglica, rešetki, poliedara i popločavanja, uključujući osobine kvaziperiodičnih popločavanja kako ih je razvio Roger Penrose. U algebri je Conway sa svojim dugogodišnjim saradnikom Neilom Sloaneom otkrio još jedan važan sistem brojeva, ikozijanaca. U teoriji brojeva, Conway je pokazao da je svaki cijeli broj zbir najviše 37 petih potencijala. Također je razvio 15-teorem (sa svojim studentom Williamom Schneebergerom) i 290-konjukturu; to su bile velike generalizacije teorema o četiri kvadrata, koje je dokazao matematičar Joseph-Louis Lagrange u osamnaestom vijeku, koji kaže da je svaki pozitivan cijeli broj zbir četiri kvadratna broja (na primjer, 21 je zbir 16, 4, 1 i 0).

Conway je bio nezaboravni učitelj i govornik, a brojni trikovi koje je izvodio za ilustraciju matematičkih pojmova uključuju: odmah navođenje dana u sedmici za bilo koji datum u povijesti, vrćenje vješalice s novčićem uravnoteženim na unutrašnjem rubu, savijanje jezika u jezik raznih oblika, uravnotežujući predmete na bradi i održavajući čitava predavanja u kojima je svaka riječ koju je izgovorio imala samo jedan slog.

Volio je razgovarati o matematici i igrama, kao i o historiji, etimologiji i filozofiji. Njegov doprinos kulturi, kroz njegov rad i dostignuća, imat će trajni utjecaj. Zbog izvanredne dubine njegovih matematičkih otkrića - i zaigranog i velikodušnog načina na koji ih je dijelio s drugima - jako će nam nedostajati.

(Preuzeto iz Nature 582, 27 (2020))

Ciljna skupina: svi uzrasti

Jedan od problema koje pripisujemo Johnu Conwayu je i naš nagradni zadatak.

Zadatak 1. *Odrediti desetocifreni broj* ***abcdefghij*** *čije su sve cifre različite, takav da vrijedi*

a *je djeljiv sa 1.*
ab *je djeljiv sa 2.*
abc *je djeljiv sa 3.*
abcd *je djeljiv sa 4.*
abcde *je djeljiv sa 5.*
abcdef *je djeljiv sa 6.*
abcdefg *je djeljiv sa 7.*
abcdefgh *je djeljiv sa 8.*
abcdefghi *je djeljiv sa 9.*
abcdefghij *je djeljiv sa 10.*

Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 15.04.2021. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)
Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 34–35

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 31. *Sam lav može da pojede ovcu za dva sata, vuk za tri sata, a pas za šest sati. Za koje vrijeme bi oni zajedno pojeli ovcu?*

Zadatak 32. *Redari Damir i Ema mjerili su učionicu koracima. Damir jednim korakom izmjeri 80 cm. Emin korak je za 30 cm kraći i zato je, mjereći dužinu učionice, napravila 9 koraka više nego Damir, a mjereći širinu, napravila je 6 koraka više nego Damir. Koliko iznosi dužina i širina učionice?*
(Riješiti bez upotrebe jednačina!)

Zadatak 33. *Zbir kućnih brojeva jedne strane ulice (između dvije raskrsnice) iznosi 333. Koji su to brojevi? (Brojevi na različitim stranama ulice su različite parnosti.)*

Zadatak 34. *Ako bi se spoljašnji ugao kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ povećao za 35°, a spoljašnji ugao kod tjemena B umanjio za 20°, onda bi se unutrašnji ugao kod tjemena C povećao za svoju četvrtinu. Koliki je unutrašnji ugao kod tjemena C?*

Zadatak 35. *Svakom od brojeva 164 i 100 dodati jedan te isti cijeli broj tako da oba dobijena zbira budu kvadrati cijelih brojeva. Koji broj treba dodati?*

Zadatak 36. *Trojica ljudi, Mujo, Haso i Huso su na vašaru sa svojim suprugama. Imena supruga su Fata, Hana i Lamija. Utvrditi ko je s kim oženjen, ako je poznato sljedeće:*

- *Svako od ovih šest lica platio je svaku kupljenu stvar onoliko KM koliko je stvari kupilo.*
- *Svaki muškarac potrošio je 63 KM više od svoje žene.*
- *Mujo je kupio 23 stvari više od Hane, a Haso 11 više od Fate.*

Zadatak 37. *Od svih dvocifrenih brojeva odrediti onaj koji podijeljen zbirom svojih cifara daje najveću vrijednost.*

Zadatak 38. *Riješiti jednačinu u skupu cijelih brojeva:* $x^3 - 10x^2 + xy - y = 0$.

Zadatak 39. *U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$ s osnovicom BC nalazi se tačka M takva da je $\measuredangle MBC = 30^\circ$ i $\measuredangle MCB = 10^\circ$. Odrediti $\measuredangle AMC$ ako je $\measuredangle BAC = 80^\circ$.*

Zadatak 40. *Postoji li među 2020 proizvoljno odabranih prirodnih brojeva dva čija je razlika djeljiva sa 2019?*

Ciljna skupina: Osnovna škola, srednja škola
Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 15.04.2021. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

Srednja škola

Zadatak 31. *Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 4, njegov unutrašnji ugao se poveća za* 15°*. Za koliko se poveća broj dijagonala?*

Zadatak 32. *Odrediti najveći prirodni broj* n *takav da je broj* $n^2 + 2020$ *djeljiv sa* $n + 20$.

Zadatak 33. *Definišimo funkciju* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *na sljedeći način*

$$f(1) = 3\ ,\ \ f(n) = \begin{cases} f(n-1) + 1 & ; \quad \text{za } n \text{ parno} \\ f(n-1) + 2 & ; \quad \text{za } n \text{ neparno} \end{cases}$$

Izračunati $f(2021)$*!*

Zadatak 34. *Dokazati jednakost*

$$(4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2\ .$$

Zadatak 35. *Riješiti jednačinu:*

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1}\ .$$

Zadatak 36. *Odrediti najmanju vrijednost polinoma*

$$P(x, y) = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45\ .$$

Zadatak 37. *Dvije prave paralelne sa osnovicom trapeza dijele njegove krakove na tri jednaka dijela i dati trapez na tri trapeza. Izračunati površinu "srednjeg" trapeza, ako su površine "krajnjih" trapeza respektivno* P_1 *i* P_2.

