EVOLVENTA (JAMTK) 4(1) (2021), 25 – 37

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentim formulama

Mehmed Nurkanović[a], Mirsad Trumić[b]

[a] *Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*
[b] *JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

Sažetak: U radu se, u nekoliko specijalno odabranih primjera, uz komparativan pristup, ispituje konvergencija nizova koji su zadani rekurentnim formulama s konstantnim koeficijentima. Koriste se metodi standardne teorije nizova iz matematičke analize koja se sluša na prvoj godini studija i metodi diferentnih jednadžbi.

1. Uvod

Poznata je činjenica iz metodike nastave matematike da je određeni zadatak dobro riješiti na više načina, koristeći raličite metode, o čemu se više govori u [3]. U nekim slučajevima jedan metod ima preimućstvo nad drugim, što ćemo pokazati u ovom radu. Kada treba ispitati konvergenciju niza koristeći metode matematičke analize, onda to uglavnom radimo tako što pokažemo da je niz monoton i ograničen. U slučaju kada je niz zadan nekom rekurentnom formulom vrlo često se pokazuje samo konvergencija niza, a samu graničnu vrijednost niza je teško ili nemoguće izračunati bez korištenja metoda diferentnih jednadžbi. I kod jednog i kod drugog postupka (monotonost i ograničenost) javljaju se kognitivne prepreke, jer nailazimo na različite problemske situacije. Svaki novi zadatak podrazumijeva neke druge (nove) tehnike rješavanja. Međutim, ako problem rješavamo primjenom metoda diferentnih jednadžbi, onda je postupak ponekad značajno jednostavniji (naravno, samo u situaciji kad se diferentna jednadžba može riješiti, [4]). U ovom slučaju je potrebno naći opći član niza te odrediti njegov limes. Kako ćemo se, dakle, u radu baviti nizom koji je zadan rekurentnom formulom, potrebno ga je definirati.

Definicija 1.1. *Za niz x_n kažemo da je zadan rekurentno ako je zadano nekoliko prvih članova niza i pravilo po kojem se x_n računa pomoću nekoliko prethodnih članova niza.*

Rekurentne formule su ekvivalentne s diferentnim jednadžbama, stoga navodimo definiciju i teorem koji slijede, a neophodni su nam u narednoj sekciji [1, 5, 6].

Definicija 1.2. *Neka su a i b proizvoljni realni brojevi. Tada se jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = ax_n + b, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

naziva linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda s konstantnim koeficijentima.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: niz, rekurentna formula, monotonost, ograničenost, metod diferentnih jednadžbi
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: maj 2021.

Teorem 1.3. *Linearna diferentna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima (1), u slučaju $a \neq 1$, ima rješenje:*

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

2. Primjeri ispitivanja konvergencije nizova

Primjer 2.1. *Data su dva niza prirodnih brojeva:*

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 2p_n + 3q_n, \qquad p_1 = 2, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n, \qquad q_1 = 1. \end{aligned}$$

Dokazati da je niz $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergentan.*

Rješenje: *Prvi način*
Riješimo ovaj zadatak prvo metodima matematičke analize (teorija nizova). Uočimo da vrijedi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n(2p_n + 3q_n) - p_n(p_n + 2q_n)}{q_n(p_n + 2q_n)} = \frac{3q_n^2 - p_n^2}{q_n(p_n + 2q_n)} < 0$$

ako i samo ako je $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$ za sve $n = 1, 2, ...$, a što se dokazuje matematičkom indukcijom. Naime, očito je $\frac{p_1}{q_1} = 2 > \sqrt{3}$. Iz pretpostavke da vrijedi $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$ za neki prirodni broj $n > 1$, slijedi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2p_n + 3q_n}{p_n + 2q_n} = 1 + \frac{p_n + q_n}{p_n + 2q_n} = 1 + \frac{\frac{p_n}{q_n} + 1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} = 2 - \frac{1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} > 2 - \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = \sqrt{3},$$

to jest, po principu potpune matematičke indukcije je $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$ za svaki prirodni broj n. To znači da je niz $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ strogo monotono opadajući i ograničen je odozdo s $\sqrt{3}$. Zbog toga je taj niz i konvergentan.

