EVOLVENTA (JAMTK) 4(1) (2021), 17 – 24

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Zanimljive primjene Šurove nejednakosti

Šefket Arslanagić[a], Daniela Zubović[b]

[a] *Sarajevo, BiH*
[b] *Prirodno-matematički fakultet Sarajevo*

Sažetak: U ovom radu, koristeći Šurovu nejednakost, dokazujemo više raznih nejednakosti koje se bez ove značajne nejednakosti dokazuju znatno teže.

1. Uvod

U matematičkoj literaturi o nejednakostima značajno mjesto zauzima i Šurova[1)] nejednakost koja glasi: Ako su x, y, z pozitivni realni brojevi i r realan broj, tada je:

$$x^r (x-y)(x-z) + y^r (y-z)(y-x) + z^r (z-x)(z-y) \geq 0, \tag{1}$$

s jednakošću ako i samo ako je $x = y = z$.
Dva dokaza ove nejednakosti se mogu naći u [1], str. 169-175.
Za $r = 1$ dobijamo iz (1) sljedeću nejednakost:

$$1^0 \qquad x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x), \tag{A}$$

i njoj ekvivalentne nejednakosti:

$$2^0 \qquad xyz \geq (y+z-x)(x+z-y)(x+y-z), \tag{B}$$

$$3^0 \qquad (x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx), \tag{C}$$

$$4^0 \qquad (x-y)^2(x+y-z) + (y-z)^2(y+z-x) + (z-x)^2(z+x-y) \geq 0, \tag{D}$$

$$5^0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy+yz+zx), \tag{E}$$

$$6^0 \qquad \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 2, \tag{F}$$

te za $r = 2$ slijedi iz (1) sljedeća nejednakost:

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy\left(x^2+y^2\right) + yz\left(y^2+z^2\right) + zx\left(z^2+x^2\right), \tag{G}$$

gdje su $x, y, z > 0$.

Ciljna skupina: osnovna i srednja škola
Ključne riječi: Šurova nejednakost, dokaz, posljedica, jednakost
Kategorizacija: *Stručno-istraživački rad*
Rad preuzet: mart 2021.

[1)] Issai Schur (Šur), njemački matematičar rođen 1875. godine u Carskoj Rusiji, a umro u Tel Avivu (Izrael), 1941. godine.

2. Primjene Šurove nejednakosti

Svaku od nejednakosti $(A)-(G)$, pojedinačno, nije lako dokazati bez poznavanja i upotrebe Šurovu nejednakost. Ovo ćemo demonstrirati na nejednakostima (E) i (F).

Primjer 1. Dokazati nejednakost (E).

"Rješenje": Napišimo ovu nejednakost u obliku

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z}\geq(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)\,.$$

Poznato je da važi nejednakost

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \tag{2}$$

$$(\Longleftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0).$$

Sada bi trebalo dokazati da važi nejednakost

$$\frac{9xyz}{x+y+z}\geq xy+yz+zx. \tag{3}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo sljedeću nejednakost

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$$

kao i

$$\frac{xy+yz+zx}{3}\geq\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx},\quad \frac{xy+yz+zx}{3}\geq\sqrt[3]{x^2y^2z^2},$$

odnosno

$$x+y+z\geq 3\,\sqrt[3]{xyz}\quad \text{i}$$

$$xy+yz+zx\geq 3\,\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

Nakon množenja ovih nejednakosti, dobijamo

$$(x+y+z)\,(xy+yz+zx)\geq 9\,\sqrt[3]{x^3y^3z^3},\quad \text{to jest}$$

$$(x+y+z)\,(xy+yz+zx)\geq 9xyz,$$

a odavde

$$\frac{9xyz}{x+y+z}\leq xy+yz+zx, \tag{4}$$

a ovo nije nejednakost (3), to jest iz nejednakosti (2) i (4) ne slijedi nejednakost (E).

Primjer 2. Dokazati nejednakost (F).

"Rješenje": Imamo dobro nam poznatu **Nesbitovu** nejednakost

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2};\;\;(x,y,z>0)\,. \tag{5}$$

Napomena 1. Ukupno 24 razna dokaza nejednakosti (5) se može naći u [2], [3] i [4].