Zadatak 38. *Dokazati da za ma koji prirodan broj* n *veći od 1 važi nejednakost*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}\ .$$

Zadatak 39. *Odrediti sve vrijednosti ugla* α *u segmentu* $0 \leq \alpha \leq 2\pi$*, za koje je nejednakost*

$$\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right) x^2 - (2\sin\alpha - 3)x + 1 > 0\ ,$$

ispunjena za svako $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 40. *Zbir tri broja je 114. Oni se mogu posmatrati kao tri uzastopna člana geometrijskog niza ili kao prvi, četvrti i dvadesetpeti član aritmetičkog niza. Odrediti ove brojeve!*

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 36–45

Rješenja konkursnih zadataka 21 – 30

Osnovna škola

Zadatak 21. *Neka je*

$$A \cup B = \{0,1,2,3,6,8\}\,,\ A \backslash B = \{2,6\}\ \ i\ B \backslash A = \{0,8\}\,.$$

Odrediti $A \cap B$*.*

Rješenje: Iz $A \cup B = \{0,1,2,3,6,8\}$ i $A \backslash B = \{2,6\}$ zaključujemo da je

$$B = \{0,1,3,8\}\ .$$

Iz $A \cup B = \{0,1,2,3,6,8\}$ i $B \backslash A = \{0,8\}$ zaključujemo da je

$$A = \{1,2,3,6\}\ .$$

Sada koristeći se definicijom presjeka skupova imamo da je $A \cap B = \{1,3\}$. □

Zadatak 22. *Koliko brojeva sadrži niz:* $3, 8, 13, 18, ..., 118, 123$.

Rješenje: Ako svaki član ovog niza umanjimo za 3, dobijamo niz $0, 5, 10, 15, \ldots, 120$. Ovo su svi nenegativni cijeli brojevi djeljivi sa 5, a koji su manji ili jednaki 120. Bez 0 takvih ima $\frac{120}{5} = 24$. Dakle, naš niz ima 25 članova. □

Zadatak 23. *Učenici koji na svojim majicama nose brojeve 1,2,3,4 osvojili su na krosu prva četiri mjesta. Odrediti redoslijed učenika na cilju ako se zna:*

a) brojevi mjesta koje su učenici osvojili na krosu ne poklapaju se s brojevima koje učenici nose na majicama;

b) učenik s brojem 3 na majici nije osvojio prvo mjesto;

c) broj na majici učenika koji je osvojio četvrto mjesto poklapa se s brojem mjesta koji je osvojio onaj učenik, čiji je broj na majici ujedno broj mjesta koji je osvojio učenik s brojem 2 na majici.

Rješenje: Napravimo tabelu u kojoj vrste predstavljaju redni broj učenika, a kolone zauzeto mjesto u utrci. Upisivanjem 0 u presjeku i-te vrste i j-te kolone naglašavamo da i-ti učenik nije zauzeo j-to mjesto. U suprotnom upisujemo 1. Unošenjem podataka iz uslova a) i b) imamo stanje prikazano tabelom (a).

	zauzeto mjesto			
red. br.	I	II	III	IV
1	0			
2		0		
3	0		0	
4				0

(a)

	zauzeto mjesto			
red. br.	I	II	III	IV
1	0			
2	0	0		
3	0		0	
4	1	0	0	0

(b)

Prvo mjesto zauzeo je učenik sa rednim brojem ili 2. ili 4.
Pretpostavimo da je učenik sa rednim brojem 4. bio prvi. Stanje sada izgleda kao u tabeli (b).

Ciljna skupina: Osnovna škola, Srednja škola

Sada vidimo da učenik sa rednim brojem 2. ne može biti IV jer bi u tom slučaju učenik 1. morao biti III, a to ne može zbog uslova c) (tabela (c)). Dakle, ova varijanta otpada, to jest I mjesto je zauzeo učenik sa rednim brojem 2. Stanje je prikazano tabelom (d).

		zauzeto mjesto			
		I	II	III	IV
red. br.	1	0	0	1	0
	2	0	0	0	1
	3	0	1	0	0
	4	1	0	0	0

(c)

		zauzeto mjesto			
		I	II	III	IV
red. br.	1	0			
	2	1	0	0	0
	3	0		0	
	4	0			0

(d)

Saglasno uslovu c) četvrto mjesto je osvojio učenik sa rednim brojem koji se poklapa sa osvojenom mjestom učenika 2. Dakle, IV mjesto je osvojio učenik sa rednim brojem 1 (tabela (e)).

		zauzeto mjesto			
		I	II	III	IV
red. br.	1	0	0	0	1
	2	1	0	0	0
	3	0		0	
	4	0			0

(e)

		zauzeto mjesto			
		I	II	III	IV
red. br.	1	0	0	0	**1**
	2	**1**	0	0	0
	3	0	**1**	0	0
	4	0	0	**1**	0

(f)

Vidimo sada da da je II mjesto osvojio učenik sa rednim brojem 2., a time ostaje da je III mjesto osvojio učenik sa rednim brojem 4. (tabela (f)). □

Zadatak 24. *Debljina jednog lista hartije iznosi jednu četvrtinu mm. Ako se taj list savije napola i tako se nastavi s presavijanjem prethodno dobivenog uvijek napola, kolika će biti debljina ako se izvrši 12 presavijanja?*

Rješenje: Prilikom svakog presavijanja debljina sloja hartije se udvostruči. Zbog toga debljina sloja hartije mora biti

$$D = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{12} = 2^{10} = 1024\ mm.$$