Drugi način
Rekurentne formule za nizove p_n i q_n mogu se promatrati kao sistem diferentnih jednadžbi prvog reda koji se u matričnom obliku može napisati kao

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n = 1, 2, ...$$

pri čemu je

$$X_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opće rješenje sistema je $X_n = A^n X_0$, a matricu A^n izračunat ćemo koristeći Hamilton-Cayleyev teorem. Iz karakterističnog polinoma matrice A

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

dobiju se svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 2+\sqrt{3} \quad i \quad \lambda_2 = 2-\sqrt{3},$$

pa je

$$A^n = C_1\left(2+\sqrt{3}\right)^n + C_2\left(2-\sqrt{3}\right)^n, \tag{3}$$

gdje su C_1 i C_2 konstantne matrice. Njih ćemo odrediti koristeći početne uvjete. Za $n=0$ imamo

$$A^0 = C_1 + C_2 \Longrightarrow I = C_1 + C_2,$$

a za $n=1$ je

$$A = C_1\left(2+\sqrt{3}\right) + C_2\left(2-\sqrt{3}\right),$$

odakle se dobije

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zamjenom u (3), imamo

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] & \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] & \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \end{bmatrix}$$

Kako je $X_n = A^n X_0$, konačno dobijamo

$$X_n = \begin{bmatrix} \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \end{bmatrix},$$

odnosno

$$p_n = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n,$$

$$q_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Sada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

□

Primjedba 2.2. *Na ovaj drugi način dobili smo preciznu graničnu vrijednost niza, što je prednost u odnosu na prethodni, prvi način, gdje je ustanovljena samo konvergencija niza.*

Primjer 2.3. *Neka je dat niz realnih brojeva:*

$$x_1 = a,\ \ x_2 = b,\ \ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}\ \ (n = 3, 4, ..).$$

Ispitati konvergenciju datog niza i u slučaju konvergencije izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Rješenje: *Prvi način*
Riješimo i ovaj zadatak prvo metodima matematičke analize koja se sluša na prvoj godini studija matematike. Očito je da ovaj iterativni postupak predstavlja dobro poznati metod polovljenja intervala. Primijetimo da je za $a = b$ niz konstantan, to jest vrijedi $x_n = a = b$ $(n = 1, 2, ...)$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = b$. Zato pretpostavimo da je $a < b$ (analogno bi se dokazivalo i u slučaju $a > b$). Naime, ako uvedemo oznake

$$I_n = [x_n, x_{n+1}], \quad n = 1, 2, ...,$$

onda će nam $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ predstavljati niz umetnutih (gnijezdo) zatvorenih intervala jer je

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad d(I_n) = \frac{d(I_1)}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, ...$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} d(I_n) = 0$. Prema odgovarajućem teoremu (teorem o gnijezdu) postoji tačno jedan realan broj c takav da je $c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ i pri tome su nizovi $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ monotoni (prvi monotono rastući, a drugi monotono opadajući) i, budući da svi članovi tih nizova leže u $[a, b]$, oni su i ograničeni, pa zbog toga i konvergentni i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = c$. Preostaje samo odrediti broj c. To se može postići induktivnim putem na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = x_{2\cdot 2-1} = \frac{a+b}{2}, \quad x_4 = x_{2\cdot 2} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{a + (1+2)\,b}{2^{2\cdot 2-2}},\\
&x_5 = x_{2\cdot 3-1} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a+(1+2)b}{2^2}}{2} = \frac{(1+2)\,a + \left(1+2^2\right) b}{2^{2\cdot 3-3}},\\
&x_6 = x_{2\cdot 3} = \frac{\frac{a+(1+2)b}{2^2} + \frac{(1+2)a+\left(1+2^2\right)b}{2^3}}{2} = \frac{\left(1+2^2\right) a + \left(1+2+2^3\right) b}{2^{2\cdot 3-2}},\\
&x_7 = x_{2\cdot 4-1} = \frac{\frac{(1+2)a+\left(1+2^2\right)b}{2^3} + \frac{\left(1+2^2\right)a+\left(1+2+2^3\right)b}{2^4}}{2} = \frac{\left(1+2+2^3\right) a + \left(1+2^2+2^4\right) b}{2^{2\cdot 4-3}},\\
&x_8 = x_{2\cdot 4} = \frac{\frac{\left(1+2^2\right)a+\left(1+2+2^3\right)b}{2^4} + \frac{\left(1+2+2^3\right)a+\left(1+2^2+2^4\right)b}{2^5}}{2} = \frac{\left(1+2^2+2^4\right) a + \left(1+2+2^3+2^5\right) b}{2^{2\cdot 4-2}},
\end{aligned}$$

