EVOLVENTA (JAMTK) 4(1) (2021), 2 – 16

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Logaritmi, logaritamske jednadžbe i nejednadžbe

Mehmed Nurkanović[a], Zehra Nurkanović[a]

[a]*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se, nakon razmatranja osnovnih osobina logaritma i logaritamske funkcije, detaljnije razmatraju logaritamske jednadžbe i nejednadžbe, s i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednadžbi i nejednadžbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Pojam logaritma i sve što je vezano za njega predstavlja vrlo kompleksnu problematiku u nastavi matematike srednjih škola, kako za učenike, tako i za njihove nastavnike. Nastavnici obično nemaju odgovarajuću literaturu za pripremu predavanja, a učenicima se to prezentira skromno i s posvećivanjem nedovoljno vremena za dobro razumijevanje te problematike. I, kako to najčesće biva, izostane prijeko neophodna motivacija, kojom bi trebalo opravdati izučavanje logaritama. Prije svega, potrebno je napraviti historijski osvrt razvoja logaritama (zbog čega su se pojavili i kako se razvijala teorija koja je zadovoljavala potrebe prakse, posebno u pomorstvu pri navigaciji). Naravno, pri tome, ne treba štedjeti previše vrijeme na ovim uvodnim činjenicama budući da će to rezultirati boljim razumijevanjem logaritama i njihove primjene. Samom pojmu logaritma treba pristupiti lagano, bez žurbe, s dosta primjera, a tek onda ići na njihovu primjenu u rješavanju logaritamskih jednadžbi s i bez parametara.

Slično kako je to pokazano u [5, 6], u slučaju iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi, kao i u slučaju eksponencijalnih jednadžbi i nejednadžbi, i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe su također poprilično nezgodne za ispitivanje. Logaritamske jednadžbe spadaju u tzv. transcedentne jednadžbe i bitno se razlikuju od algebarskih jednadžbi. No, uvijek se svode na neku algebarsku jednadžbu. I za njih naravno ne postoji opći postupak rješavanja. Tako smo u mogućnosti riješiti samo neke relativno jednostavne tipove logaritamskih jednadžbi i nejednadžbi. U ovom radu bit će date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednadžbama i nejednadžbama s i bez parametara. Budući da se i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe vrlo često pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola, to nam daje razlog više za motivaciju pri pisanju ovog rada. Poseban problem je, kao i kod drugih jednadžbi elementarne matematike, kad se zahtijeva diskusija rješenja logaritamske jednadžbe ili nejednadžbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

Kako bi kvalitetno mogao pratiti naredno izlaganje, čitatelj treba dobro da poznaje teoriju i primjene kvadratnih, eksponencijalnih i iracionalnih jednadžbi i nejednadžbi (v. [1–7]). Prije nego pristupimo detaljnijem proučavanju ovih jednadžbi i nejednažbi, upoznajmo se prvo s pojmom logaritma i logaritamskom funkcijom i njenim osobinama, koje će nam biti od velike koristi kasnije.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: logaritam, funkcija, jednadžba, nejednadžba
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: april 2021.

2. Pojam logaritma

Promatrajmo jednadžbu

$$b^x = a, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Iz praktičnih razloga zanimaju nas samo one vrijednosti za a i b za koje jednadžba (1) ima jedinstveno rješenje. Naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.1. *Jednadžba (1) ima jedinstveno rješenje samo kad je* $a > 0$ *i* $0 < b \neq 1$.

Proof. Imamo nekoliko kvalitativno različitih slučajeva.

1° Za $a = b = 0$ jednadžba (1) je oblika $0^x = 0$, čije je rješenje skup svih pozitivnih realnih brojeva.

2° Za $a = 0, b \neq 0$ jednadžba (1) ima oblik $b^x = 0$, a ona očito nema rješenja.

3° Za $a \neq 0, b = 0$ jednadžba (1) je oblika $0^x = a$, i ona nema rješenja.

4° Za $a < 0$ ili $b < 0$ jednadžba (1) nekad ima rješenje, a nekad nema, tj. nema uvijek rješenja (npr. jednadžba $(-2)^x = 8$, kao ni jednadžba $2^x = -8$ nemaju rješenja).

5° Pretpostavimo da je sada $b = 1$. Ukoliko je $a = 1$, tada jednadžba (1) ima oblik $1^x = 1$ i skup njenih rješenja je cijeli skup realnih brojeva. Ako je, pak, $a \neq 1$, tada očito jednadžba (1) nema rješenja.

Odbacujući sve navedene slučajeve slijedi zaključak teorema. Naime, u slučaju kada je $a > 0$ i $0 < b \neq 1$, znamo da je $y = b^x$ eksponencijalna funkcija i da svakom realnom broju x odgovara tačno jedna pozitivna realna vrijednost b^x koju možemo označiti s a. $\square$

Jedinstveno rješenje jednadžbe (1) ćemo nazvati **logaritmom** broja a za bazu b i pisati $x = \log_b a$. Preciznije se to može iskazati sljedećom definicijom.