□

Amel Halilović IXb, JU OS "Hasan Kikić" Gradačac

Zadatak 25. *Dati su razlomci $\frac{35}{396}$ i $\frac{28}{297}$. Naći najmanji broj takav da količnik tog broja sa svakim od datih razlomaka bude prirodan broj.*

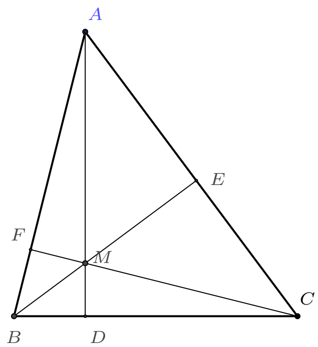
Rješenje:

$$A \cdot \frac{35}{396} = k \Longleftrightarrow A \cdot \frac{396}{35} = k \quad k \in \mathbb{N}$$
$$A \cdot \frac{28}{297} = l \Longleftrightarrow A \cdot \frac{297}{28} = l \quad l \in \mathbb{N}\ .$$

Sada imamo da je $A = NZS\{28, 35\}$, a to je broj $A = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$. □

Zadatak 26. *Visine trougla $\triangle ABC$ sijeku se u tački M. Ako je $|AM| = |BC|$, izračunati veličinu unutarnjeg ugla trougla kod tjemena A.*

Rješenje:

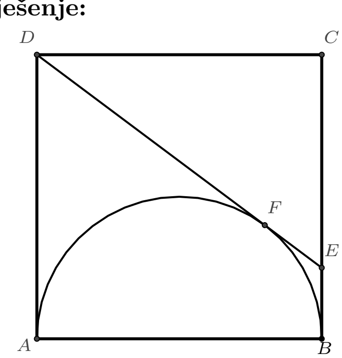


Po pretpostavci je $\overline{AM} = \overline{BC}$. Tada je $\triangle BCE \simeq \triangle AME$ ($\measuredangle BEC = \measuredangle AEM = 90°$, $\overline{AM} = \overline{BC}$, $\measuredangle EBC = \measuredangle EAM$ kao uglovi sa okomitim kracima). Odavde zaključujemo da vrijedi $\overline{AE} = \overline{BE}$. Dakle, $\triangle ABE$ je pravougli, jednakokraki trougao, a to znači da je $\measuredangle EAM + \measuredangle EBC = 90°$. Kako smo već ranije zaključili da su ova dva ugla podudarna, imamo da je ugao kod tjemena A, to jest $\measuredangle BAE$ je $45°$.

□

Zadatak 27. *Dat je kvadrat $\square ABCD$ čija je stranica dužine 1. Nad stranicom AB kao nad prečnikom konstruiran je polukrug. Iz tačke D povuč ena je tangenta na polukrug koja stranicu BC siječe u tački E. Odrediti obim i površinu trougla $\triangle DCE$.*

Rješenje:



Neka je F tačka dodira tangente DE sa polukružnicom. Tada je $\overline{DA} = \overline{DF} = 1$ i $\overline{FE} = \overline{EB} = x$. Onda je $\overline{CE} = 1 - x$ i $\overline{DE} = 1 + x$. Trougao $\triangle CDE$ je pravougli, pa po Pitagorinoj teoremi imamo da je $\overline{DE}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CE}^2 0$. Dakle,

$$\begin{aligned}(1+x)^2 = 1^2 + (1-x)^2 &\iff 1 + 2x + x^2 = 1 + 1 - 2x + x^2\\ &\iff 4x = 1\ .\end{aligned}$$

Imamo da je $x = \dfrac{1}{4}$, a onda je $\overline{DC} = 1$, $\overline{DE} = \dfrac{5}{4}$ i $\overline{CE} = \dfrac{3}{4}$.

Na osnovu svega ovoga sada imamo,

$$O = \overline{DE} + \overline{EC} + \overline{DC} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 3\ ,$$

i

$$P = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{CE}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}\ .$$

□

Zadatak 28. *Broj a je kvadrat prirodnog broja. Dokazati da je a ili djeljiv s 4 ili pri dijeljenu s 8 daje ostatak 1.*

Rješenje: Neka je $a = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Broj k može biti ili paran ili neparan.

a) Neka je k paran prirodan broj, to jest $k = 2n$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Sada je $a = k^2 = (2n)^2 = 4n^2$, te vidimo da je a djeljivo sa 4.

b) Neka je k neparan prirodan broj. to jest $k = 2n - 1$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Sada je $a = k^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$. Brojevi n i $n - 1$ su dva uzastopna prirodna broja pa je jedan od njih paran. Iz ovoga onda vidimo da je $4n(n-1)$ djeljivo i sa 4 i sa 2, dakle i sa 8. Dakle, $a = 4n(n-1) + 1$ u dijeljenju sa 8 daje ostatak 1, što je i trebalo pokazati. □

Zadatak 29. *Dokazati da za pozitivne brojeve x i y vrijedi nejednakost*

$$(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8xy.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje: Neka su x i y pozitivni brojevi. Primjenjujući A-G nejednakost na parove brojeva 1 i x, 1 i y i 1 i xy imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{2} &\geq \sqrt{1\cdot x} \Longrightarrow 1+x \geq 2\sqrt{x}\\
\frac{1+xy}{2} &\geq \sqrt{1\cdot xy} \Longrightarrow 1+xy \geq 2\sqrt{xy}\\
\frac{1+y}{2} &\geq \sqrt{1\cdot y} \Longrightarrow 1+y \geq 2\sqrt{y}\ .
\end{aligned}$$

Množeći ove tri nejednakosti dobijamo

$$(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8\sqrt{x^2y^2}\ ,$$

odnosno

$$(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8\sqrt{xy}\ ,$$

što je i trebalo dokazati.
Jednakost će vrijediti ako je $x=y=1$. □

Zadatak 30. *Izračunati:* $\sqrt{\underbrace{1111...11}_{200\ jedinica} - \underbrace{222...22}_{100\ dvojki}}$.