iz čega se mogu naslutiti opće formule

$$x_{2k-1} = \frac{\left(1+2+2^3+...+2^{2k-5}\right) a + \left(1+2^2+...+2^{2k-4}\right)}{2^{2k-3}} = \frac{\left(1 + 2\cdot\frac{\left(2^2\right)^{k-2}-1}{2^2-1}\right) a + \frac{\left(2^2\right)^{k-1}-1}{2^2-1} b}{2^{2k-3}},$$

$$x_{2k} = \frac{\left(1+2^2+...+2^{2k-4}\right) a + \left(1+2+2^3+...+2^{2k-3}\right) b}{2^{2k-2}} = \frac{\frac{\left(2^2\right)^{k-1}-1}{2^2-1} a + \left(1 + 2\cdot\frac{\left(2^2\right)^{k-1}-1}{2^2-1}\right) b}{2^{2k-2}},$$

odnosno

$$\begin{aligned}
x_{2k-1} &= \frac{a+2b}{3} + \frac{a-b}{3\cdot 2^{2k-3}},\\
x_{2k} &= \frac{a+2b}{3} - \frac{a-b}{3\cdot 2^{2k-2}},
\end{aligned}$$

za $k \in \{1, 2, ...\}$.

Primjenom potpune matematičke indukcije dokazuje se potpuna ispravnost prethodnih općenitih formula za članove nizova s parnim i s neparnim indeksima. Sada je očito da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{a+2b}{3}.$$

Drugi način

Jednakost $x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ možemo napisati u obliku: $2x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$, što predstavlja homogenu diferentnu jednadžbu drugog reda. Njena karakteristična jednadžba je

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Opće rješenje spomenute diferentne jednadžbe je oblika:

$$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Odredimo konstante C_1 i C_2, koristeći početne uvjete x_1 i x_2. Za $n = 1$ imamo

$$x_1 = C_1 + C_2 \left(\frac{-1}{2}\right) \Longrightarrow a = C_1 - \frac{C_2}{2},$$

a za $n = 2$ je

$$x_1 = C_1 + C_2 \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \Longrightarrow b = C_1 + \frac{C_2}{4}.$$

Rješavanjem posljednjeg sistema dobijemo $C_1 = \dfrac{a+2b}{3}$ i $C_2 = \dfrac{4(b-a)}{3}$, pa je rješenje diferentne jednadžbe:

$$x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Sada možemo naći limes niza x_n:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = \frac{a+2b}{3}$$

□

Primjedba 2.4. *Prethodni primjer u najboljoj mjeri pokazuje da je ponekad metod diferentnih jednadžbi znatno jednostavniji od metoda standardne matematičke analize.*

Primjer 2.5. *Dokazati da je niz zadat rekurentnom relacijom:*

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n}{2}, \quad n \in N,$$

konvergentan.

