2

KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika - Problemi mjerenja

Zadatak 1. *Jedna osoba ima tri posude, od 14, od 9 i od 5 litara. Posuda od 14 litara je puna. Prelijevanjem iz posude u posudu (koristeći samo ove tri posude) treba izmjeriti 7 litara vode. Kako to izvesti?*

Zadatak 2. *Dvojica meraklija imaju bocu od 16 l punu vina, i dvije prazne posude od 6 l i 10 l. Kako će vino podijeliti na dva ista dijela (po 8 l) koristeći samo ove raspoložive posude?*

Zadatak 3. *Vodoinstalater ima posudu od 3 litra, posudu od 5 litara i kantu. Kako će iz česme izmjeriti tačno 4 litra vode u kantu?*

Zadatak 4. *Pomoću dva pješčana sata od kojih jedan mjeri 15 minuta, a drugi mjeri 20 minuta, odrediti vremenski period od 25 minuta.*

Pješčani sat je vrsta uređaja za mjerenje vremena. Sastoji se od dvije spojene, okomite komore koje omogućavaju pretakanje materijala (obično pijeska) iz gornje u donju komoru. Po isteku cijelog materijala iz gornje komore, pješčani sat se može okrenuti da bi se vremenski interval ponovo mjerio. Veličine koje utiču na dužinu mjerenog vremenskog intervala su količina materijala u satu, veličina komora, širina grla i finoća pijeska.
Pješčani satovi su postali rasprostanjeni u 14. vijeku. Ipak, vec u 16. vijeku pješcane satove istiskuje razvoj mehaničkih satova. Danas se pješčani satovi koriste u djelatnostima gdje nije potrebno precizno mjerenje vremena (u kuhinji, u društvenim igrama) ili kao ukras.
Simbolički, pješčani sat simbolizira protok vremena, upravo zbog svoje vizualnosti protoka (računari često imaju piktogram pješčanog sata koji obavještava korisnika da je potrebno pričekati da se određeni podaci procesiraju).

Zadatak 5. *Dva metronoma počnu istovremeno otkucavati. Prvi otkucava svaku drugu sekundu, a drugi otkucava svaku treću sekundu. Ukupno se čulo 13 otkucaja, pri čemu su se istovremeni otkucaji čuli kao jedan. Koliko je sekundi prošlo od prvog do 13 otkucaja?*

Metronom je sprava koja pokazuje brzinu izvođenja nekoga muzičkog djela. Metronom otkucava zvučnim signalom broj njihanja u minuti (40 do 200) i označava pravilan ritam protoka takozvanog objektivnog vremena. Mehanički metronom patentirao je 1816. Johann Nepomuk Mälzel, a danas uz taj standardni postoje elektronski i džepni metronomi. Metronomske oznake, to jest kompozitorova uputstva o brzini izvođenja djela, bilježe se od Beethovenove Osme simfonije iz 1817. Većina kompozitora uz oznaku tempa piše i metronomsku oznaku. Ona znača i broj udaraca u minuti, a označava se slovima MM i brojem koji predstavlja broj udaraca u minuti.
Polagani tempo $MM = 40 - 76$; Umjereni tempo $MM = 76 - 120$; Brzi tempo $MM = 120 - 200$.

Ciljna skupina: svi uzrasti

Nagradni zadatak: Kada je rođena Cheryl?

Pitanje je o djevojčici Cheryl, koja je zamolila dvojicu dječaka da pogode njezin rođendan, prvo je postavljeno u sklopu testa koji su organizirali Singapurska i Azijska školska matematička olimpijada (SASMO). Međutim, brzo je postalo viralno nakon što ga je lokalni izdavač objavio na Facebooku, tokom vikenda.

Od rješavača se zahtijevalo koristiti logiku za utvrđivanje Cherylina rođendana, pomoću kratkog razgovora između dvojice dječaka, o informacijama koje su im dane. Do utorka su mrežni korisnici vodili ozbiljne rasprave oko najboljeg mogućeg odgovora na zagonetku, na platformama društvenih medija, kao što su Reddit, Facebook i Twitter. *"Ažurirao sam svoj životopis da bih u roku od pet minuta dodao zaključeni Cherylin rođendan"*, napisao je Phil Smith na Twitteru. Drugi nisu bili toliko pametni. *"Zapanjen sam ... kad je tačno Cherylin rođendan?"*, Ian Gessey napisao je na mreži.

"Prosječni učenik u Velikoj Britaniji uspaničio bi se ako bi mu se ovaj problem postavio, a ne bi ga ni pokušao rješavati jer pitanja utemeljena na logici nisu dio kurikuluma", rekla je Karen Skuse, bivša profesorica matematike u školi Langley, neovisnoj školi u Norwichu i iskusni predavač s 14 godina iskustva u podučavanju. Neke bi se škole, medutim, suočile s izazovom. Carole Knight, zamjenica voditeljice škole u Headingtonu rekla je: „Otprilike trećina naših djevojaka, naša najbolja grupa, vidjet će ovu vrstu matematike izazovno i s užitkom. Uživali bi u suočavanju s izazovom, a mi bismo ga koristili kao sjajan primjer zajedničkog rješavanja problema.".

U objavi na Facebooku kasno u ponedjeljak naredne sedmice, SOSMA je pružila cjelovit model odgovora. Post je takođe pojasnio ranije izvještaje da je pitanje postavljeno osnovnoškolcima, rekavši da SOSMA smatra važnim navesti dob uključenih učenika, tako da "singapurski roditelji neće morati toliko brinuti". Pitanje je bilo "zapravo sa srednjeg 3 i sekundarnog 4 SASMO takmičenja, održanog 8. aprila 2015", navedeno je, dodajući da je "namijenjeno prosijavanju boljih učenika".