Rješenje: Primjetimo sljedeće,

$$\underbrace{1111...11}_{200\text{ jedinica}} = \frac{1\overbrace{000...00}^{200\text{ nula}}-1}{9} \quad \text{i} \quad \underbrace{222...22}_{100\text{ dvojki}} = 2\cdot\frac{1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}-1}{9}\ .$$

Sada imamo,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\underbrace{1111...11}_{200\text{ jedinica}} - \underbrace{222...22}_{100\text{ dvojki}}} &= \sqrt{\frac{1\overbrace{000...00}^{200\text{ nula}}-1}{9} - 2\cdot\frac{1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}-1}{9}} = \sqrt{\frac{1\overbrace{000...00}^{200\text{ nula}}-1-2(1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}-1)}{9}}\\
&= \sqrt{\frac{1\overbrace{000...00}^{200\text{ nula}}-2\cdot 1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}+1}{9}} = \sqrt{\frac{\left(1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}\right)^2-2\cdot 1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}+1}{9}}\\
&= \sqrt{\frac{\left(1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}-1\right)^2}{9}} = \frac{1\overbrace{000...00}^{100\text{ nula}}-1}{3} = \underbrace{333...33}_{100\text{ trojki}}\ .
\end{aligned}$$

□

Srednja škola

Zadatak 21. *Ako su a, b i c pozitivni racionalni brojevi, dokazati da je i broj*

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}$$

racionalan.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}\\
&=\sqrt{\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)(ab+ac+bc)^2+(abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2)+(abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)^2+2abc(a+b+c)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2))+(abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\sqrt{\frac{((b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)+abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+ac+bc))^2}}\\
&=\frac{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)+abc(a+b+c)}{abc(ab+ac+bc)}\in\mathbb{Q}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 22. *Ako su $a,b,c>0$ i $abc=3$, dokazati da vrijedi*

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\geq 72\ .$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=(a+b+c-a)((a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2)-(b^3+c^3)\\
&=(b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2+ab+ac+a^2)-(b+c)(b^2-bc+c^2)\\
&=(b+c)(3a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc-b^2+bc-c^2)\\
&=(b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)\\
&=3(b+c)(a(a+b)+c(a+b))\\
&=3(a+b)(a+c)(b+c) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Koristeći A-G nejednakost ($A\geq G$) za svaki par od brojeva a,b i c imamo

$$\begin{aligned}
a+b&\geq 2\sqrt{ab}\\
a+c&\geq 2\sqrt{ac}\\
b+c&\geq 2\sqrt{bc}
\end{aligned}$$

Množenjem ovih nejednakosti dobijamo

$$(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc \qquad (2)$$

Sada iz (1), (2) i polazne pretpostavke $abc \geq 3$ imamo

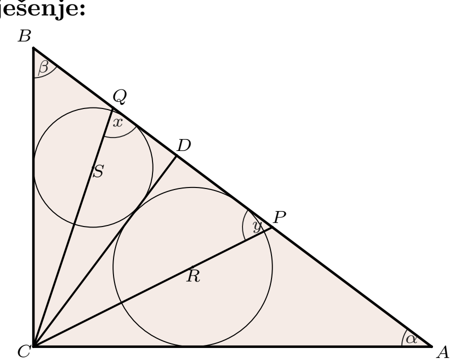
$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c) \geq 24abc \geq 72\ .$$

Komentar: Jednakost će vrijediti ako je $a = b = c = \sqrt[3]{3}$. □

Imširović Amir, 2r, Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac

Zadatak 23. *Neka je CD visina pravouglog trougla $\triangle ABC$. Neka su R i S središta upisanih kružnica u pravouglim trouglovima $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$. Ako prave CR i CS sijeku stranicu AB u tačkama P i Q, dokazati da je $\overline{AC} = \overline{AQ}$ i $\overline{BC} = \overline{BP}$.*

Rješenje:



Neka je $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$. Kako je $\alpha + \beta = 90°$, zaključujemo da vrijedi $\measuredangle ACD = \beta$ i $\measuredangle BCD = \alpha$. Centar upisane kružnice se nalazi u presjeku simetrala uglova, pa iz toga imamo da je $\measuredangle ACP = \measuredangle PCD = \dfrac{\beta}{2}$ i $\measuredangle BCQ = \measuredangle QCD = \dfrac{\alpha}{2}$.
Označimo sa $x = \measuredangle CQA$ i $y = \measuredangle CPB$. Iz $\triangle CDQ$ imamo da je $x = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Kako je $\measuredangle ACQ = \beta + \dfrac{\alpha}{2} = 90° - \alpha + \dfrac{\alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, zaključujemo da je $\measuredangle ACQ = \measuredangle AQC$. Dakle, trougao $\triangle AQC$ je jednakokraki trougao, to jest $\overline{AC} = \overline{AQ}$.

Slično ovome, posmatrajmo sada trougao $\triangle BCP$. Iz trougla $\triangle CPD$ imamo da je $y = 90° - \dfrac{\beta}{2}$. Kako je $\measuredangle BCP = \alpha + \dfrac{\beta}{2} = 90° - \beta + \dfrac{\beta}{2} = 90° - \dfrac{\beta}{2}$, zaključujemo da je $\measuredangle CPB = \measuredangle BCP$, te je trougao $\triangle BCP$ jednakokrak, odnosno vrijedi $\overline{BC} = \overline{BP}$.

□

Zadatak 24. *Za koje vrijednosti promjenljivih x i y izraz*

$$A = \frac{4x^2 + 28x + 11}{9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 12}$$

ima najmanju vrijednost i odrediti $A_{\min}$.