Rješenje: *Prvi način*

Primijetimo prvo da će niz biti strogo monotono rastući (jer je $a_1 = 0$) ako i samo ako vrijedi

$$2(a_{n+1} - a_n) = 3 - a_n > 0 \Longleftrightarrow a_n < 3 \ (n = 1, 2, ...).$$

Matematičkom indukcijom dokažimo da je zaista $a_n < 3$ za $n = 1, 2, \dots$. Naime, za $n = 1$ nejednakost je očito tačna. Koristeći pretpostavku da vrijedi $a_n < 3$ za neko $n > 1$, imamo

$$a_{n+1} = \frac{3 + a_n}{2} < \frac{3+3}{2} = 3,$$

pa je na osnovu principa potpune matematičke indukcije tačna nejednakost $a_n < 3$ za sve $n = 1, 2, \dots$. To ujedno znači da je niz i ograničen odozgo s 3. Zbog toga je on i konvergentan.

Drugi način

Jednadnakost $a_{n+1} = \dfrac{3 + a_n}{2}$, možemo napisati i kao

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\, a_n + \frac{3}{2},$$

što predstavlja nehomogenu linearnu diferentnu jednadžbu prvog reda s konstantnim koeficijentima, čije je opće rješenje dato u obliku (prema Teoremu 1.3)

$$a_n = \left(\alpha - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a},$$

gdje je $\alpha = a_0 = 0$ početni uvjet. Zbog toga je

$$a_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3,$$

iz čega neposredno slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\right) = 3.$$

□

Primjedba 2.6. *I u ovom slučaju, metodom matematičke analize (prvi način) ustanovili smo samo konvergenciju datog niza, a metodom diferentnih jednadžbi (drugi način) izračunali smo tačnu graničnu vrijednost niza.*

Primjer 2.7. *Neka je dat niz formulom*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geq 3, \tag{4}$$

pri čemu su početni uvjeti $a_1 = a_2 = 1$ (dobro poznati Fibonaccijev niz, [1, 2, 5, 6]). Naći

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Rješenje: Jednakost (4) možemo napisati u obliku diferentne jednadžbe

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad n \geq 3. \tag{5}$$

Odgovarajuća karakteristična jednadžba jednadžbe (5) je

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zato opće rješenje date jednadžbe (5) ima oblik

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Konstante C_1 i C_2 odredit ćemo koristeći početne uvjete

$$\begin{aligned} n = 1 &\Longrightarrow a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1, \\ n = 2 &\Longrightarrow a_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_2 = 1, \end{aligned}$$

odakle se dobija da je $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, pa je rješenje

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Pošto smo našli opći član niza (4), sada možemo izračunati tražene limese

a)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(1 - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n}\right)^{-\frac{(1+\sqrt{5})^n}{(1-\sqrt{5})^n}}\right]^{-\frac{(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n}\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\sqrt{5})^n}{n(1+\sqrt{5})^n}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)e^0 \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

b) (v. sličan postupak u [2, 5, 6])

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

□

Primjedba 2.8. *Vidimo da smo u oba slučaja kao rezultat izračunavanja limesa dobili konstantu* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *poznatu kao* **zlatni presjek.**

Primjedba 2.9. *Iz teorije nizova u matematičkoj analizi poznato je da, ukoliko postoji limes b), postoji i limes a) i oni su međusobno jednaki. Naime, koristeći Stolzov teorem, imamo*

$$\begin{aligned} \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\triangle(\ln a_n)}{\triangle(n)} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \ln \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

U prethodnom primjeru smo to samo dodatno potvrdili.

Primjer 2.10. *Ispitati konvergenciju niza zadanog rekurentnom formulom*

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

uzimajući da je $0 \leq x_0 < 2$.