Singapur je poznat širom svijeta po svom nacionalnom matematičkom sistemu, koji su oponašale škole u drugim razvijenim zemljama i gradovima, uključujući New York.

(Preuzeto iz The New York Times, 14. 04. 2015.)

Zadatak 1. *Albert i Bernard upravo su upoznali Cheryl. "Kada je tvoj rođendan?" Albert je pitao Cheryl.*

Cheryl je malo razmislila i rekla: "Neću vam reći, ali dat ću vam neke naznake." Zapisala je popis od 10 datuma:

15. maj, 16. maj, 19. maj

17. jun, 18. jun

14. jul, 16. jul

14. avgust, 15. avgust, 17. avgust

"Moj je rođendan jedan od ovih datuma", rekla je.

Tada je Cheryl Albertu šapnula na uho mjesec i samo mjesec svog rođendana, a Bernardu je šapnula dan i samo dan.

"Možete li to sada pogoditi?" upitala je Alberta.

Albert: Ne znam kada ti je rođendan, ali znam da ni Bernard ne zna.

Bernard: U početku nisam znao, ali sada znam.

Albert: Pa, sad znam i ja!

Kada je Cherylin rođendan?

Ciljna skupina: svi uzrasti

Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 31.10.2021. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)

Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno novčanom nagradom od 50 KM.

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 41. *Čitaoci Evolvente: Ajla, Tanja i Olivera, ocjenjene su iz matematike različitim ocjenama: 3, 4 i 5. Damir je pokušao pogoditi njihove ocjene:*
"Olivera je dobila 3. Tanja nije dobila 3, a Ajla nije dobila 5."
Olivera mu na to odgovori: "Rekao si istinu samo za jednu od nas tri". Odrediti ocjene ovih učenica.

Zadatak 42. *Jedan satni mehanizam zaostaje dvije sekunde za šest dana. Koliko je sati pokazivao taj mehanizam 08.03.2021. godine u podne ako je pokazivao tačno vrijeme 01.01.2021. godine u podne?*

Zadatak 43. *Dijagonala $\overline{AC}$ romba $ABCD$ ima dužinu 6. Neka je M središte stranice $\overline{CD}$ i N središte stranice $\overline{AD}$. Duži $\overline{BM}$ i $\overline{BN}$ sijeku dijagonalu $\overline{AC}$ u tačkama P i Q, redom.*

1. *Izračunati dužinu odsječka $\overline{PQ}$.*
2. *Izračunati površinu trougla $\triangle BMN$, ako je $|BM| = 3$.*

Zadatak 44. *Proizvod šest uzastopnih prirodnih brojeva je $66 * 28*$. Odrediti nepoznate cifre označene zvijezdicom (te cifre nisu obavezno jednake).*

Zadatak 45. *U trouglu $\triangle ABC$ tačka D je središte duži $\overline{BC}$. Za tačku E duži $\overline{AD}$ vrijedi jednakost $4|AE| = 3|AD|$. Prava BE siječe stranicu $\overline{AC}$ u tački F. Odrediti razmjeru (omjer) površina trouglova $\triangle ABF$ i $\triangle BCF$.*

Srednja škola

Zadatak 41. *Odrediti sve brojeve između 100 000 i 300 300 koji pri djeljenju sa 21 i 2021 daju isti ostatak 15.*

Zadatak 42. *Nad duži $\overline{AB}$ kao osnovicom, konstruisani su jednakostranični trougao $\triangle ABD$ i jednakokraki pravougli trougao $\triangle ABC$. Tačka E je podnožje normale iz tačke C, na duž $\overline{AB}$, a tačka M je podnožje normale iz tačke C na duž $\overline{AD}$. Izračunati ugao $\angle CEM$.*

Zadatak 43. *Odrediti sve realne vrijednosti parametra p, za koje je izraz*

$$\log[(p-1)x^2 + 2px + 3p - 2] \ ,$$

definisan za svako $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 44. *Riješiti jednačinu* $1 + \dfrac{2}{\sin x} = -\dfrac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$.

Zadatak 45. *Zbir prvih n članova jednog niza dat je izrazom*

$$S_n = 9.5n^2 - 89.5n \ .$$

Naći opšti član tog niza i pokazati da je to aritmetički niz.

Ciljna skupina: Osnovna škola, srednja škola
Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 31.10.2021. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

EVOLVENTA (JAMTK) 4(1) (2021), 64 – 75

Rješenja konkursnih zadataka 31 – 40

Osnovna škola

Zadatak 31. *Sam lav može da pojede ovcu za dva sata, vuk za tri sata, a pas za šest sati. Za koje vrijeme bi oni zajedno pojeli ovcu?*

Rješenje: Lav pojede jednu ovcu za dva sata, to znači da će za 6 sati (tri puta više vremena) pojesti 3 ovce.
Vuk jednu ovcu pojede za tri sata, znači za 6 sati (duplo više vremena) će pojesti 2 ovce.
Pas pojede jednu ovcu za 6 sati.

Dakle, lav, vuk i pas će za šest sati pojesti $3 + 2 + 1 = 6$ ovaca, a to opet znači da za jedan sat jedu po jednu ovcu. □

Zadatak 32. *Redari Damir i Ema mjerili su učionicu koracima. Damir jednim korakom izmjeri 80 cm. Emin korak je za 30 cm kraći i zato je, mjereći dužinu učionice, napravila 9 koraka više nego Damir, a mjereći širinu, napravila je 6 koraka više nego Damir. Koliko iznosi dužina i širina učionice? (Riješiti bez upotrebe jednačina!)*

Rješenje: Ema mjereći dužinu učionice načini 9 koraka više od Damira. Da napravi isti broj koraka kao i Damir, izmjerila bi $9 \cdot 50 = 450$ cm manje od Damira. Kako svakim korakom izmjeri 30 cm manje od Damira, dobijamo $450 : 30 = 15$ Damirovih koraka. Dakle, dužina učionice je $15 \cdot 80 = 1200$ $cm = 12$ m.

