EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 2 – 11

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

# Uloga invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima

**Mirsad Trumić**[a]

[a]*JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

**Sažetak:** U radu se ispituju konvergencije nekih nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima. Koristi se metod invarijanti pri rješavanju odgovarajućih diferentnih jednadžbi višeg reda s varijabilnim koeficijentima, kao i neautonomnih sistema diferentnih jednadžbi.

## 1. Uvod

Invarijanta kod diferentnih jednadžbi ima istu ulogu kao prvi integral kod diferencijalnih jednadžbi. Ono što je prvi integral kod diferencijalnih jednadžbi, to je invarijanta kod diferentnih jedadžbi. Izraz koji ostaje konstantan (invarijantan) duž rješenja diferentne jednadžbe i koji ukazuje na ponašanje rješenja diferentne jednadžbe naziva se invarijantom ili prvim integralom diferentne jednadžbe. Naziv prvi integral, se koristi zbog analogije sa diferencijalnim jednadžbama [2].

**Definicija 1.1.** *Neka su $a$ i $b$ proizvoljni realni brojevi. Tada se jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \qquad n = n_0, n_0 + 1, \ldots, \tag{1}$$

*naziva linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda.*

Primjenom matematičke indukcije može se pokazati da je opće rješenje linearne diferentne jednadžbe prvog reda (1) oblika

$$x_n = x_{n_0} \prod_{i=n_0}^{n-1} a_i + \sum_{k=n_0}^{n-1} b_k \prod_{i=k+1}^{n-1} a_i, \tag{2}$$

za sve $n \geq n_0 \geq 0$ .

U tom slučaju naš zadatak je samo izračunati određene proizvode i sume, što s metodičkog aspekta nije beznačajno. Naravno, valja napomenuti da i izračunavanje suma ponekad zna biti otežano. Nadalje, koristeći se invarijantom možemo nelinearnu diferentnu jednadžbu određenog reda transformirati u linearnu istog reda. Slična je situacija i sa sistemima diferentnih jednadžbi, kada se primjenom metoda invarijante rješavanje sistema određenog reda svodi na rješavanje linearne ili pak nelinearne diferentne jednadžbe istog reda koju znamo riješiti. Nakon navedenih mogućnosti primjene, sada možemo i definirati invarijantu (v. [2]).

*Ciljna skupina:* fakultet, srednja škola
*Ključne riječi:* niz, rekurentna formula, monotonost, diferentne jednadžbe, invarijanta
*Kategorizacija: Stručno-istraživački rad*
*Rad preuzet:* septembar 2021.

**Definicija 1.2.** *Posmatrajmo jednadžbu*

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

*gdje je* $x_n \in \mathbb{R}^k$ *i* $f : D \to D$ *neprekidno preslikavanje, gdje je* $D \subset \mathbb{R}^k$*. Nekonstantno, neprekidno preslikavanje* $I : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *zovemo invarijantom jednadžbe (3) ako je*

$$I(x_{n+1}) = I(f(x_n)) = I(x_n), \qquad za \;\; svako \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ovaj se metod može vrlo efikasno primijeniti u nekim situacijama ispitivanja konvergencije niza zadanog rekurentnom formulom. Tako će ovdje upravo i biti riječi o tome, s tim što će rekurentne formule biti s varijabilnim koeficijentima. Time se ovaj rad nadovezuje na rad [6] u kome je bilo riječi o ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s konstantnim koeficijentima i gdje su korišteni neki drugi metodi.

## 2. Primjena rješavanja diferentnih jednadžbi metodom invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova

U ovoj sekciji bit će navedeni primjeri ispitivanja konvergencije nizova zadanih linearnim rekurentim formulama višeg reda s varijabilnim koeficijentima. Kako je svaka rekurentna formula ekvivalentna odgovarajućoj diferentnoj jednadžbi, zadatak će se svesti na rješavanje te diferentne jednadžbe s ciljem dobijanja općeg člana promatranog niza, na osnovu čega će se moći ispitati konvergencija niza. Svaka diferentna jednadžba bit će riješena korištenjem neke njene invarijante. Isto vrijedi i za sisteme diferentnih jednadžbi.