Rješenje: *Prvi način*
Upotrijebimo prvo metode iz teorije nizova. Očito je da vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2 + x_0} < \sqrt{2+2} = 2, \\ x_2 &= \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2+2} = 2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

i ako pretpostavimo da je za neki prirodni broj $n > 1$ tačna nejednakost $x_n < 2$, tada je

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Dakle, primjenom principa potpune matematičke indukcije zaključujemo da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ograničen odozgo s 2. S druge strane, iz (6) slijedi

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n > x_n^2,$$

ako je

$$x_n^2 - x_n - 2 < 0,$$

a što je sigurno zadovoljeno za $0 \leq x_n < 2$. Dakle, $x_{n+1} > x_n$ za sve $n = 0, 1, 2, ...$, što znači da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo monotono rastući, pa je, zbog ograničenosti odozgo s 2, ujedno i konvergentan niz.

Drugi način
Jednakost (6) možemo razmatrati kao nelinearnu diferentnu jednadžu prvog reda. Uvedimo smjenu: $x_n = 2\cos(2z_n)$. Tada (6) poprima oblik

$$2\cos(2z_{n+1}) = \sqrt{2 + 2\cos(2z_n)},$$

odnosno,

$$\cos(2z_{n+1}) = \cos(z_n),$$

odakle je

$$z_{n+1} = \pm\frac{1}{2} z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Razmotrimo ove slučajeve odvojeno.

i) $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opće rješenje ove jednadžbe je, prema (2),

$$z_n = (z_0 - 2k\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pri tome je

$$x_0 = 2\cos(2z_0) \Longrightarrow z_0 = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right),$$

što implicira

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - 2k\pi\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Konačno je opće rješenje polazne jednadžbe

$$x_n = 2\cos\left(\left(\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - 4k\pi\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4k\pi\right), \; n = 0, 1, 2, ..., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odavde je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\cos(4k\pi) = 2 \cdot 1 = 2,$$

što znači da je niz konvergentan.

ii) $z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opće rješenje ove jednadžbe je, prema (2),

$$z_n = \left(z_0 - \frac{2k\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

odnosno

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{2k\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Konačno je opće rješenje polazne jednadžbe

$$x_n = 2\cos\left(\left(\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{4k\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4k\pi}{3}\right), \; n = 0, 1, 2, ..., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odavde je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

ili

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Zbog činjenice da je $x_n > 0$ za sve $n = 1, 2, ...$, u obzir dolazi samo slučaj $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

$\square$

Primjer 2.11. *Neka je dat niz*

$$a_{n+1} = a + b - \frac{ab}{a_n} \qquad n = (1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rješenje: Jednakost (7) možemo napisati u obliku

$$a_{n+1} = \frac{(a+b)a_n - ab}{a_n} \qquad n = (1, 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

što je ustvari Riccatijeva diferentna jednadžba.Uvodenjem smjene $a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, ta se jednadžba transformira u linearnu jednadžbu oblika

$$b_{n+2} - (a+b)b_{n+1} + abb_n = 0. \tag{9}$$

Jednadžba (9) ima karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0,$$

čiji su korijeni $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$, pa je njeno opće rješenje

$$b_n = C_1 a^n + C_2 b^n.$$

Vraćanjem u smjenu dobijamo rješenje polazne jednadžbe

$$a_n = \frac{C_1 a^{n+1} + C_2 b^{n+1}}{C_1 a^n + C_2 b^n}, \tag{10}$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Potrebno je razmatrati dva slučaja

i) $C_2 \neq 0$
Tada je

$$a_n = \frac{Ca^{n+1} + b^{n+1}}{Ca^n + b^n},$$

gdje je $C = \frac{C_1}{C_2}$. U zavisnosti od toga da li je a jednako, manje ili veće od b razlikujemo sljedeće situacije.