Ema mjereći širinu učionice načini 6 koraka više od Damira. Da naprvi isti broj koraka kao Damir izmjerila bi za $6 \cdot 50 = 300$ cm manje od Damira. Kako svakim korakom izmjeri 30 cm manje od Damira. dobijamo $300 : 30 = 10$ Damirovih koraka. Dakle, širina učionice je $10 \cdot 80 = 800$ $cm = 8$ m. □

Zadatak 33. *Zbir kućnih brojeva jedne strane ulice (između dvije raskrsnice) iznosi 333. Koji su to brojevi? (Brojevi na različitim stranama ulice su različite parnosti.)*

Rješenje: Činjenice koje znamo iz podatka koji je dat u zadatku su

1. Kuće su na "neparnoj" strani ulice jer je zbir parnih brojeva uvijek paran.
2. Na tom dijelu ulice je neparan broj kuća jer je zbir parnog broja neparnih brojeva paran.
3. Postoji "srednja" kuća jer je broj kuća neparan.

Neka je broj te srednje kuće k. Tada su brojevi ostalih kuća

$$\ldots, k-4, k-2, k, k+2, k+4, \ldots$$

Ako je broj svih kuća n tada je $n < k$ i $k \cdot n$ će biti zbir njihovih brojeva, to jest $k \cdot n = 333$. Kako je $333 = 1 \cdot 333 = 3 \cdot 111 = 9 \cdot 37$, jedine moguće kombinacije brojeva k i n su 333 i 1, 111 i 3 i 37 i 9.

U prvom slučaju imamo samo jednu kuću i njen broj je 333.

U drugom slučaju imamo 3 kuće i njihovi brojevi su 109,111 i 113.

U trećem slučaju imamo 9 kuća i njhovi brojevi su 29,31,33,35,37,39,41,43 i 45. □

Zadatak 34. *Ako bi se spoljašnji ugao kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ povećao za $35°$, a spoljašnji ugao kod tjemena B umanjio za $20°$, onda bi se unutrašnji ugao kod tjemena C povećao za svoju četvrtinu. Koliki je unutrašnji ugao kod tjemena C?*

Ciljna skupina: Osnovna škola, Srednja škola

Rješenje: Označimo unutrašnje uglove trougla sa α, β i γ i, respektivno, odgovarajuće spoljašnje uglove sa α_1, β_1 i γ_1. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, zaključujemo da vrijedi $\alpha_1 = \beta + \gamma$ i $\beta_1 = \alpha + \gamma$. Sabirajući ove dvije jednakosti imamo

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180° + \gamma \ . \tag{1}$$

Iz datog uslova zadatka zaključujemo

$$\alpha_1 + 35° + \beta_1 - 20° = 180° + \gamma + \frac{1}{4}\gamma \ ,$$

to jest

$$\alpha_1 + \beta_1 = 165° + \frac{5}{4}\gamma \ . \tag{2}$$

Sada iz (1) i (2) imamo da je $180° + \gamma = 165° + \frac{5}{4}\gamma$, iz čega jednostavno dobijamo da je $\gamma = 60°$. □

Zadatak 35. *Svakom od brojeva 164 i 100 dodati jedan te isti cijeli broj tako da oba dobijena zbira budu kvadrati cijelih brojeva. Koji broj treba dodati?*

Rješenje: Neka je traženi cijeli broj a, to jest

$$\begin{aligned} 164 + a &= b^2 \\ 100 + a &= c^2 \ , \end{aligned}$$

gdje su b i c cijeli brojevi. Tada je $b^2 - c^2 = 64$, odnosno $(b-c)(b+c) = 64$.
Kako je

$$64 = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8 = (-1) \cdot (-64) = (-2) \cdot (-32) = (-4) \cdot (-16) = (-8) \cdot (-8) \ ,$$

rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} b - c &= x \\ b + c &= y \ , \end{aligned}$$

gdje su x i y cjelobrojni faktori broja 64, dobijamo da je $a \in \{-100, -64, 125\}$. □

Zadatak 36. *Trojica ljudi, Mujo, Haso i Huso su na vašaru sa svojim suprugama. Imena supruga su Fata, Hana i Lamija. Utvrditi ko je s kim oženjen, ako je poznato sljedeće:*

- *Svako od ovih šest lica platio je svaku kupljenu stvar onoliko KM koliko je stvari kupilo.*
- *Svaki muškarac potrošio je 63 KM više od svoje žene.*
- *Mujo je kupio 23 stvari više od Hane, a Haso 11 više od Fate.*

Rješenje: Ako sa x označimo broj predmeta koje kupi suprug, onda je x^2 broj KM koliko je za to platio. Analogno, ako je y broj predmeta koje kupi supruga, onda je y^2 količina novca koju je za to platila.