Preostaje nam sada da dokažemo nejednakost

$$\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{1}{2}; \ \ (x,y,z>0)\,. \tag{6}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}, \quad \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx},$$

odnosno

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}, \quad y+z \geq 2\sqrt{yz}, \quad z+x \geq 2\sqrt{zx},$$

a odavde nakon množenja ovih nejednakosti:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2}, \quad \text{to jest}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

ili

$$\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Dakle, ne važi nejednakost (6), to jest nakon sabiranja nejednakosti (5) i (7) ne slijedi nejednakost (F).

Sada vidimo koliko je važna (i korisna) Šurova nejednakost (1).

Napomena 2. U Primjerima 1. i 2. nismo dokazali tražene nejednakosti i zbog toga je napisano pod navodnicima "Rješenje". Dobro bi bilo da neko od čitalaca ovog članka pokuša da dokaže npr. nejednakosti (E) i (F) ne koristeći Šurovu nejednakost (1).

Sada ćemo dati nekoliko primjera dokaza nejednakosti koristeći Šurovu nejednakost (1).

Primjer 3. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$a^3+b^3+c^3 \geq a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+3abc, \tag{8}$$

gdje su a,b,c dužine stranica trougla ΔABC.

Rješenje: Očigledno, data nejednakost (8) je ekvivalentna sa nejednakošću

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right),$$

ili

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab\,(a+b)+bc\,(b+c)+ca\,(c+a)\,,$$

a ovo je nejednakost (A) koja je tačna, gdje je $x=a>0$, $y=b>0$, $z=c>0$.

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je $a=b=c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. □

Primjer 4. Neka su a,b,c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc=1$. Dokazati da je tada

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1. \quad \text{(IMO 2000)} \tag{9}$$

Rješenje: Nakon množenja i sređivanja, od nejednakosti (9) se dobije ekvivalentna nejednakost

$$a^2b+b^2c+c^2a \geq a+b+c+ab+bc+ca. \tag{10}$$

S obzirom da važi $abc=1$, možemo uzeti smjenu $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ gdje su $x,y,z>0$ jer su $a,b,c>0$. Nakon ove smjene, nejednakost (9) postaje

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2,$$

odnosno

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy\,(x + y) + yz\,(y + z) + zx\,(z + x)\,,$$

a ovo je specijalan slučaj Šurove nejednakosti (A), što znači da je nejednakost (10) tačna.

Vrijedi jednakost u (9) ako i samo ako je $x = y = z$, to jest $a = b = c = 1$. □

Primjer 5. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$9xyz + 1 \geq 4(xy + yz + zx), \tag{11}$$

ako je $x + y + z = 1$.

Rješenje: Koristeći uslov $x + y + z = 1$, nejednakost (11) se svodi na ekvivalentnu nejednakost

$$9xyz + (x + y + z)^3 \geq 4\,(x + y + z)\,(xy + yz + zx)\,,$$

koja se nakon kubiranja, množenja i sređivanja svodi na ekvivalentnu nejednakost

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy\,(x + y) + yz\,(y + z) + zx\,(z + x)\,,$$

a ovo je opet specijalan slučaj Šurove nejednakosti (A) pa je ista tačna, što znači da je i nejednakost (11) tačna.

Važi jednakost ako i samo ako je $x = y = z = \frac{1}{3}$. □

Primjer 6. Dokazati da važi nejednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 12PR, \tag{12}$$

gdje su a, b, c dužine stranica trougla, P površina trougla, a R radijus opisane kružnice trougla ΔABC.

Rješenje: Specijalan slučaj Šurove nejednakosti (A) glasi

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ca\,(c + a) \\ & \Longleftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (a + b + c)\,(ab + bc + ca) \\ & \Longleftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c)\,(ab + bc + ca) - 6 \cdot 4RP. \end{aligned} \tag{13}$$

Dokazaćemo sada da važi nejednakost

$$ab + bc + ca \geq 18Rr, \tag{14}$$

gdje je r radijus upisane kružnice u trougao ΔABC.
Nejednakost (14) je ekvivalentna sa nejednakošću

$$\begin{aligned} & ab + bc + ca \geq 18 \cdot \frac{abc}{4P} \cdot \frac{P}{s} \\ & \Longleftrightarrow ab + bc + ca \geq \frac{9abc}{2s} \\ & \Longleftrightarrow (a + b + c)\,(ab + bc + ca) \geq 9abc = 36PR. \end{aligned} \tag{15}$$