1° Ako je $a = b$, tada imamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(C+1)a^{n+1}}{(C+1)a^n} = a = b.$$

2° Ako je $a < b$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aC(\frac{a}{b})^n + b}{C(\frac{a}{b})^n + 1} = b.$$

3° Ako je $a > b$, onda je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aC + b(\frac{b}{a})^n}{C + (\frac{b}{a})^n} = a.$$

ii) $C_2 = 0$
U ovom slučaju se dobije još jedno rješenje date jednadžbe, konstantan niz

$$a_n = a \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

□

Primjer 2.12. *Nizovi* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *i* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *zadani su rekurentnim formulama*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n), \; b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n), \; c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \; n = 0, 1, 2, ...,$$

gdje su $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$.
Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Rješenje: Dati sistem se može napisati u matričnom obliku

$$X_{n+1} = AX_n,$$

gdje je

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Pošto vrijedi

$$X_n = A^n X_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

to je dovoljno naći matricu A^n. Problem ćemo riješiti korištenjem Hamilton-Cayleyevog teorema, prema kojem je

$$k(A) = \mathbf{0},$$

gdje je $k(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A, a $\mathbf{0}$ nula matrica. Kako je

$$k(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{-4\lambda^3 + 3\lambda + 1}{4},$$

prema Hamilton-Cayleyevom teoremu imamo

$$4A^3 - 3A - I = 0,$$

odnosno,

$$4A^{n+3} - 3A^{n+1} - A^n = 0,$$

što predstavlja linearnu diferentnu jednadžbu trećeg reda s konstantnim koeficijentima. Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$, odakle je onda,

$$A^n = C_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (C_2 + C_3 n), \tag{11}$$

gdje su C_1, C_2 i C_3 konstantne matrice koje treba naći koristeći početne uvjete.

Za $n = 1$ imamo,

$$A = C_1 - \frac{1}{2}C_2 - C_3\frac{1}{2}.$$

Za $n = 2$ je

$$A^2 = C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{2}C_3,$$

dok je za $n = 3$

$$A^3 = C_1 - \frac{1}{8}C_2 - \frac{3}{8}C_3.$$

Odavde se dobija

$$C_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanjem C_1, C_2 i C_3 u (11), imamo,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Konačno je

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (1+2(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c \\ (1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1+2(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c \\ (1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1+2(-\frac{1}{2})^n)c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3}\left[(1+2(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c\right], \\ b_n &= \frac{1}{3}\left[(1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1+2(-\frac{1}{2})^n)b + (1-(-\frac{1}{2})^n)c\right], \\ c_n &= \frac{1}{3}\left[(1-(-\frac{1}{2})^n)a + (1-(-\frac{1}{2})^n)b + (1+2(-\frac{1}{2})^n)c\right]. \end{aligned}$$

Tražene granične vrijednosti su

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left[(1+2(-\frac{1}{2})^n)a + (1-1(-\frac{1}{2})^n)b + (1-1(-\frac{1}{2})^n)c\right] = \frac{1}{3}(a+b+c),$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left[(1-1(-\frac{1}{2})^n)a + (1+2(-\frac{1}{2})^n)b + (1-1(-\frac{1}{2})^n)c\right] = \frac{1}{3}(a+b+c),$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left[(1-1(-\frac{1}{2})^n)a + (1-1(-\frac{1}{2})^n)b + (1+2(-\frac{1}{2})^n)c\right] = \frac{1}{3}(a+b+c).$$

□

Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati da je niz zadan s

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n + 4}{4a_n + 5}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

konvergentan.

2. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = \frac{ab}{a + b - a_n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdje je $a_1 = \dfrac{ab}{a+b}$.

a) Naći opći član niza a_n.

b) Odrediti $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

3. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdje je $a_1 = 1$. Izračunati $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

4. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = \frac{1}{4(1 - a_n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdje je $a_1 = 0$. Naći $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Literatura

[1] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations* (3rd ed.), Springer, New York, 2005.
[2] A. Nurkanović, A. Muminagić: Nestandardni dokazi nekih osobina Fibonaccievih brojeva, *Evolventa*, 1(2), 20-26, 2018.
[3] A. Muminagić: Jedan zadatak s više načina rješavanja, *Evolventa*, 2(1), 2-11, 2019.
[4] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, 1(1), 2-5, 2018.
[5] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
[6] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.