Prema uslovu zadatka je $x^2 - y^2 = 63$, što možemo zapisati i sa $(x-y)(x+y) = 63$. Kako su x i y cjelobrojni, razlikujemo tri slučaja. Naime,

$$63 = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 \ .$$

Sada imamo tri sistema jednačina:

$$x - y = 1 \qquad\qquad x - y = 3 \qquad\qquad x - y = 7$$
$$x + y = 63 \qquad\qquad x + y = 21 \qquad\qquad x + y = 9$$

rješenje: $x = 32 \;\; y = 31$ rješenje: $x = 12 \;\; y = 9$ rješenje: $x = 8 \;\; y = 1$

Nađimo one vrijednosti x i y čija je razlika 23, a to su 32 (x iz prvog sistema) i 9 (y iz drugog sistema). Ovo znači da je 32 predmeta kupio Mujo, a 9 predmeta je kupila Hana. Razliku 11 dobijamo između 12 (x iz drugog sistema) i 1 (y iz trećeg sistema), a ovo znači da je Haso kupio 12 premeta i Fata 1 predmet. Tada ostaje da je Huso kupio 8 (x iz trećeg sistema) predmeta, a Lamija je kupila 31 (y iz prvog sistema) predmet. Dakle, bračni parovi su Mujo i Lamija, Haso i Hana i Huso i Fata. □

Zadatak 37. *Od svih dvocifrenih brojeva odrediti onaj koji podijeljen zbirom svojih cifara daje najveću vrijednost.*

Rješenje: Neka je traženi broj $\overline{ab} = 10a + b$ ($a, b \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$). Neka je k količnik tog broja i zbroja njegovih cifara, to jest $\dfrac{10a + b}{a + b} = k$. Odavde imamo

$$10a + b = k(a + b) \iff 10a + b - ka - kb = 0 \;,$$

iz čega dobijamo jednakost

$$(10 - k)a + (1 - k)b = 0 \;. \tag{3}$$

Kako je $a > 0$ i $b \geq 0$, zaključujemo da je $k \leq 10$. Ovo onda znači da je najveća vrijednost količnika $k = 10$. Iz (3) onda imamo $0 \cdot a - 9b = 0$, pri čemu a može biti bilo koja cifra različita od 0. Dakle, traženi dvocifreni brojevi su 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 i 90. □

Zadatak 38. *Riješiti jednačinu u skupu cijelih brojeva:* $x^3 - 10x^2 + xy - y = 0$.

Rješenje: Jednačina $x^3 - 10x^2 + xy - y = 0$ je ekvivalentna jednačini $x^3 - 10x^2 + y(x - y) = 0$. Odavde možemo izraziti y kao

$$\begin{aligned} y &= -\frac{x^3 - 10x^2}{x - 1} = -\frac{x^3 - x^2 - 9x^2 + 9x - 9x + 9 - 9}{x - 1} = \frac{x^2(x - 1) - 9x(x - 1) - 9(x - 1) - 9}{x - 1} \\ &= -x^2 + 9x + 9 + \frac{9}{x - 1} \;. \end{aligned}$$

Kako tražimo rješenja u skupu cijelih brojeva, zaključujemo da mora biti $x - 1 \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$, odnosno $x \in \{0, 2, -2, 4, -8, 10\}$. Neposrednom provjerom dobijamo:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies y = 0 \\ x = 2 &\implies y = -4 + 18 + 9 + 9 = 32 \\ x = -2 &\implies y = -4 - 18 + 9 - 3 = -16 \\ x = 4 &\implies y = -16 + 36 + 9 + 3 = 32 \\ x = -8 &\implies y = -64 - 72 + 9 - 1 = -128 \\ x = 10 &\implies y = -100 + 90 + 9 + 1 = 0 \;. \end{aligned}$$

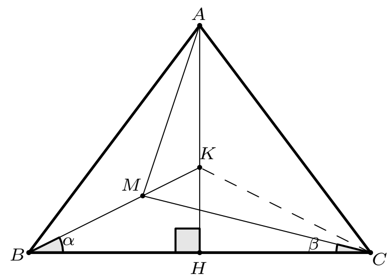
Dakle, rješenja polazne jednačine su

$$(x, y) \in \{(0, 0), (2, 32), (-2, -16), (4, 32), (-8, -128), (10, 0)\} \;.$$

□

Zadatak 39. *U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$ s osnovicom BC nalazi se tačka M takva da je $\measuredangle MBC = 30°$ i $\measuredangle MCB = 10°$. Odrediti $\measuredangle AMC$ ako je $\measuredangle BAC = 80°$.*

Rješenje: Zadato je: jednakokraki trougao $\triangle ABC$, $\alpha = \angle MBC = 30°$ i $\beta = \angle MCB = 10°$. Tada je



$\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$
$\measuredangle ABM = 50° - 30° = 20°$, $\measuredangle ACM = 50° - 10° = 40°$.
Spustimo visinu iz tačke A (duž $\overline{AH}$) i produžimo duž $\overline{BM}$ do presjeka sa tom visinom (tačka K). Tada je $\measuredangle CAH = 40°$ i $\measuredangle CMK = 180° - \measuredangle BMC = 40°$.
Trougao $\triangle BKC$ je jednakokrak, pa je $\measuredangle KBC = \measuredangle KCB = 30°$ iz čega zaključujemo da je $\measuredangle KCM = 20°$, a time je $\measuredangle ACK = 20°$.

Trouglovi $\triangle ACK$ i $\triangle MCK$ imaju iste uglove i jednu zajedničku stranicu pa zaključujemo da su oni podudarni, te je $|AC| = |CM|$. Dakle, $\triangle AMC$ je jednakokrak, a time su $\measuredangle AMC$ i $\measuredangle MAC$ podudarni. Pri tome je

$$\measuredangle AMC = \frac{180° - 40°}{2} = 70° \ .$$

□

Zadatak 40. *Postoji li među 2020 proizvoljno odabranih prirodnih brojeva dva čija je razlika djeljiva sa 2019?*

Rješenje: Označimo sa A skup od 2020 proizvoljno izabranih prirodnih brojeva. Sa B označimo skup svih mogućih ostataka pri djeljenju broja s 2019.

$$B = \{0, 1, 2, \ldots, 2018\} \ .$$

Tada je $k(A) = 2020$, a $k(B) = 2019$ ($k(X)$ je broj elemenata konačnog skupa X). Prema Dirichletovom principu, u skupu A moraju postojati bar dva elementa koja pri dijeljenju sa 2019 imaju isti ostatak. Razlika ta dva broja je takođe djeljiva sa 2019. □