Ovdje smo koristili formule za površinu trougla $P = \frac{abc}{4R}$ i $P = rs$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla. Zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, imamo

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad \text{i} \quad ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

te nakon množenja ovih nejednakosti

$$(a + b + c)\,(ab + bc + ca) \geq 9abc = 36PR,$$

što znači da je nejednakost (15) tačna, pa je tačna i nejednakost (14).
Sada iz nejednakosti (13) i (15) slijedi

$$a^3+b^3+c^3 \geq 9abc-24PR, \quad \text{to jest}$$

$$a^3+b^3+c^3 \geq 9\cdot 4RP-24PR$$

ili

$$a^3+b^3+c^3 \geq 12PR,$$

a ovo je data nejednakost (12).
Vrijedi jednakost u (12) ako i samo ako je $a=b=c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. □

Primjer 7. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{a^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{b^2}{(s-c)(s-a)}+\frac{c^2}{(s-a)(s-b)} \leq \frac{6R}{r}, \tag{16}$$

gdje su a,b,c dužine stranica, s poluobim, R i r radijusi opisane i upisane kružnice trougla ΔABC.

Rješenje: Ovdje ćemo koristiti Heronovu formulu za površinu trougla $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je s poluobim trougla. Nejednakost (16) je ekvivalentna sa nejednakošću

$$\begin{aligned}
&a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \leq \frac{6R}{r}(s-a)(s-b)(s-c) \\
&\Longleftrightarrow a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \leq \frac{6R}{r}\cdot\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\
&\Longleftrightarrow a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \leq \frac{6R}{r}\cdot\frac{P^2}{s} \\
&\Longleftrightarrow a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \leq 6RP \\
&\Longleftrightarrow a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \leq 6R\cdot\frac{abc}{4R} \\
&\Longleftrightarrow a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \leq \frac{3}{2}abc \\
&\Longleftrightarrow a^2\cdot\frac{b+c-a}{2}+b^2\cdot\frac{a+c-b}{2}+c^2\cdot\frac{a+b-c}{2} \leq \frac{3}{2}abc \\
&\Longleftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),
\end{aligned}$$

a ovo je specijalni slučaj Šurove nejednakosti (A), što znači da je data nejednakost (16) tačna.
Vrijedi jednakost u nejednakosti (16) ako i samo ako je $a=b=c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. □

Primjer 8. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c} \leq \frac{abc}{r}, \tag{17}$$

gdje su a,b,c dužine stranica, r radijus upisane kružnice, a r_a, r_b ,r_c radijusi pripisanih kružnica trougla ΔABC.

Rješenje: Koristeći poznate formule (vidi [5])

$$r_a=\frac{P}{s-a},\ r_b=\frac{P}{s-b},\ r_c=\frac{P}{s-c},\ r=\frac{P}{s},$$

imamo

$$\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c}=\frac{a^3(s-a)}{P}+\frac{b^3(s-b)}{P}+\frac{c^3(s-c)}{P}=\frac{a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)}{rs},$$

pa sada data nejedankost (17) prelazi u ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)}{rs}\leq\frac{abc}{r}$$

$$\Longleftrightarrow a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)\leq abcs$$

$$\Longleftrightarrow a^3\cdot\frac{b+c-a}{2}+b^3\cdot\frac{a+c-b}{2}+c^3\cdot\frac{a+b-c}{2}\leq abc\cdot\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Longleftrightarrow a^3(b+c-a)+b^3(a+c-b)+c^3(a+b-c)\leq a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$$\Longleftrightarrow a^3b+a^3c-a^4+ab^3+b^3c-b^4+c^3a+bc^3-c^4\leq a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$$\Longleftrightarrow a^4-a^3b-a^3c+a^2bc+b^4-b^3c-ab^3+ab^2c+c^4-c^3a-c^3b+abc^2\geq 0$$

$$\Longleftrightarrow a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right),$$

a ovo je specijalan slučaj Šurove nejednakosti (G).
Vrijedi jednakost u (17) ako i samo ako je $a=b=c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. □

Primjer 9. Dokazati da važi nejednakost:

$$s^2+r^2\geq 14Rr \tag{18}$$

gdje je s poluobim, a R i r radijus opisane i upisane kružnice trougla ΔABC.