Definicija 2.2. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a > 0$ *i* $0 < b \neq 1$. ***Logaritmom*** *broja* a *za bazu* b *nazivamo broj* x *kojim treba stepenovati broj* b *da bi se dobio broj* a, *tj. za koji vrijedi* $b^x = a$. *Taj broj označavamo s* $x = \log_b a$. *Dakle, simbolički zapisano*

$$x = \log_b a \iff b^x = a \quad (a > 0,\ 0 < b \neq 1)\,. \tag{2}$$

Primjedba 2.3. *Napomenimo da je u slučaju* $b = 10$ *uobičajeno izostaviti pisanje baze u logaritmu. Tako je* $\log x = \log_{10} x$, $x > 0$. *Logaritmi čija je baza* 10 *zovu se dekadski logaritmi.*

Primjer 2.4. *Naći: a)* $\log_2 \dfrac{1}{32}$, *b)* $\log_{\frac{1}{3}} 81$.

Rješenje: Označimo li traženi logaritam s x, prema definiciji (2), imamo:

a) $\log_2 \dfrac{1}{32} = x \iff 2^x = \dfrac{1}{32} \iff 2^x = 2^{-5} \iff x = -5$,

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = x \iff \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 81 \iff x = -4.$ $\square$

Primjer 2.5. *Odrediti* x *ako je: a)* $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, *b)* $\log_x \dfrac{1}{27} = 3$.

Rješenje: a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3 \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = x \iff x = 8$,

b) $\log_x \dfrac{1}{27} = 3 \iff x^3 = \dfrac{1}{27} \iff x = \dfrac{1}{3}.$ $\square$

Važno je istaknuti neke bitne osobine logaritama. Tako iz (2) očigledno slijede jednakosti

$$\log_b b^x = x, \quad b^{\log_b a} = a. \tag{3}$$

Sljedeće osobine su poznate kao *logaritamska pravila*.

1° *Prvo logaritamsko pravilo* možemo iskazati u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 2.6. *Neka je* $0 < b \neq 1$. *Tada za sve* $x > 0$, $y > 0$ *vrijedi*

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y. \tag{4}$$

Proof. Zbog pretpostavki $0 < b \neq 1$, $x > 0$, i $y > 0$, postoje realni brojevi

$$A = \log_b x, \quad B = \log_b y,$$

što prema definiciji (2) znači da je $b^A = x$, $b^B = y$. Kako je $xy > 0$, zaključujemo da postoji $\log_b xy$ i da vrijedi

$$b^{\log_b xy} \overset{(3)}{=} xy = b^A \cdot b^B = b^{A+B} = b^{\log_b x + \log_b y},$$

odakle slijedi (4). □

2° Sljedećim teoremom iskazuje se tzv. *drugo logaritamsko pravilo.*

Teorem 2.7. *Neka je* $0 < b \neq 1$, $t \in \mathbb{R}$. *Za sve* $x > 0$ *vrijedi*

$$\log_b x^t = t \log_b x. \tag{5}$$

Proof. Zbog pretpostavki $0 < b \neq 1$, $x > 0$, i $t \in \mathbb{R}$, postoji realan broj $A = \log_b x$, a zbog $x^t > 0$ postoji $\log_b x^t$. Imamo

$$b^{\log_b x^t} \overset{(3)}{=} x^t \overset{(3)}{=} \left(b^{\log_b x}\right)^t = b^{t \log_b x} \implies \log_b x^t = t \log_b x.$$

□

Kao neposrednu posljedicu prethodna dva pravila dobijamo i dva nova pravila iskazana u obliku sljedeća dva teorema.

Teorem 2.8. *Neka je* $0 < b \neq 1$, $t \in \mathbb{R}$. *Tada za sve* $x > 0$, $y > 0$ *vrijedi*

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y. \tag{6}$$

Proof. Kako je $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, prema prva dva pravila imamo

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b xy^{-1} \overset{(4)}{=} \log_b x + \log_b y^{-1} \overset{(5)}{=} \log_b x - \log_b y.$$

□

Teorem 2.9. *Ako je* $0 < b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, *tada za sve* $x > 0$, *vrijedi*

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x. \tag{7}$$

Proof. $\log_b \sqrt[n]{x} = \log_b x^{\frac{1}{n}} \overset{(5)}{=} \frac{1}{n} \log_b x.$ □

Primjer 2.10. *Odrediti* x *ako je:*

a) $\log_3 x = \log_3 9 + \log_3 2 - \log_3 3$,

b) $\log x = \frac{1}{3}\left[\log x + \frac{1}{2}(\log y - \log z)\right]$.

Rješenje: Primjenom logaritamskih pravila imamo:

a) $\log_3 x = \log_3 \frac{9 \cdot 2}{3} = \log_3 6 \;\Rightarrow\; x = 6,$

b) $\frac{2}{3} \log x = \frac{1}{6} \log \frac{y}{z} \implies \log x = \frac{1}{4} \log \frac{y}{z} \implies \log x = \log \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{4}} \implies x = \sqrt[4]{\frac{y}{z}}.$ □

Navedimo još nekoliko važnih osobina logaritama.