Rješenje: Izvršimo transformaciju polaznog izraza.

$$\begin{aligned} A &= \frac{4x^2 + 28x + 11}{9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 12} = \frac{4x^2 + 28x + 49 - 49 + 11}{(3x - y)^2 + 2(3x - y) + 1 + 11} \\ &= \frac{(2x+7)^2 - 38}{(3x - y + 1)^2 + 11} = -\frac{38 - (2x+7)^2}{(3x - y + 1)^2 + 11} \end{aligned}$$

Izraz A će imati minimalnu vrijednost ako i samo ako izraz $-A$ ima maksimalnu vrijednost,

$$-A = \frac{38 - (2x+7)^2}{(3x - y + 1)^2 + 11}\ .$$

Razlomak je veći što mu je brojnik veći, a imenilac manji. Tako će izraz $-A$ imati najveću vrijednost ako mu je brojnik najveći, to jest $2x + 7 = 0$ i ako mu je imenilac najmanji, to jest $3x - y + 1 = 0$. Dakle, treba riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x + 7 &= 0 \\ 3x - y + 1 &= 0\ . \end{aligned}$$

Iz prve jednačine direktno dobijamo da je $x = -\dfrac{7}{2}$, a ubacujući tu vrijednost u drugu jednačinu dobijamo $y = -\dfrac{19}{2}$. Dakle, za $x = -\dfrac{7}{2}$ i $y = -\dfrac{19}{2}$ imamo da je $A_{\min} = -\dfrac{38}{11}$. □

Jahić Amina, 3d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 25. *Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo, njihov proizvod je tačno deset puta veći od njihovog zbira. Ima li još takvih parova prirodnih brojeva?*

Rješenje: Neka su x i y prirodni brojevi takvi da je $x \cdot y = 10(x + y)$.

$$\begin{aligned} x \cdot y = 10(x+y) &\Longleftrightarrow xy = 10x + 10y \\ &\Longleftrightarrow xy - 10x - 10y = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(y-10) - 10y + 100 - 100 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(y-10) - 10(y-10) = 100 \\ &\Longleftrightarrow (y-10)(x-10) = 100 \ , \end{aligned}$$

pri čemu očigledno mora biti $x > 10$ i $y > 10$. Kako je broj 100 djeljiv sa 1, 2, 4, 5, 10, 25, 50 i 100, razmatrajmo sljedeće slučajeve:

1. $y - 10 = 1$. Tada mora biti $x - 10 = 100$ (Naravno da smo mogli posmatrati i obrat, to jest $y - 100 = 100$ i $x - 10 = 1$, što zbog očigledne simetrije bi dalo isti par rješenja). Odgovarajući par brojeva bi bio $y = 11$ i $x = 110$ (simetrično, $y = 110$ i $x = 11$).
2. $y - 10 = 2$. Tada je $X - 10 = 50$ (Isti komentar o simetričnosti). Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 60$ i $y = 12$, što je poznato nam rješenje.
3. $y - 10 = 4$. Tada je $x - 10 = 25$ (Isti komentar o simetričnosti). Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 35$ i $y = 14$.
4. $y - 10 = 5$. Tada je $x - 10 = 20$ (Isti komentar o simetričnosti). Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 30$ i $y = 15$.
5. $y - 10 = 10$. Tada je $x - 10 = 10$. Odgovarajući par brojeva bi bio $x = 20$ i $y = 20$.

Dakle, mogući su parovi $(11, 110)$, $(12, 60)$, $(14, 35)$, $(15, 30)$ i $(20, 20)$. □

Jahić Amina, 3d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 26. *Naći vrijednost parametra p za kojeg jednačina*

$$x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0,$$

ima četiri realna rješenja koja obrazuju aritmetički niz.

Rješenje: Koeficijenti date jednačine četvrtog stepena su $a = 1$, $b = 0$, $c = -(3p + 2)$, $d = 0$ i $e = p^2$. Prema Vietovim formulama imamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{3}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -(3p+2) \tag{4}$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \tag{5}$$
$$x_1x_2x_3x_4 = p^2 \tag{6}$$

Kako rješenja čine aritmetički niz, stavimo da je $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_1 + 2d$ i $x_4 = x_1 + 3d$. Uvrštavanjem u (3) dobijamo $4x_1 + 6d = 0$, to jest $x_1 = -\dfrac{3d}{2}$. Tada je $x_2 = -\dfrac{d}{2}$, $x_3 = \dfrac{d}{2}$ i $x_4 = \dfrac{3d}{2}$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti za x_1, x_2, x_3 i x_4 u (4) dobijamo vezu

$$5d^2 = 6p + 4 \ ,$$

a uvrštavanjem u (6) imamo

$$\frac{9d^4}{16} = p^2 \iff p = \pm\frac{3d^2}{4} \ .$$

Sada razlikujemo dva slučaja:
Slučaj I: Neka je $p = \frac{3d^2}{4}$. Iz jednakosti $5d^2 = 6p + 4$ dobijamo da je $p = 6$.
Slučaj II: Neka je $p = -\frac{3d^2}{4}$. Iz jednakosti $5d^2 = 6p + 4$ dobijamo da je $p = -\frac{6}{19}$. □

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 27. *Riješiti jednačinu* $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$.

Rješenje: Zbog definicije logaritma mora biti $\sin x > 0$ i $\sin x \neq 1$. Ovo nam daje definiciono područje,

$$x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Prelaskom na bazu 2 i sređivanjem polazne jednačine imamo,

$$\begin{aligned}
\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4 &\iff \frac{\log_2 4}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \sin^2 x} = 4 \\
&\iff \frac{2}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{1}{2\log_2 \sin x} = 4 \\
&\iff \frac{1}{(\log_2 \sin x)^2} = 4 \\
&\iff (\log_2 \sin x)^2 = \frac{1}{4} \\
&\iff \log_2 \sin x = \pm\frac{1}{2} \ .
\end{aligned}$$

Slučaj I : $\log_2 \sin x = \frac{1}{2}$.
Ovo je ekvivalentno sa $\sin x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$, pa u ovom slučaju nemamo rješenje.
Slučaj I : $\log_2 \sin x = -\frac{1}{2}$.
Sada je $\sin x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, iz čega zaključujemo da su rješenja

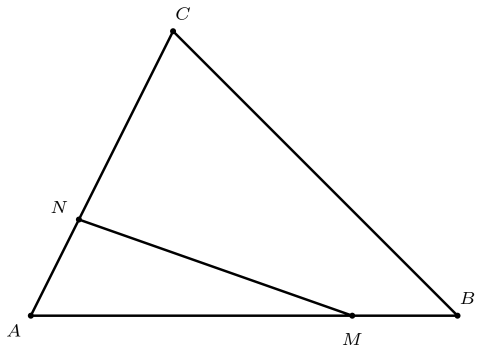
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \text{ i } \ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