Žepić Lana, JU OŠ "Sv. Franjo" Tuzla

Srednja škola

Zadatak 31. *Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 4, njegov unutrašnji ugao se poveća za* 15°*. Za koliko se poveća broj dijagonala?*

Rješenje: Označimo sa n broj stranica pravilnog mnogougla. Njegov unutrašnji ugao tada iznosi $\alpha_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. Neka je $n_1 = n+4$ (broj stranica mnogougla sa uvećanjem), tada je $\alpha_{n_1} = \dfrac{(n_1-2)\cdot 180^\circ}{n_1}$. Prema uslovu zadatka imamo

$$\alpha_{n_1} = \alpha_n + 15^\circ \quad \text{odnosno} \quad \frac{(n_1-2)\cdot 180^\circ}{n_1} = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} + 15^\circ \ .$$

Kako je $n_1 = n+4$, sada imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+4-2)\cdot 180^\circ}{n+4} = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} + 15^\circ \\
\iff\ & n(n+2)180^\circ = (n+4)(n-2)180^\circ + 15^\circ n(n+4) \\
\iff\ & 12n^2 + 24n = 12n^2 + 24n - 96 + n^2 + 4n \\
\iff\ & n^2 + 4n - 96 = 0 \\
\iff\ & n^2 + 12n - 8n - 96 = 0 \\
\iff\ & (n+12)(n-8) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Vidimo da su moguće vrijednosti $n = 8$ i $n = -12$. Mogućnost $n = -12$ otpada jer je n broj stranica pravilnog mnogougla. Dakle, mora biti $n = 8$. Kako je broj dijagonala pravilnog mnogougla dat sa $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$, vidimo da je $D_8 = 20$ i $D_{8+4} = D_{12} = 54$. Uvećanje broja dijagonala je tada $54 - 20 = 34$. □

Zadatak 32. *Odrediti najveći prirodni broj* n *takav da je broj* $n^2 + 2020$ *djeljiv sa* $n + 20$*.*

Rješenje: Ako je broj $n^2 + 2020$ djeljiv sa $n+20$, postoji prirodan broj k takav da je

$$n^2 + 2020 = k(n+20) \ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
& n^2 + 2020 = k(n+20) \iff n^2 - 20^2 + 20^2 + 2020 = k(n+20) \\
\iff\ & (n-20)(n+20) + 400 + 2020 = k(n+20) \iff k(n+20) - (n-20)(n+20) = 2420 \\
\iff\ & (n+20)(k-n+20) = 2420 \ .
\end{aligned}$$

Najveći prirodan broj za koga će važiti posljednja jednakost je onaj za koga je zadovoljeno

$$n + 20 = 2420 \quad \text{i} \quad k - n + 20 = 1 \ .$$

Iz ovoga vidimo da je $n = 2400$ i $k = 2381$. Dakle, traženi broj je $n = 2400$. □

Zadatak 33. *Definišimo funkciju* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *na sljedeći način*

$$f(1) = 3 \ , \ f(n) = \begin{cases} f(n-1) + 1 & ; \ \textit{za } n \textit{ parno} \\ f(n-1) + 2 & ; \ \textit{za } n \textit{ neparno} \end{cases}$$

Izračunati $f(2021)$*.*

Rješenje: Da bismo dobili perspektivu kako se ponaša ova funkcija, izračunajmo vrijednosti funkcije za prvih nekolikoprirodnih brojeva.

$$\begin{aligned}
&f(1) = 3,\\
&f(2) = 3 + 1 = 4,\\
&f(3) = 4 + 2 = 6,\\
&f(4) = 6 + 1 = 7.
\end{aligned}$$

Kao što vidimo, kada god n naraste i postane paran broj, vrijednost funkcije se poveća za 1, a kada postane neparan broj, vrijednost funkcije se poveća za 2 u odnosu na prethodni nivo. Dakle, da bismo dobili vrijednost funkcije za bilo koji broj n, prosto moramo odrediti koliko će puta n postati paran broj i broj puta kad će n postati neparan broj, u toku rasta od 1 do broja određenog funkcijom. Tako na primjer, za $n = 17$ imamo

$$f(17) = f(1) + \left(\frac{17-1}{2}\right) \cdot 1 + \left(\frac{17-1}{2}\right) \cdot 2 = 3 + 8 + 16 = 27\ .$$

Sada samo treba ovu logiku primijeniti na broj 2021. U rastu broja n od 1 do 2021 paran broj se javlja 1010 puta, a neparan također 1010 puta. Odatle je

$$f(2021) = f(1) + 1010 \cdot 1 + 1010 \cdot 2 = 3 + 1010 + 2020 = 3033\ .$$

□

Hamzić Ismar, 2, JU Gimnazija „Mustafa Novalić" Gradačac

Zadatak 34. *Dokazati jednakost*

$$(4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2\ .$$

Rješenje: U dokazivanju postavljene jednakosti krenimo od lijeve strane koju ćemo kvadrirati i pokažimo da je ona jednaka 4.

$$\begin{aligned}
&(4 + \sqrt{15})^2 \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2 \cdot \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^2 =\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot (4 + \sqrt{15}) \cdot (4 - \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot (4^2 - (\sqrt{15})^2) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot (16 - 15) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot (10 - 2 \cdot \sqrt{60} + 6)\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot (16 - 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 15})\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot (16 - 4 \cdot \sqrt{15})\\
&= (4 + \sqrt{15}) \cdot 4(4 - \sqrt{15})\\
&= 4(4^2 - \sqrt{15^2})\\
&= 4(16 - 15) = 4\ .
\end{aligned}$$