1. Za $0 < b \neq 1$, vrijedi $b^0 = 1 \iff \log_b 1 = 0$. Dakle,

$$\log_b 1 = 0, \quad 0 < b \neq 1. \tag{8}$$

2. Za $0 < b \neq 1$, vrijedi $b^1 = b \iff \log_b b = 1$. Dakle,

$$\log_b b = 1, \quad 0 < b \neq 1. \tag{9}$$

3. Vrijedi

$$\log_b a = \log_{b^n} a^n, \quad a > 0,\; 0 < b \neq 1,\; n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Zaista, označimo li s $A = \log_{b^n} a^n$, tada je $(b^n)^A = a^n$, odakle slijedi $b^A = a$, a odavde je $A = \log_b a$.

4. Neka je $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$. Logaritmiranjem jednakosti $b^{\log_b a} = a$ za bazu a, dobijamo $\log_a b^{\log_b a} = \log_a a = 1$, odnosno primjenom drugog logaritamskog pravila i formule (9): $\log_b a \cdot \log_a b = 1$. Dakle,

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad 0 < a \neq 1,\; 0 < b \neq 1. \tag{11}$$

Ova se osobina može smatrati i specijalnim slučajem naredne osobine.

5. Neka je $0 < b \neq 1$, $0 < c \neq 1$, $a > 0$. Označimo s $\log_b a = x$, odakle je $b^x = a$. Nakon logaritmiranja posljednje jednakosti (koristeći bazu c), dobijamo $x \log_c b = \log_c a$, odnosno $\log_b a \log_c b = \log_c a$. Prema tome, vrijedi osobina

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \quad 0 < b \neq 1,\; 0 < c \neq 1,\; a > 0. \tag{12}$$

Osobina (12) je od velike praktične koristi kada je potrebno preći na logaritam s novom bazom.

6. Vrijedi osobina

$$\log_{b^t} x = \frac{1}{t} \log_b x, \quad 0 < b \neq 1,\; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\; x > 0.$$

Zaista, primjenom osobine **4**. dvaput i drugog logaritamskog pravila, dobijamo

$$\log_{b^t} x = \frac{1}{\log_x b^t} = \frac{1}{t \log_x b} = \frac{1}{t} \log_b x.$$

Primjer 2.11. *Ako je* $\log_{30} 3 = x$, $\log_{30} 5 = y$, *izračunati* $\log_{30} 8$.

Rješenje: Primjenom gornjih osobina logaritama, imamo

$$\begin{aligned} \log_{30} 8 &= \log_{30} 2^3 = 3 \log_{30} 2 = 3 \log_{30} \frac{30}{3 \cdot 5} \\ &= 3 \left(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5\right) = 3 \left(1 - x - y\right). \end{aligned}$$

□

Primjer 2.12. *Odrediti* x *ako je* $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

Rješenje: Primjenom logaritamskih pravila, dobijamo

$$6 = \frac{1}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_x \sqrt{3}} + \frac{1}{\log_x \frac{1}{3}} = \frac{1}{\log_x 3} + \frac{2}{\log_x 3} - \frac{1}{\log_x 3},$$

odakle slijedi

$$\frac{2}{\log_x 3} = 6 \iff \log_x 3 = \frac{1}{3} \iff x^{\frac{1}{3}} = 3 \iff x = 27.$$

□

Primjer 2.13. *Dokazati jednakost*

$$\frac{1}{\log_a A} + \frac{1}{\log_{a^2} A} + ... + \frac{1}{\log_{a^n} A} = \frac{n\,(n+1)}{\log_a A^2} \quad (0 < A \neq 1,\ 0 < a \neq 1,\ n \in \mathbb{N})\,.$$

Rješenje: Koristeći formulu (11), lijeva strana gornje jednakosti ima oblik

$$\begin{aligned} \log_A a + \log_A a^2 + ... + \log_A a^n &= (1 + 2 + \cdots + n) \log_A a = \frac{n\,(n+1)}{2} \log_A a \\ &= \frac{n\,(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{\log_a A} = \frac{n\,(n+1)}{\log_a A^2}. \end{aligned}$$

□

3. Logaritamska funkcija

Definicija 3.1. *Eksponencijalna funkcija*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1, \quad (x \in \mathbb{R})$$

je bijektivna, pa postoji njoj inverzna funkcija

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1, \quad \left(x \in \mathbb{R}^+\right)$$

koju zovemo ***logaritamskom funkcijom.***

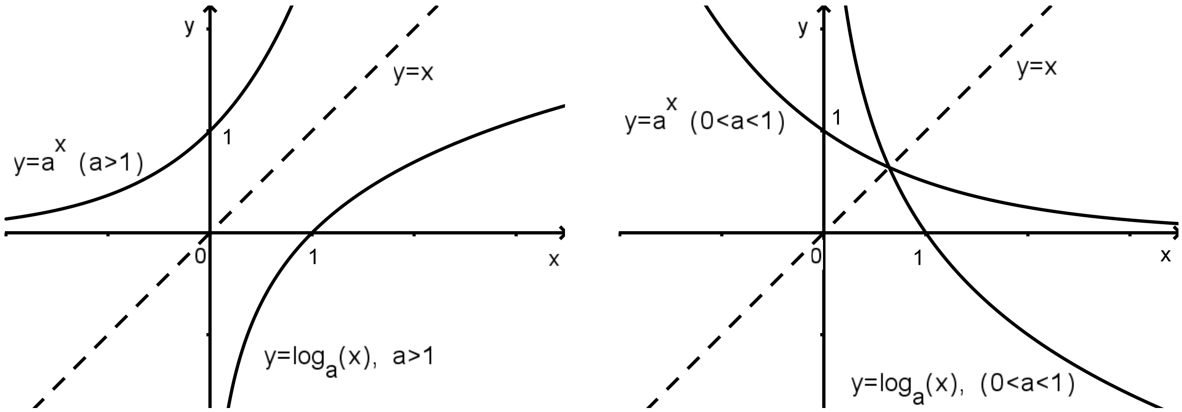
Na osnovu definicije logaritma vrijedi ekvivalencija

$$\log_a x = y \iff x = a^y, \quad x > 0, \quad 0 < a \neq 1.$$

Logaritamska funkcija ima sljedeće osobine (v. grafike na Slici 1):