□

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 28. *Na stranici AB trougla $\triangle ABC$ uzeta je tačka M tako da je $\overline{AM} = 3\overline{MB}$, a na stranici AC tačka N, tako da vrijedi $2\overline{AN} = \overline{NC}$. Površina trougla je m. Izračunati površinu četverougla $\square MBCN$.*

Rješenje:



$\overline{AM} = 3\overline{MB}$
$2\overline{AN} = \overline{NC}$
$P_{\triangle ABC} = m$
$P_{\square MBCN} = ?$

Neka je $\overline{AB} = c$. tada je $\overline{AM} + \overline{MB} = 3\overline{MB} + \overline{MB} = c$, to jest $\overline{MB} = \dfrac{c}{4}$ i $\overline{AM} = \dfrac{3c}{4}$.
Stavljajući da je $\overline{AC} = b$, imamo $\overline{AN} + \overline{NC} = \overline{AN} + 2\overline{AN} = b$, iz čega je $\overline{AN} = \dfrac{b}{3}$ i $\overline{NC} = \dfrac{2b}{3}$.
Sada imamo,

$$P_{\triangle AMN} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \sin \measuredangle MAN}{2} = \frac{\frac{3}{4}c \cdot \frac{1}{3}b \cdot \sin \measuredangle MAN}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \measuredangle BAC}{2} \ .$$

Dakle, $P_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{4} P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4}m$. Sada imamo,

$$P_{\square MBCN} = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle AMN} = m - \frac{1}{4}m = \frac{3}{4}m \ .$$

□

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 29. *Ako za uglove trougla vrijedi jednakost*

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2} \ ,$$

tada je trougao jednakostranični. Dokazati!

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 - \cos(\alpha+\beta) + 1 - \frac{3}{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - (1+\cos(\alpha+\beta)) - \frac{1}{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} = 0 \ / \cdot (-2) \\
&\Longleftrightarrow 4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da mora vrijediti

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \tag{7}$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \ . \tag{8}$$

Iz (7) onda imamo da je $\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, to jest $\alpha=\beta$. Međutim, ako jednakost uglova α i β iskoristimo u (8) onda dobijamo

$$\begin{aligned}
&2\cos\alpha-\cos 0=0\\
&\iff 2\cos\alpha=1\\
&\iff \cos\alpha=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vidimo da je $\alpha=60°$, a time je i $\beta=60°$. Dakle, mora biti $\gamma=60°$, te je trougao jednakostraničan. □

Jahić Amina, 3d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 30. *Odrediti x-ti član geometrijskog niza čija su prva tri člana:* $11-x^{\log x}$, $x^{\log x}-5$ *i* $35-x^{\log x}$.

Rješenje: Radi lakšeg zapisa stavimo da je $x^{\log x}=t$, $x>0$. Tada su članovi našeg niza: $a_1=11-t$, $a_2=t-5$ i $a_3=35-t$. Kako je $a_2^2=a_1\cdot a_3$, to jest

$$\begin{aligned}
&(t-5)^2=(11-t)(35-t)\\
&\iff t^2-10t+25=385-46t+t^2\\
&\iff 36t=360\ ,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $t=10$. Dakle, $x^{\log x}=10$, iz čega nakon logaritmovanja dobijamo jednačinu $\log^2 x=1$, to jest $\log x=\pm 1$.

Slučaj I : $\log x=1$. Tada je $x=10$, te te su članovi našeg niza $a_1=1$, $a_2=5$ i $a_3=25$. Iz ovoga vidimo da je $q=5$. Sada imamo

$$a_x=a_{10}=a_1\cdot q^9=1\cdot 5^9=5^9\ .$$

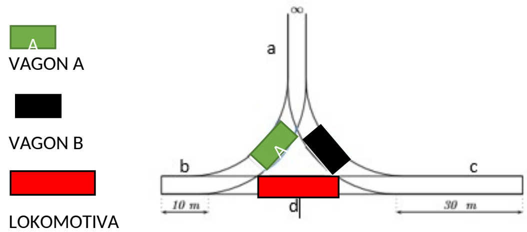
Slučaj II : $\log x=-1$. Tada je $x=10^{-1}=\frac{1}{10}$, a to nije prirodan broj, te u ovom slučaju nemamo rješenja. □

Fazlić Amina, 4d, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 46–47

Rješenje nagradnog zadatka – Problem kretanja

Vol. 1 No. 2 (2018): Evolventa

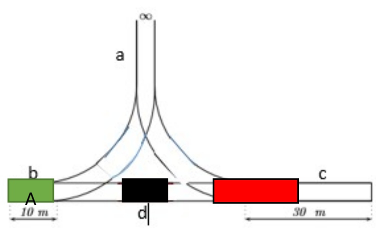


Označimo pruge sledećim slovnim oznakama :

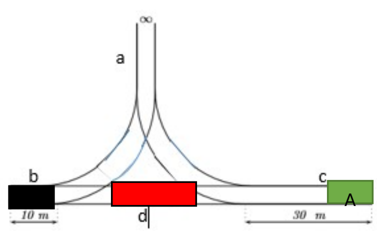
- a- Pruga beskonačne dužine
- b- Pruga dužine 10 m
- c- Pruga dužine 30 m
- d- Pruga gdje se nalazi lokomotiva u početnom položaju

Rješenje zadatka :

1) Lokomotiva ide u put c , a zatim gura vagon B u put a i okača ga
2) Lokomotiva gura vagon A u put b i otkača ga
3) Vraća se u put a i zakača vagon B i vuče ga u put c, a zatim ga gura u put d i otkača ga.
   Položaj bi bio kao na slici :