□

Mujkanović Tarik, 2c, JU Gimnazija „Mustafa Novalić" Gradačac

Zadatak 35. *Riješiti jednačinu:*

$$8\cdot 3^{\sqrt{x}+x}=9^x-9^{\sqrt{x}+1}\ .$$

Rješenje: Definiciono područje zadatka je $x\geq 0$ i imajući to na umu, imamo

$$\begin{aligned}
&8\cdot 3^{\sqrt{x}+x}=9^x-9^{\sqrt{x}+1}\iff 8\cdot 3^{\sqrt{x}+x}=9^x-9\cdot 9^{\sqrt{x}}\\
\iff &8\cdot 3^{\sqrt{x}+x}=3^{2x}-9\cdot 3^{2\sqrt{x}}\ /\ :\ 3^{2\sqrt{x}}\\
\iff &8\cdot 3^{\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}}=3^{2x-2\sqrt{x}}-9\\
\iff &8\cdot 3^{x-\sqrt{x}}=\left(3^{x-\sqrt{x}}\right)^2-9\ .
\end{aligned}$$

Sada uvedimo smjenu $3^{x-\sqrt{x}}=t$. Iz posljednje jednakosti imamo

$$8t=t^2-9\iff t^2-8t-9=0\iff (t-9)(t+1)=0\ .$$

Dakle, $t=9$ ili $t=-1$. Primjetimo odma da je rješenje $t=-1$ nemoguće jer bi tada moralo biti $3^{x-\sqrt{x}}=-1$ ($a^x>0$ za $a>0$ i bilo koje x). Dakle, ostaje jedno rješenje $t=9$ iz koga sada dobijamo da mora biti $3^{x-\sqrt{x}}=9$. Ovo je ekvivalentno sa $3^{x-\sqrt{x}}=3^2$, iz čega zaključujemo da mora biti $x-\sqrt{x}=2$, to jest $\sqrt{x}=x-2$. Posljednje nam daje uslov da je $x-2\geq 0$ (jer je $\sqrt{x}\geq 0$), odnosno da je $x\geq 2$. Pod ovim uslovom smijemo kvadrirati jednačinu $\sqrt{x}=x-2$, čime dobijamo jednačinu

$$x=(x-2)^2\iff x=x^2-4x+4\iff x^2-5x+4=0\iff (x-4)(x-1)=0\ .$$

Rješenja posljednje jednačine su $x=4$ i $x=1$, a zbog uslova ($x\geq 2$) imamo jedinstveno rješenje polazne jednačine $x=4$. □

Mulahalilović Amila, 4b, JU Gimnazija „Mustafa Novalić“ Gradačac

Zadatak 36. *Odrediti najmanju vrijednost polinoma*

$$P(x,y)=x^2-2xy+6y^2-12x+2y+45\ .$$

Rješenje: Za početak nam je potrebno poznavanje formule

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\ .$$

Kako treba pronaći minimalnu vrijednost polinoma $P(x,y)=x^2-2xy+6y^2-12x+2y+45$, krenimo od jednakosti

$$(x-y-6)^2=x^2+y^2+36-2xy-12x+12y\ .$$

Nije teško vidjeti da polazni polinom $P(x,y)$ možemo transformisati u sljedeći oblik

$$P(x,y)=(x-y-6)^2+5y^2-10y+9=(x-y-6)^2+5(y^2-2y+1)+4=(x-y-6)^2+5(y-1)^2+4\ .$$

Sada je očigledno da će minimalna vrijednost polinoma $P(x,y)$ biti onda kada je zadovoljeno

$$\begin{aligned}
x-y-6&=0\\
y-1&=0\ .
\end{aligned}$$

Iz druge jednačine direktno dobijamo da je $y=1$, a koristeći onda i prvu jednačinu dobijamo da je $x=7$. Minimalna vrijednost polinoma $P(x,y)$ se dostiže za $(x,y)=(1,7)$ i ona iznosi $P_{min}=P(7,1)=4$. □

Hasić Naida, 2, JU Gimnazija „Mustafa Novalić“ Gradačac

Zadatak 37. *Dvije prave paralelne sa osnovicom trapeza dijele njegove krakove na tri jednaka dijela i dati trapez na tri trapeza. Izračunati površinu "srednjeg" trapeza, ako su površine "krajnjih" trapeza respektivno* P_1 *i* P_2.

Rješenje: Označimo sa $P_1 = P_{ABMK}$, te sa $P_2 = P_{LNCD}$.
Također označimo: $P_1' = P_{FBMH},\ P_1'' = P_{EFHG},\ P_1''' = P_{AEGK}$. Onda vrijedi

$$P_1 = P_1' + P_1'' + P_1''' \ldots\ldots (1).$$

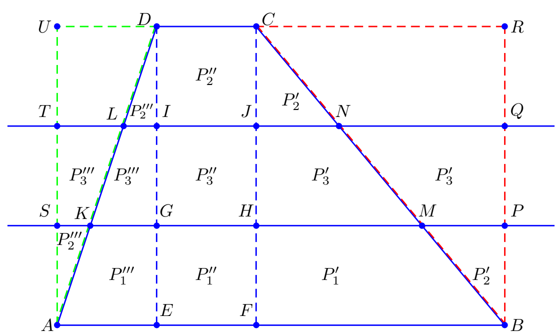
Dalje, označimo sa $P_2 = P_{LNCD}$.
Označimo sa: $P_2' = P_{JNC},\ P_2'' = P_{IJCD},\ P_2''' = P_{LID}$. Onda vrijedi

$$P_2 = P_2' + P_2'' + P_2''' \ldots\ldots (2).$$

Označimo sada površinu "srednjeg" trapeza sa $P_3 = P_{KMNL}$. Također označimo: $P_3' = P_{HMNJ},\ P_3'' = P_{GHJI},\ P_3''' = P_{KGIL}$. Onda vrijedi

$$P_3 = P_3' + P_3'' + P_3''' \ldots\ldots (3).$$

Dopunimo trapez $ABCD$ do pravougaonika $ABRU$.