1. Funkcija $y = \log_a x$ definirana je za svako $x > 0$, a uvjet za bazu je $0 < a \neq 1$.
2. Logaritamska funkcija je bijektivna, pa jednakim brojevima (numerusima) pripadaju jednaki logaritmi za istu bazu i obrnuto, tj.

$$x_1 = x_2 \iff \log_a x_1 = \log_a x_2 \tag{13}$$



(a) (b)

Slika 1: Grafici logaritamskih funkcija: (a) $a > 1$, (b) $0 < a < 1$.

3. Znak logaritamske funkcije

$$\text{za} \quad a > 1 \qquad \text{imamo:} \quad \begin{cases} \log_a x < 0 \iff (0 < x < 1), \\ \log_a x > 0 \iff x > 1, \end{cases}$$

$$\text{za} \quad 0 < a < 1 \quad \text{imamo:} \quad \begin{cases} \log_a x > 0 \iff (0 < x < 1), \\ \log_a x < 0 \iff x > 1. \end{cases}$$

4. Logaritamska funkcija ima jednu jedinu nulu (vidjeti (8)), a to je broj 1, za bilo koju bazu $0 < a \neq 1$, tj.

$$\log_a x = 0 \iff x = 1. \tag{14}$$

5. Za $a > 1$ funkcija je strogo rastuća, tj. za

$$a > 1: \quad x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2. \tag{15}$$

6. Za $0 < a < 1$ funkcija je strogo opadajuća, tj. za

$$0 < a < 1: \quad x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2. \tag{16}$$

◦ ◦ ◦

Zadaci za samostalan rad

1. Izračunati vrijednosti logaritama:

a) $\log_2 \dfrac{1}{128}$; b) $\log_{\sqrt{2}} 8$; c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$; d) $\log_2 \sqrt[3]{512}$; e) $\log_3 \sqrt[5]{243}$.

2. Odrediti x iz jednadžbi:

a) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$; b) $\log_{\sqrt{2}} x = -8$; c) $\log_{3\sqrt{3}} x = -2$; d) $\log_{4\sqrt{5}} x = -\dfrac{2}{3}$.

3. Izračunati vrijednost izraza:

a) $\frac{5}{4}\log_3 81 + 3\log_{\frac{1}{2}} 16 - 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$;

b) $\log_2 \log_2 16 + \log_3 \log_3 27$; c) $5^{3-\log_5 25} + 3^{2-\log_3 3} - 2^{4-2\log_{25} 5}$.

4. Odrediti oblast definicije (definiciono područje) funkcija:

a) $y = \log_3(1 - x^2)$; b) $y = \log(2x^2 + 5x - 3)$.

5. Logaritmirati sljedeće izraze:

a) $x = \dfrac{5a^3 y}{b^4 \sqrt[3]{ay^2}}$; b) $x = \left(\dfrac{c^6 z^2 \sqrt{cd}}{\sqrt[4]{ab^3}}\right)^2$; c) $x = \sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{(y+z)^2 \sqrt[3]{b^2}}\right)^2}$.

6. Odrediti x iz jednadžbi:

a) $\log x = \log 3 + 4\log n - \log 5 - 5\log m - \log p$;

b) $\log x = \log 5 + \frac{1}{2}(\log a + 2\log b) - 2\log d - \frac{2}{5}\log c$.

7. Bez upotrebe logaritamskih tablica ili kalkulatora ispitati šta je veće: $\log_2 3$ ili $\log_3 4$.

8. Dokazati da je

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$$

ako su a i b dužine kateta, a c dužina hipotenuze pravouglog trougla.

4. Logaritamske jednadžbe

Definicija 4.1. ***Logaritamske jednadžbe*** *su jednadžbe u kojima se nepoznanica javlja i pod znakom logaritma.*

Kod ovih jednadžbi vrlo važna karakteristika je njeno definiciono područje. Kao što smo vidjeli u prethodnoj sekciji, izraz

$$\log_{b(x)} a(x)$$

je definiran ako i samo ako je $0 < b(x) \neq 1$, $a(x) > 0$.

Slično kao kod iracionalnih jednadžbi, mogu se riješiti samo neki relativno jednostavniji primjeri logaritamskih jednadžbi. Logaritamsku jednadžbu treba, koristeći se osobinama logaritama, pokušati dovesti na oblik

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Ova se jednadžba zatim rješava koristeći se definicijom logaritma i osobinom logaritamske funkcije (13). Naime, logaritamska jednadžba

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \tag{17}$$

ekvivalentna je sistemu

$$f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0 \ \wedge \ f(x) = g(x). \tag{18}$$

Zajednička rješenja prve dvije nejednadžbe sistema određuju domenu jednadžbe (17), a jednadžba $f(x) = g(x)$ slijedi iz formule (13). Pri tome se podrazumijeva uključivanje i definicionih područja funkcija f i g.