Rješenje: Ovdje ćemo koristiti **Ravijeve smjene** $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ gdje su $x,y,z>0$. Sada imamo

$$s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z,\ P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)},$$

$$r=\frac{P}{s}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},\quad R=\frac{abc}{4P}=\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}.$$

Data nejednakost (18) sada glasi

$$(x+y+z)^2+\frac{xyz}{x+y+z}\geq\frac{7}{2}\cdot\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z}$$

$$\Longleftrightarrow 2(x+y+z)^3+2xyz\geq 7(x+y)(y+z)(z+x). \tag{19}$$

Imamo poznati identitet

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x). \tag{20}$$

Sada dobijamo iz (19) i (20)

$$2x^3+2y^3+2z^3\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x). \tag{21}$$

Uzećemo specijalnu Šurovu nejednakost (A)

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja

$$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz.$$

Nakon sabiranja ove dvije nejednakosti, dobijamo sljedeću nejednakost

$$2\left(x^3+y^3+z^3\right) \geq xy\,(x+y)+yz\,(y+z)+zx\,(z+x)\,,$$

a ovo je nejednakost (21), q.e.d. Dakle, pokazali smo da je nejednakost (21) tačna, a to znači da je i nejednakost (18) tačna.
Vrijedi jednakost u (19), odnosno u (18) ako i samo ako je $x=y=z \Rightarrow a=b=c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. □

Primjer 10. Dokazati da važi nejednakost

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 4P\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right), \tag{22}$$

gdje su a,b,c dužine stranica; α,β,γ unutrašnji uglovi, a P površina trougla ΔABC.

Rješenje: Imamo zbog $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Heron)

$$\begin{aligned}
4P\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right) &= 4P\left(\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}+\sqrt{\frac{(s-c)\,(s-a)}{s\,(s-b)}}+\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ss-c}}\right)= \\
&= 4\left((s-b)\,(s-c)+(s-c)\,(s-a)+(s-a)\,(s-b)\right)= \\
&= 4\left(3s^2-2s\,(a+b+c)+bc+ac+ab\right)= \\
&= 4\left(ab+bc+ca-s^2\right)=4\left[ab+bc+ca-\frac{(a+b+c)^2}{4}\right]= \\
&= 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2
\end{aligned}$$

to jest

$$4P\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right)=2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2. \tag{23}$$

Sada data nejednakost (22), zbog (23) ima oblik

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2. \tag{24}$$

Uzimajući smjenu $\sqrt{a}=x,\ \sqrt{b}=y,\ \sqrt{c}=z$, dobijamo iz nejednakosti (24)

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2 \geq 2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$$

$$\Longleftrightarrow x^4+y^4+z^4+xyz\,(x+y+z) \geq 2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2. \tag{25}$$

Imamo specijalnu Šurovu nejednakost (G)

$$x^4+y^4+z^4+xyz\,(x+y+z) \geq xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)$$

odnosno

$$x^4+y^4+z^4+xyz\,(x+y+z) \geq x^3\,(y+z)+y^3\,(z+x)+z^3\,(x+y)\,. \tag{26}$$

Dokazaćemo da važi nejednakost

$$x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) \geq 2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2y^2. \tag{27}$$

Zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo

$$x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) = \left(x^3y+xy^3\right)+\left(y^3z+yz^3\right)+\left(z^3x+zx^3\right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{x^4y^4}+2\sqrt{y^4z^4}+2\sqrt{z^4x^4} = 2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2, \quad \text{to jest}$$

$$x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) \geq 2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2y^2.$$

Sada iz nejednakosti (26) i (27) slijedi nejednakost (25), što znači da je data nejednakost (22) tačna. Vrijedi jednakost u (22) ako i samo ako je $x=y=z \Rightarrow a=b=c$, to jest ako je u pitanju jednakostranični trougao. □

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
[2] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[3] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
[4] Š. Arslanagić, D. Zubović: *Nesbitova nejednakost - još tri dokaza*, Tangenta, Vol. 26, Br. 101/1, 2020-21, 1-5, Beograd.
[5] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić: *Nejednakosti*, Materijal za mlade matematičare, Sveska 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.