Slika 1: Slika za zadatak 37.

Posmatrajmo $\triangle MBP$ i $\triangle JNC$. Pokažimo da su oni podudarni. Vidimo da je $\measuredangle BMP = \measuredangle JNC$ (uglovi s paralelnim kracima), te $\measuredangle MBP = \measuredangle NCJ$ (uglovi s paralelnim kracima), i CN=MB (zbog toga što paralelne prave TQ, SP dijele svaki krak zadanog trapeza na tri jednaka dijela. Dakle, iz

$$\measuredangle BMP = \measuredangle JNC,\ BM = CN,\ \measuredangle MBP = \measuredangle NCJ,$$

zaključujemo, na osnovu stava USU (dva trougla su podudarni ako imaju istu po jednu stranicu i podudarna po dva para uglova koji leže na tim stranicama), da vrijedi

$$\triangle MBP \cong \triangle JNC.$$

Iz podudarnosti prethodnih trouglova slijedi $MP = JN$. Dalje, iz $HP = JQ$ i $MP = JN$ slijedi da je $HM = NQ$.
Posmatrajmo sada $\square HMNJ$ i $\square NQPM$. Pokažimo da su oni podudarni.

$$\underbrace{HJ = QP\Big(=\frac{h}{3}\Big), HM = NQ, MN = MN, JN = MP, \measuredangle HMN = \measuredangle MNQ}_{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \square HMNJ \cong \square NQPM.$$

Napomenimo samo da je $\measuredangle HMN = \measuredangle MNQ$ jer su to uglovi sa paralelnim kracima. Dakle, prethodni četverouglovi su podudarni zbog svih jednakih stranica i svih jednakih uglova (svaki od ovih četverouglova je već imao po dva para pravih uglova; za podudarnost svih uglova dovoljno je bilo pokazati podudarnost još jednog para njihovih uglova). Iz toga zaključujemo

$$P_{HMNJ} = P_{NQPM} (= P_3').$$

Kako je, očigledno

$$P_{HPQJ} = P_{FBPH},$$

to možemo pisati

$$P_3' + P_3' = P_1' + P_2'$$

$$2P_3' = P_1' + P_2'$$

$$P_3' = \frac{P_1' + P_2'}{2} \ldots\ldots (4).$$

Dalje, posmatrajmo $\square EFHG, \square GHJI, \square IJCD$.
Zbog $EF = GH = IJ$, te $FH = HJ = JC\big(= \frac{h}{3}\big)$ zaključujemo da su površine posmatranih četverouglova jednake, pa možemo pisati

$$P_3'' = P_1'' = P_2''.$$

No, to onda znači da možemo pisati

$$P_3'' = \frac{P_1'' + P_2''}{2} \ldots\ldots (5).$$

Dalje, posmatrajmo sada lijevu ("zeleno-plavu") stranu crteža. Pokažimo da je $\triangle KSA$ podudaran sa $\triangle LID$. Zbog

$$\measuredangle SKA = \measuredangle ILD, KA = LD, \measuredangle SAK = \measuredangle LDI,$$

zaključujemo da zaista zbog stava USU vrijedi

$$\triangle KSA \cong \triangle LID.$$

Napomenimo da su navedeni uglovi podudarni kao uglovi s paralelnim kracima, a navedene stranice su podudarne jer prave TQ, SP dijele svaki krak zadanog trapeza na tri jednaka dijela. Iz podudarnosti tih trouglova slijedi $SK = LI$.
Dalje, zbog $SG = TI$, te $SK = LI$ zaključujemo $KG = TL$. Zbog podudarnosti prethodnih trouglova možemo pisati

$$P_{KSA} = P_{LID} (= P_2''').$$

Posmatrajmo sada četverouglove: $\square KGIL$, $\square TLKS$. Pokažimo da su oni podudarni. Zbog

$$\underbrace{KG = TL, GI = TS\Big(= \frac{h}{3}\Big), LI = SK, KL = KL, \measuredangle LKG = \measuredangle KLT}_{\Rightarrow}$$

$$\square KGIL \cong \square TLKS.$$

Iz toga slijedi $P_{KGIL} = P_{TLKS} (= P_3''')$. Sada, kako je očigledno $P_{SGIT} = P_{AEGS}$, to možemo pisati

$$P_3''' + P_3''' = P_1''' + P_2'''$$

$$2P_3''' = P_1''' + P_2'''$$

$$P_3''' = \frac{P_1''' + P_2'''}{2} \ldots\ldots (6).$$

Sabirajući sada $(4), (5), (6)$ dobijamo

$$P_3' + P_3'' + P_3''' = \frac{P_1' + P_2' + P_1'' + P_2'' + P_1''' + P_2'''}{2}.$$

Zbog $(1), (2), (3)$ prethodna jednakost postaje

$$P_3 = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

□

Barać Una, 2a, JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac

Zadatak 38. *Dokazati da za ma koji prirodan broj n veći od 1 važi nejednakost*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}\ .$$

Rješenje: Dokaz ćemo izvesti potpunom matematičkom indukcijom.
Korak 1: Induktivna baza
Za $n = 2$ imamo

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24} \implies \frac{7}{12} > \frac{13}{24} \implies \frac{14}{24} > \frac{13}{24}\ ,$$

što je očigledno tačna nejednakost.
Korak 2: Induktivna hipoteza
Pretpostavljamo da je tvrđenje tačno za $n > 2$, to jest vrijedi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}\ .$$

Korak 3: Induktivni korak
Dokažimo nejednakost za $n + 1$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&> \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{13}{24} + \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > \frac{13}{24}\ .
\end{aligned}$$

Na osnovu principa matematičke indukcije tvrđenje je tačno za svaki prirodan broj $n \geq 2$. □