Ako umjesto jednadžbe (17) imamo jednadžbu

$$\log_a f(x) = k, \tag{19}$$

možemo je svesti na oblik (17), stavljajući $\log_a a^k$ umjesto k, ili, koristeći definiciju logaritma (v. formulu (3)), možemo je odmah svesti na ekvivalentnu jednadžbu

$$f(x) = a^k.$$

Ukoliko svi logaritmi u datoj jednadžbi nemaju istu bazu, prvo ih treba svesti na istu bazu, koristeći neku od formula (11) ili (12).

Istaknimo sada jednu vrlo važnu činjenicu:

Primjedba 4.2. *Logaritam $\log_b a^p$, za $a < 0$, $0 < b \neq 1$ i p paran broj,* ***ne smijemo zamijeniti*** *s $p \log_b a$, nego s $p \log_b |a|$. Dakle, vrijedi*

$$\log_b a^p = p \log_b |a|, \quad a < 0,\ 0 < b \neq 1 \ \text{ i } p \text{ paran broj.} \tag{20}$$

Primjer 4.3. *Riješiti jednadžbu*

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3 .$$

Rješenje: $DP : (x+2)^2 \neq 0,\ 4 - x > 0,\ x + 6 > 0$, tj. $x \in \langle -6, -2\rangle \cup \langle -2, 4\rangle$.
Prema gornjoj napomeni, odnosno prema (20), data jednadžba, uz uvjet za DP, je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot 2 \log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} &= 3 \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}} (x+6) \\ &\iff \log_{\frac{1}{4}} (|x+2| \cdot 4) = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)(x+6) \\ &\iff 4|x+2| = (4-x)(x+6) \end{aligned}$$

1° $x \in \langle -6, -2\rangle$

U ovom slučaju imamo

$$-4(x+2) = (4-x)(x+6) \iff x = 1 - \sqrt{33},$$

jer $x = 1 + \sqrt{33} \notin \langle -6, -2\rangle$.

2° $x \in \langle -2, 4\rangle$, kada imamo

$$4(x+2) = (4-x)(x+6) \iff x = 2,$$

jer $x = -8 \notin \langle -2, 4\rangle$.

$R : x = 2 \vee x = 1 - \sqrt{33}$. □

Primjedba 4.4. *Nekada je definiciono područje vrlo teško odrediti. U takvim slučajevima se ne treba iscrpljivati na tom problemu, već je mnogo zgodnije pronaći sve kandidate za rješenje i neposrednim uvrštvanjem u polaznu jednadžbu odrediti koje je od njih zaista rješenje te jednadžbe.*

Primjer 4.5. *Riješiti jednadžbu*

$$\log_{x^3+2x^2-3x+5} \left(x^3 + 3x^2 + 2x - 1\right) = \log_{2x} x + \log_{2x} 2.$$

Rješenje: Skup dozvoljenih vrijednosti za x (def. područje) je rješenje sistema nejednadžbi

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 1 > 0,\ 0 < x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \neq 1,\ 0 < 2x \neq 1. \tag{21}$$

Ovo definiciono područje se ne može tako jednostavno odrediti (osim, eventualno grafički). Zbog toga ćemo postupiti prema preporuci u prethodnoj napomeni. Naime, uz uvjet (21), data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\log_{x^3+2x^2-3x+5} \left(x^3 + 3x^2 + 2x - 1\right) = 1 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff x = 1,\ x = -6.$$

Pošto uvjet (21) zadovoljava samo $x = 1$, zaključujemo da je rješenje jednadžbe $x = 1$. □

Primjer 4.6. *Riješiti jednadžbu*

$$x^{\log^2 x+\log x^3+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

Rješenje: $DP: x>0$. Kako je

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}=x,$$

data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned}\left(x^{\log^2 x+3\log x+3}=x\right) &\Longleftrightarrow \left[\log x^{\log^2 x+3\log x+3}=\log x \ \wedge \ \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[\left(\log^2 x+3\log x+3\right)\log x=\log x \ \ \wedge \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[\left(\log^2 x+3\log x+3-1\right)\log x=0 \ \ \wedge \ \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[\left(x=1 \ \vee \ \log^2 x+3\log x+2=0\right) \ \wedge \ x>0\right]\\ &\Longleftrightarrow \left(x=1 \ \vee \ x=\frac{1}{10} \ \vee \ x=\frac{1}{100}\right).\end{aligned}$$

□

Treba istaknuti da su posebno komplicirane **logaritamske jednadžbe s parametrima**. Ilustriraćemo to sljedećim primjerima.