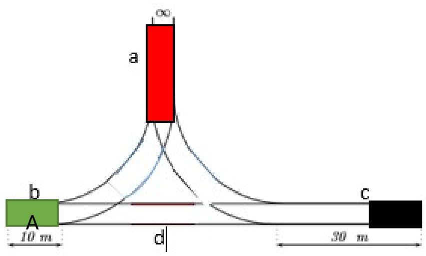


4) Lokomotiva ide u put b i zakača vagon A pa ga vuče u put a, a zatim ga gura u put c i otkača ga.
5) Gura vagon B u put b i otkača ga.
   Položaj bi bio kao na slici :

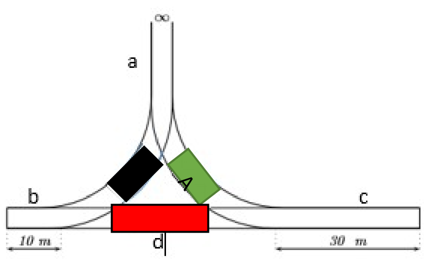


6) Lokomotiva zakača vagon A i vuče ga u put a, a zatim ga gura u put b
7) Zakača i vagon B (sada imamo kompoziciju LAB) i vuče ih u put a

8) Gura oba vagona u put c i otkača vagon B
9) Vuče vagon A u put a , a zatima ga gura u put b i otkača ga
   Položaj bi bio kao na slici :



10) Lokomotiva zakača vagon B i vuče ga u put a , a zatim gura na početno mjesto vagona A i otkača ga .
11) Lokomotiva ide preko puteva a-c-d do vagona A i zakača ga, a zatima ga vuče u put c i onda gura na početno mjesto vagona B i otkača ga .
12) Lokomotiva se preko puta c vraća na početni položaj.
    Položaj bi bio kao na slici :

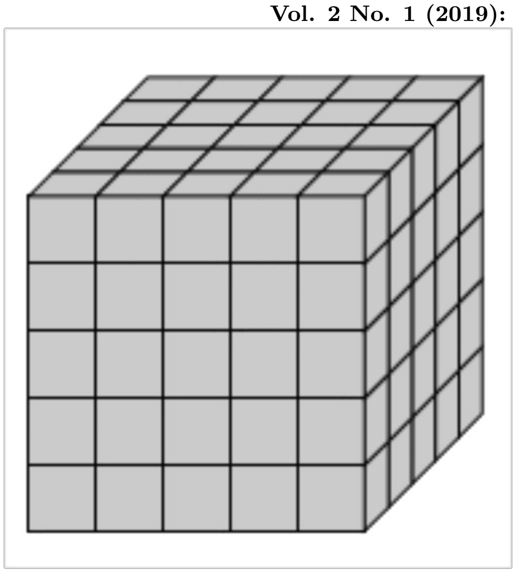


Učenik : Mahir Suljkanović 8 b OŠ '' Rainci Gornji ''

EVOLVENTA (JAMTK) 3(1) (2020), 48–51

Rješenje nagradnog zadatka – Problem sječenja

Vol. 2 No. 1 (2019): Evolventa



Početna kocka 5x5x5 = 125 kocki 1x1x1

Manje kocke su zapremina :

1x1x1=1^3=1

2x2x2=2^3=8

3x3x3=3^3=27

4x4x4=4^3=64

Označimo sa a,b,c,d varijable gdje je po uslovu zadatka $\{a, b, c, d\} \in N$ tako da vrijedi

ax64+**b**x27+ **c**x8+**d**x1=125 (Zbir zapremina svih kocki je 125).

Ujedno je i a+b+c+d rješenje zadatka i mi tražimo min(a+b+c+d).

Teoretski imamo pet slučajeva (Izdvajamo maksimalne kocke zapremine 1,8,27,64 i 125)

Zapremine 1 i 125 nećemo razmatrati jer je u prvom slučaju to maksimalan broj kocki , a u drugom kocka ostaje cijela tj nema sječenja.

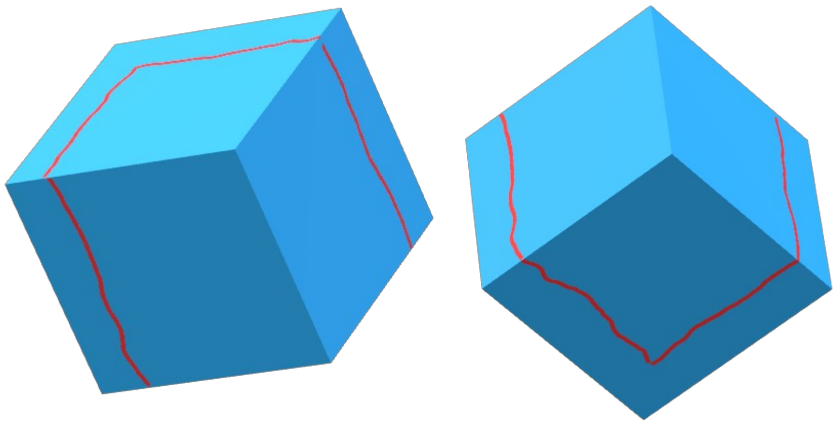
1 slučaj (max kocka 4x4x4)

Zbog koeficijenata sa kojim se množi varijabla **a** može biti samo 1 (iz kocke 5x5x5 možemo izdvojiti samo 1 kocku 4x4x4) pa slijedi :

1x64+bx27+cx8+dx1=125

bx27+cx8+dx1=125-64=61

Kada izdvojimo kocku 4x4x4 ostaje nam samo po 1 red od kocke 5x5x5 tako da ne možemo izrezati nijednu kocku ni veličine 2x2x2 ni 3x3x3. Prikaz je na grafiku ispod :



Odatle slijedi da je b=0 i c=0 pa je :

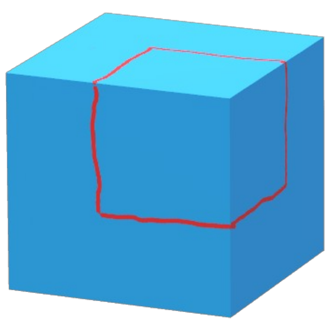
dx1=61

Znači ukupan broj kocki a+b+c+d u ovom slučaju je 1+0+0+61=62

2 slučaj (max kocka 3x3x3)