Hodžić Lejla, 4, JU Gimnazija „Mustafa Novalić“ Gradačac

Zadatak 39. *Odrediti sve vrijednosti ugla α u segmentu $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, za koje je nejednakost*

$$\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - (2\sin\alpha - 3)x + 1 > 0\ ,$$

ispunjena za svako $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Za kvadratni trinom ax^2+bx+c koji je uvijek pozitivan vrijedi $a>0$ i $D=b^2-4ac<0$.
U postavljenom zadatku ove dvije nejednakosti daju

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}>0$$
$$(-(2\sin\alpha-3))^2-4(\sin\alpha+\frac{1}{2})\cdot 1<0\ .$$

Rješavanjem prve nejednakosti imamo $\sin\alpha>-\frac{1}{2}$, odakle dobijamo da mora biti, vodeći računa o uslovu iz zadatka

$$\alpha\in\left(0,\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{11\pi}{6},2\pi\right)=I_1\ .$$

Za drugu nejednakost imamo,

$$(-(2\sin\alpha-3))^2-4(\sin\alpha+\frac{1}{2})\cdot 1<0\iff 4\sin^2\alpha-12\sin\alpha+9-4\sin\alpha-2<0$$
$$\iff 4\sin^2\alpha-16\sin\alpha+7<0\ .$$

Posljednja nejednakost je kvadratna nejednačina po $\sin\alpha$, čija je diskriminanta $D'=(-16)^2-4\cdot4\cdot7=144$.
Sada imamo,

$$\sin\alpha_{1,2}=\frac{16\pm12}{8}=\frac{4\pm3}{2}\ ,$$

odnosno $\sin\alpha_1=\frac{1}{2}$ i $\sin\alpha_2=\frac{7}{2}$. Na osnovu ovoga je

$$4\sin^2\alpha-16\sin\alpha+7<0\iff\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\sin\alpha-\frac{7}{2}\right)<0$$

U rješavanju posljednje nejednakosti razlikujemo dva slučaja:
Slučaj I:

$$\sin\alpha-\frac{1}{2}<0\quad\text{i}\quad\sin\alpha-\frac{7}{2}>0\iff\sin\alpha<\frac{1}{2}\quad\text{i}\quad\sin\alpha>\frac{7}{2}\ .$$

Očigledno zbog drugog uslova ovaj slučaj nema rješenja ($\sin x\le 1$).
Slučaj II:

$$\sin\alpha-\frac{1}{2}>0\quad\text{i}\quad\sin\alpha-\frac{7}{2}<0\iff\sin\alpha>\frac{1}{2}\quad\text{i}\quad\sin\alpha<\frac{7}{2}\ .$$

Dakle, mora biti $\sin\alpha>\frac{1}{2}$, što je ekvivalentno uslovu $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)=I_2$. Presjek skupova I_1 i I_2 nam daje konačno rješenje,

$$I_1\cap I_2=\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)\ ,$$

dakle, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$. □

Mehanović Adna, 4, JU Gimnazija „Mustafa Novalić“ Gradačac

Zadatak 40. *Zbir tri broja je 114. Oni se mogu posmatrati kao tri uzastopna člana geometrijskog niza ili kao prvi, četvrti i dvadesetpeti član aritmetičkog niza. Odrediti ove brojeve!*

Rješenje: Označimo ta tri broja kao članove aritmetičkog niza a_1, a_4 i a_{25}. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 + a_{25} &= 114 \\ a_4^2 &= a_1 \cdot a_{25} \end{aligned}$$

Koristeći se zakonitostima aritmetičkih i geometrijskih nizova ovaj sistem dvije jednačine sa tri nepoznate (a_1,a_4 i a_{25}) možemo transformisati.

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 24d &= 114 \\ (a_1 + 3d)^2 &= a_1 \cdot (a_1 + 24d) \end{aligned}$$

što nakon sređivanja daje sistem dvije jednačine sa dvije nepoznate (a_1 i d)

$$\begin{aligned} a_1 + 9d &= 38 \\ d^2 - 2da_1 &= 0 \end{aligned}$$

Iz druge jednačine, koju možemo zapisati i sa $d(d - 2a_1) = 0$, zaključujemo da imamo dva slučaja:
Slučaj I:
$d = 0$. Tada je $a_1 = a_4 = a_{25} = 38$.
Slučaj II:
$d = 2a_1$. Ubacujući ovo u prvu jednačinu sistema imamo da je $a_1 + 18a_1 = 38$, to jest $a_1 = \frac{38}{19} = 2$. Tada je $d = 4$, a time su određena i preostala dva broja, $a_4 = a_1 + 3d = 14$ i $a_{25} = a_1 + 24d = 98$. Dakle, rješenje zadatka je

$$(a_1, a_4, a_{25}) \in \{(38, 38, 38), (2, 14, 98)\} \ .$$

□

Pekarić Selma, 4, JU Gimnazija „Mustafa Novalić" Gradačac

Rješavatelji zadataka 31 – 40 i nagradnih zadataka

Osnovna škola

OŠ "Sveti Franjo" Tuzla, *Žepić Lana* (7a): 31, 32, 33, 34, 37, 40;

Srednja škola

Gimanzija ""Mustafa Novalić" Gradačac - sljedeći učenici: *Hamzić Ismar* (2r): 33.; *Mujkanović Tarik* (2r): 34.; *Mulahalilović Amila* (4r): 35.; *Hasić Naida* (2r): 36.; *Barać Una* (2r): 37.; *Hadžić Lejla* (4r): 38.; *Mehanoviv́ Adna* (4r): 39.; *Pekarić Selma* (4r): 40.

Nagradni zadatak: Problem desetocifrenog broja

Nema pristiglih rješenja Nagradnog zadatka!