Primjer 4.7. *U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenje jednadžbe*

$$2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=0.$$

Rješenje: $DP: 0<x\neq 1,\ 0<ax\neq 1,\ 0<a^2x\neq 1$; $UP: a>0$ (UP - znači uvjet za parametre). Uočimo odmah da je za $a=1$ rješenje svako $x\in DP$, tj. svako $x\in\langle 0,1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$. Razmotrimo sada slučaj $a\neq 1$. Svođenjem na istu bazu data jednadžba ekvivalentna je s jednadžbom

$$\frac{2}{\log_a x}+\frac{1}{1+\log_a x}+\frac{3}{2+\log_a x}=0.$$

Uvođenjem smjene $\log_a x=t$, posljednja jednadžba se svodi na kvadratnu jednadžbu

$$6t^2+11t+4=0,$$

odakle je $t_1=-\frac{4}{3}, t_2=-\frac{1}{2}$. Vraćanjem smjene dobijamo $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}, x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$. Neposredno provjeravajući u DP, zaključujemo da data jednadžba ima dva rješenja $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$ za $a\neq 1$.

Rezime:

i) za $0<a\neq 1$ jednadžba ima dva rješenja: $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$,

ii) za $a=1$ rješenje jednadžbe je svako $x\in\langle 0,1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$,

iii) za $a\leqslant 0$ jednadžba nema rješenja. □

Primjer 4.8. *U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati ješenje jednadžbe*

$$\log_a x+|a+\log_a x|\cdot\log_{\sqrt{x}} a=a\log_x a.$$

Rješenje: $DP: 0 < x \neq 1$, a uvjet za parametre je $UP: 0 < a \neq 1$.
Pod navedenim uvjetima, koristeći relaciju (11), data jednadžba se može transformirati na sljedeći način

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \frac{1}{\log_a \sqrt{x}} = \frac{a}{\log_a x} \iff \log_a^2 x + 2\,|a + \log_a x| - a = 0.$$

Zbog apsolutne vrijednosti razlikujemo dva slučaja.

i) $a + \log_a x \geqslant 0$, odnosno $t \geqslant -a$, za $t = \log_a x$
U ovom slučaju se data jednadžba svodi na kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 2t + a = 0 \iff t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Očito za $a > 1$ ova kvadratna jednadžba nema realnih rješenja. S obzirom na UP, mora biti $a \in \langle 0, 1\rangle$. Preostaje provjeriti da li t_1 i t_2 zadovoljavaju uvjet $t \geqslant -a$, za $a \in \langle 0,1\rangle$. Neposredno se provjerava da taj uvjet zadovoljava samo $t = -1 + \sqrt{1-a}$, odakle, nakon vraćanja smjene, dobijamo rješenje date jednadžbe u obliku $x = a^{-1+\sqrt{1-a}}$ za $a \in \langle 0,1\rangle$.

ii) $a + \log_a x < 0$, odnosno $t < -a$, za $t = \log_a x$
Sada se data jednadžba svodi na kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 2t - 3a = 0 \iff t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3a}.$$

Zbog UP slijedi da su rješenja ove kvadratne jednadžbe realna. Preostaje provjeriti da li t_1 i t_2 zadovoljavaju uvjet $t < -a$. Neposredno se provjerava da taj uvjet zadovoljava samo $t = 1 - \sqrt{1+3a}$, ali za $a \in \langle 0,1\rangle$, odakle, nakon vraćanja smjene, dobijamo rješenje date jednadžbe u obliku $x = a^{1-\sqrt{1+3a}}$ za $a \in \langle 0,1\rangle$.

Rezime:
1° za $a \in \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty\rangle$ jednadžba nema rješenja,
2° za $a \in \langle 0,1\rangle$ jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = a^{-1+\sqrt{1-a}}$, $x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$. □

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

Riješiti jednadžbe 1-8.

1. a) $\log x + \log(x+3) = 1$, b) $\log\sqrt{5x-4} + \log\sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18$.

2. a) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x-8)^2 = \log_{\frac{1}{2}}(10+3x-x^2) - 1$, b) $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

3. a) $\dfrac{\log_2\left(x^3+3x^2+2x-1\right)}{\log_2\left(x^3+2x^2-3x+5\right)} = \log_{2x} x + \log_{2x} 2$, b) $\dfrac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12-x)$.

4. a) $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} = 1$. b) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$.

5. a) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \ldots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36$.

6. a) $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5.5$, b) $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$.

7. a) $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}$, b) $\log\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \dfrac{1}{4}\log 16 - \sqrt{x+0,25}\log 4$.

8. a) $x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}$, b) $(x+1)^{\log_3(x-2)} + 2\,(x-2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$.

9. Naći sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}$ za koju jednadžba

$$\frac{\log(kx)}{\log(x+1)} = 2$$

ima tačno jedno rješenje.

U ovisnosti o realnom parametru a riješiti jednadžbe 10-12.

10. a) $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$, b) $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a$.

11. a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$, b) $\dfrac{1}{2}\log_a(1+x) + 3\log_{a^2}(1-x) = \log_{a^4}\left(1-x^2\right)^2 + 2$.

12. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2-4}{2a-x} = 1$.

5. Logaritamske nejednadžbe

Definicija 5.1. ***Logaritamske nejednadžbe*** *su nejednadžbe u kojima se nepoznanica javlja i pod znakom logaritma.*

Razmatrat ćemo logaritamske nejednadžbe koje se primjenom definicije logaritma i logaritamskih osobina mogu svesti na nejednadžbu oblika

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \tag{22}$$

ili oblika

$$\log_a f(x) < k. \tag{23}$$

Nejednadžbe koje se svode na nejednadžbe, a koje se od posljednjih dviju razlikuju samo po prirodi nejednakosti, analogno se razmatraju.