Znači sada je a=0 i b=1 (jer iz kocke 5x5x5 možemo izdvojiti samo jednu kocku 3x3x3)

Slika za ovaj slučaj :



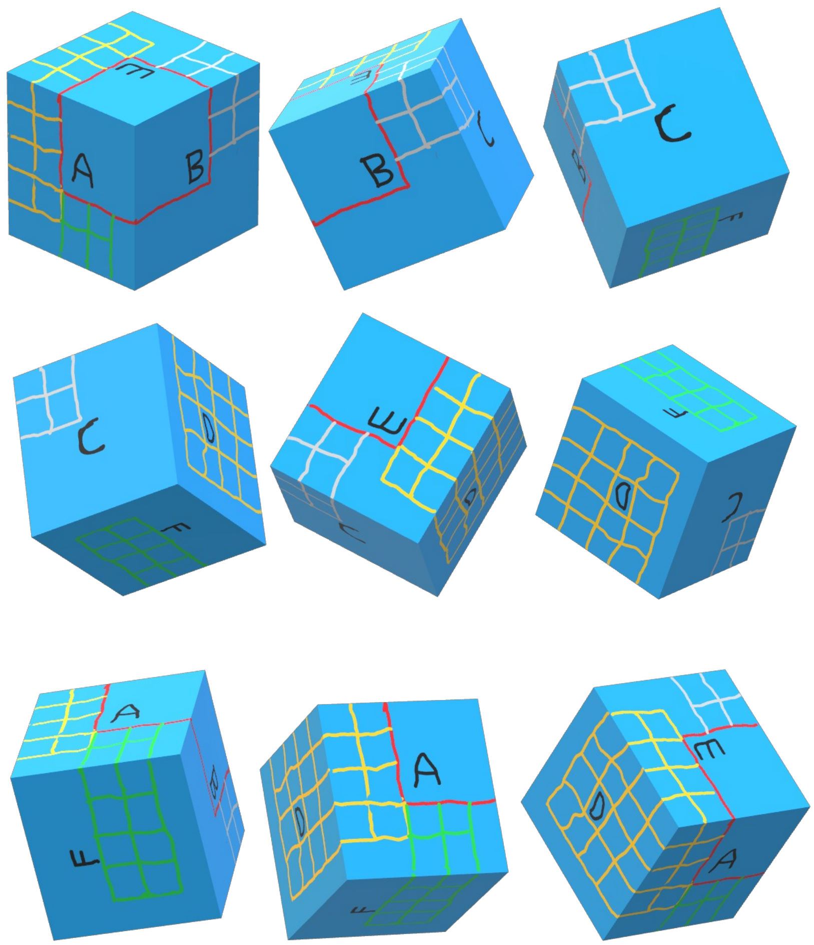
Iz početnog uslova **a**x64+**b**x27+ **c**x8+**d**x1=125 za ovaj slučaj vrijedi :

1x27+**c**x8+**d**x1=125

cx8+**d**x1=125-27=98

Sada treba izdvojiti max broj kocki 2x2x2 jer tako smanjujemo ukupan broj kocki .

Grafički ćemo prikazati tu situaciju (program Paint 3D) , a radi jasnije slike stranice kocke su označene sa A,B,C,D u horizontali u smjeru suprotnom od kazaljke na satu dok je gornja strana E , a donja F.



Iz grafičkog prikaza vidimo da maksimalan broj kocki 2x2 iznosi 7 (4 žute+2 zelene +1 siva)

Iz toga slijedi da je c=7 pa je gornja jednačina :

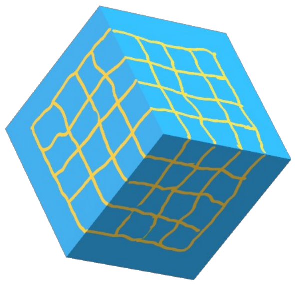
7x8+**d**x1=98 tj **d**=98-56=42 (ostalo je 42 kocki 1x1)

Broj kocki a+b+c+d u ovom slučaju je 0+1+7+42=50

3 slučaj (max kocka 2x2x2)

Iz početnog uslova **a**x64+**b**x27+ **c**x8+**d**x1=125 za ovaj slučaj vrijedi :

cx8+**d**x1=125



Maksimalan broj kocki 2x2x2 je 8 , a isto kao i u prvom slučaju ostaje samo po jedan red tako da su sve preostale kocke 1x1x1.

8x8+dx1=125

d=125-64=61

Broj kocki a+b+c+d u ovom slučaju je 0+0+8+61=69

Znači minimalan broj kocki za postavljene uslove u zadatku je 50.

Učenik : Mahir Suljkanović 8 b OŠ '' Rainci Gornji ''

Rješavatelji zadataka 21 – 30 i nagradnih zadataka

Osnovna škola

OŠ "Sveti Franjo" Tuzla, *Žepić Lana* (6a): 21,22;
OŠ "Hasan Kikić" Gradačac, *Halilović Amel* (9b): 24;

Srednja škola

Gimanzija ""Mustafa Novalić" Gradačac - sljedeći učenici: *Imširović Amir* (2r): 22.; *Ahmetović Ernesa* (2r): 25.;
Gimanzija ""Ismet Mujezinović" Tuzla - sljedeći učenici: *Jahić Amina* (3d): 22., 24., 25., 27., 28., 29.; *Fazlić Amina* (4d): 22., 24., 26., 27., 28., 30.;

Nagradni zadatak: Problem kretanja

Mahir Suljkanović 8b OŠ "Rainci Gornji"
Kao prvo tačno pristiglo rješenje nagrađeno je sa 50 KM.

Nagradni zadatak: Problem sječenja

Mahir Suljkanović 8b OŠ "Rainci Gornji"
Kao prvo tačno pristiglo rješenje nagrađeno je sa 50 KM.