Na osnovu formula (15) i (16) vrijedi slijedeće:

i) ako je $a > 1$, nejednadžba (22) je ekvivalentna sistemu nejednadžbi

$$f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0 \ \wedge \ f(x) < g(x),$$

ii) ako je $0 < a < 1$, ona je ekvivalentna sistemu nejednadžbi

$$f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0 \ \wedge \ f(x) > g(x).$$

Nejednadžba (23) se, uz uvjet $f(x) > 0$, svodi na nejednadžbu

$$f(x) < a^k \quad \text{za} \quad a > 1,$$

odnosno na nejednadžbu

$$f(x) > a^k \quad \text{za} \quad 0 < a < 1.$$

Pri tome, naravno, mora se voditi računa i o definicionim područjima funkcija f i g.

Primjer 5.2. *Riješiti nejednadžbu*

$$\log_3\left(x^2 - 5x + 7\right) \leqslant 0.$$

Rješenje: Budući da je $x^2-5x+7>0$ za sve $x\in\mathbb{R}$ (jer je odgovarajuća diskriminanta $D=-3<0$), to je $DP: x\in\mathbb{R}$. Zbog toga i zbog činjenice da je baza logaritma veća od 1, data nejednadžba je ekvivalentna nejednadžbi $x^2-5x+7\leqslant 1$, odakle se dobija rješenje: $x\in[2,3]$. □

Primjer 5.3. *Riješiti nejednadžbu*

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\frac{24-2x-x^2}{14}\geqslant 1. \tag{24}$$

Rješenje: Odredimo prvo područje dozvoljenih vrijednosti za x. Naime, istovremeno moraju biti ispunjeni uvjeti:

$$\frac{24-2x-x^2}{14}>0 \ \text{ i } \ 0<\frac{25-x^2}{16}\neq 1,$$

to jest

$$\begin{aligned}\frac{24-2x-x^2}{14} &> 0 \iff x\in\langle -6,4\rangle,\\ \frac{25-x^2}{16} &> 0 \iff x\in\langle -5,5\rangle,\\ \frac{25-x^2}{16} &\neq 1 \iff 9-x^2\neq 0 \iff x\neq \pm 3.\end{aligned}$$

Dakle, područje dozvoljenih vrijednosti za x je

$$DP: \quad x\in\langle -5,-3\rangle\cup\langle -3,3\rangle\cup\langle 3,4\rangle. \tag{25}$$

Razlikujemo dva slučaja:

i) $\dfrac{25-x^2}{16}>1$, tj. $x\in\langle -3,3\rangle$ i tada je nejednadžba (24) ekvivalentna s

$$\frac{24-2x-x^2}{14}\geqslant\frac{25-x^2}{16} \iff x^2+16x-17\leq 0 \iff x\in[-17,1].$$

Odatle se dobija sljedeći podskup rješenja

$$R_1=\langle -3,3\rangle\cap[-17,1]=\langle -3,1].$$

ii) $0<\dfrac{25-x^2}{16}<1$, što zajedno s DP znači da je $x\in\langle -5,-3\rangle\cup\langle 3,4\rangle$ i tada je nejednadžba (24) ekvivalentna s

$$\frac{24-2x-x^2}{14}\leqslant\frac{25-x^2}{16} \iff x\in\langle -\infty,-17]\cup[1,+\infty\rangle.$$

Odatle se dobija drugi podskup rješenja

$$R_2=(\langle -5,-3\rangle\cup\langle 3,4\rangle)\cap(\langle -\infty,-17]\cup[1,+\infty\rangle)=\langle 3,4\rangle.$$

Rezultat: $R=R_1\cup R_2=\langle -3,1]\cup\langle 3,4\rangle$. □

Primjer 5.4. *Riješiti nejednadžbu*

$$\log_{|x+4|}2\cdot\log_2\left(x^2-5x+4\right)\geqslant 1.$$

Rješenje: Svodeći sve logaritme na istu bazu, tj. $|x+4|$, data se nejednadžba može napisati u obliku

$$\log_{|x+4|} \frac{x^2-5x+4}{|x+4|} \geqslant 0.$$

Posljednja nejednadžba je ekvivalentna disjunkciji

$$\left(0<|x+4|<1 \ \wedge \ 0<\frac{x^2-5x+4}{|x+4|} \leqslant 1\right) \vee \left(|x+4|>1 \ \wedge \ \frac{x^2-5x+4}{|x+4|} \geqslant 1\right)$$

koja je zadovoljena ako i samo ako je $x \in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle -3, 0] \cup [6, +\infty\rangle$. □

Logaritamske nejednadžbe s parametrima su posebno komplicirane i zahtijevaju vrlo obazriv pristup u rješavanju. Ilustrirajmo to sljedećim primjerima.

Primjer 5.5. *U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenje nejednadžbe*

$$\log_{a(a+1)} (|x|+4) > 1.$$

Rješenje: $DP: x \in \mathbb{R}$. Zbog uvjeta za bazu logaritma razmatrat ćemo dva odvojena slučaja.

1° $a(a+1) > 1$, tj.

$$a \in \left\langle -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right\rangle. \tag{26}$$

Za ove vrijednosti parametra a data nejednadžba je ekvivalentna s (zbog zamjene $1 = \log_{a(a+1)} a(a+1)$)

$$|x| \quad > a(a+1) - 4. \tag{27}$$

Sada su moguća ova dva slučaja:

i) $a(a+1) - 4 < 0$, tj. $a \in \left\langle \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\rangle$, što zajedno s (27) daje

$$a \in \left\langle \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\rangle.$$

Tada je nejednadnadžba (27) zadovoljena za svako $x \in \mathbb{R}$, a time je, u ovom slučaju, rješenje polazne nejednadžbe svako $x \in \mathbb{R}$.

ii) $a(a+1) - 4 \geq 0$, tj. $a \in \left\langle -\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right\rangle$, što zajedno s (26) daje

$$a \in \left\langle -\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right\rangle.$$

Tada je $-a(a+1)+4 < a(a+1)-4$, pa vrijedi

$$(27) \iff x \in \langle -\infty, -a(a+1)+4\rangle \cup \langle a(a+1)-4, +\infty\rangle.$$

2° $0 < a(a+1) < 1$, tj. $a \in \left\langle \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$

Za ove vrijednosti parametra a data nejednadžba je ekvivalentna s nejednadžbom

$$|x| < a(a+1) - 4\,(< 1 - 4 = -3),$$

što je nemoguće za bilo koje $x \in \mathbb{R}$, tj. u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja. Ovome treba pridodati i preostali slučaj, tj. za $a \in [-1, 0]$ i $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ nejednadžba nema rješenja, jer tada baza logaritma ne zadovoljava uvjet pozitivnosti i različitosti od 1.

Rezime

1. Za $a \in \left\langle -\infty, \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty \right\rangle$ rješenje je

   $x \in \langle -\infty, -a(a+1)+4 \rangle \cup \langle a(a+1)-4, +\infty \rangle .$

2. Za $a \in \left\langle \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\rangle$ rješenje je svako $x \in \mathbb{R}$.

3. Za $a \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$ nejednadžba nema rješenja.

□

Primjer 5.6. *Naći sve vrijednosti realnog parametra a za koje nejednakost*

$$\log_{\frac{a}{a+1}} \left(x^2+2\right) > 1$$

vrijedi za sve realne vrijednosti x.

Rješenje: $DP: x \in \mathbb{R}$. Zbog uvjeta za bazu logaritma razmatrat ćemo dva slučaja.

1° $\dfrac{a}{a+1} > 1$, tj. $\dfrac{-1}{a+1} > 0 \Longleftrightarrow a < -1$

Tada je data nejednadžba ekvivalentna s

$$x^2+2 > \frac{a}{a+1} \iff x^2 > \frac{a}{a+1} - 2 \iff x^2 > \frac{-a-2}{a+1},$$

što je zadovoljeno za sve $x \in \mathbb{R}$ samo ako je $\dfrac{-a-2}{a+1} < 0$, to jest (uzimajući i da je $a < -1$) ako je $a \in \langle -\infty, -2 \rangle$.

2° $0 < \dfrac{a}{a+1} < 1$, tj. $a \in \langle 0, +\infty \rangle$

Tada imamo

$$x^2+2 < \frac{a}{a+1} \iff x^2 < -\frac{a+2}{a+1} < 0,$$

što je nemoguće, tj. $x \in \emptyset$.

R : Samo za $a \in \langle -\infty, -2 \rangle$, data nejednakost vrijedi za sve realne vrijednosti x. □

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Riješiti nejednadžbe 1-8.

1. a) $\log(x+2) - \log x > 1$, b) $\log(x-4) - \log(x+1) \leqslant 1$.

2. a) $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log\ _2 x - 1} < 1$, b) $\log \dfrac{6}{x} > \log(x+5)$.

3. a) $\log_3\left(x^2 - 5x + 6\right) < 0$, b) $\log_{0,1}\left(x^2+1\right) < \log_{0,1}(2x+9)$.

4. a) $\log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) < 1$, b) $\log_{25}(3x+4) \cdot \log_{\sqrt{x}} \sqrt{25} > 1$.

5. a) $2\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 < \log_{9\sqrt{x}} 3$, b) $\log_{1+\frac{1}{x^2}}\left(\dfrac{7}{4x} + \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 1$.

6. a) $\log_{1-x^2}\left(2 - \dfrac{5x}{2}\right) \geqslant 1$, b) $\left(4x^2 - 8x - 5\right)\log_3(x+1) < 0$.

7. a) $\left(4x^2 - 16x + 7\right)\log_2(x-3) > 0$, b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}\left(5^{x+1} - 25^x\right) > -2$.

8. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(3^{x+1} - 9^x\right) > -2$.

U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenja nejednadžbi 9-10.

9. $\log_a^4 x - \log_{\frac{1}{a}}^2 \dfrac{x^5}{a^2} - 20\log_a x + 148 < 0$.

10. $\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt{x+a} - x + \sqrt{a}\right) \geqslant 1$.

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin: *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.

[2] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe, *Evolventa*, 2(1) (2019), 21-33.

[6] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe, *Evolventa*, 3(1) (2020), 2-10.

[7] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.