### *2.1. Linearne diferentne jednadžbe*

**Primjer 2.1.** *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$a_{n+1} - \frac{2n-1}{n} a_n + \frac{n-1}{n} a_{n-1} = 0, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{4}$$

*gdje su* $a_1 = 0$ *i* $a_2 = 1$ *početni uvjeti.*

**Rješenje:** Jednadžba (4) ima invarijantu $I\left(a_{n+2}, a_{n+1}\right) = (n+1)\, a_{n+2} - (n+1)\, a_{n+1}$, jer je

$$\begin{aligned} I\left(a_{n+2}, a_{n+1}\right) &= (n+1)\, a_{n+2} - (n+1)\, a_{n+1} = (2n+1)\, a_{n+1} - n a_n - (n+1)\, a_{n+1} \\ &= n a_{n+1} - n a_n = I\left(a_{n+1}, a_n\right) = \ldots = I\left(a_2, a_1\right) = a_2 - a_1 = 1. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$n a_{n+1} - n a_n = 1 \Longrightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda čije rješenje, prema (2), uz date početne uvjete, je oblika

$$a_n = \left( \prod_{i=1}^{n-1} 1 \right) a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \prod_{i=k+1}^{n-1} 1 \right) \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Opći član niza predstavlja $(n-1)$-vu parcijalnu sumu *harmonijskog reda*, za koji znamo da je divergentan. Dakle, dati niz je divergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty.$$

□

**Primjedba 2.2.** *U ovom slučaju smo rješavanje homogene linearne diferentne jednadžbe drugog reda s varijabilnim koeficijentima, uz pomoć invarijante, sveli na rješavanje nehomogene linearne diferentne jednadžbe prvog reda.*

**Primjer 2.3.** *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$x_{n+2} - (1 + e^n)\, x_{n+1} + e^n x_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

*gdje su $x_0 = 1$ i $x_1 = 4$ početni uvjeti.*

**Rješenje:** Jednadžba (5) ima invarijantu oblika$I(x_{n+2}, x_{n+1}) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n+1)}}[x_{n+2} - x_{n+1}]$. Zaista,

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n+1)}}[x_{n+2} - x_{n+1}] = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n+1)}}[(1 + e^n)\, x_{n+1} - e^n x_n - x_{n+1}] \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n-1)}}[x_{n+1} - x_n] = I(x_{n+1}, x_n) = \ldots = I(x_1, x_0) = x_1 - x_0 = 3. \end{aligned}$$

Na taj način dobijamo da vrijedi

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}n(n-1)}}[x_{n+1} - x_n] = 3 \Longrightarrow x_{n+1} = x_n + 3e^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Dobili smo diferentnu jednadžbu prvog reda čije rješenje je, uz date početne uvjete, oblika

$$x_n \quad = \quad \left(\prod_{i=0}^{n-1} 1\right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 1\right) 3e^{\frac{1}{2}k(k-1)} = x_0 + 3\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{2}k(k-1)} = 1 + 3\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{2}k(k-1)}.$$

Niz $x_n$ očito divergira i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

□

**Primjer 2.4.** *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$(n + 1)x_{n+2} + (2n - 1)x_{n+1} - 3nx_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

*gdje su $x_1 = -1$ i $x_2 = -7$ početni uvjeti.*

**Rješenje:** Jednadžba (6) ima invarijantu $I(x_{n+2}, x_{n+1}) = \frac{n+1}{(-3)^{n+1}}[x_{n+2} - x_{n+1}]$, jer je

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= \frac{n+1}{(-3)^{n+1}}[x_{n+2} - x_{n+1}] = \frac{n+1}{(-3)^{n+1}}\left[-\frac{2n-1}{n+1}x_{n+1} + \frac{3n}{n+1}x_n - x_{n+1}\right] \\ &= \frac{n}{(-3)^n}[x_{n+1} - x_n] = I(x_{n+1}, x_n) = \ldots = I(x_2, x_1) = \frac{1}{-3}[x_2 - x_1] = 2. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\frac{n}{(-3)^n}[x_{n+1} - x_n] = 2 \Longrightarrow x_{n+1} = x_n + 2\frac{(-3)^n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Dobili smo nehomogenu linearnu diferentnu jednadžbu prvog reda, čije je rješenje

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 1\right) x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 1\right) 2\frac{(-3)^k}{k} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{3^k}{k}, \quad n \geq 1,$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{3^k}{k}.$$

Pošto opći član alternirajuceg reda $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^k}{k}$ ne teži ka 0, zaključujemo da je red divergentan. Dakle, niz $x_n$ oscilirajući divergira. □

**Primjer 2.5.** *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$2(n+1)x_{n+2} - (2n+1)x_{n+1} - x_n = 0, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{7}$$

*gdje su* $x_1 = \frac{1}{2}$ *i* $x_2 = 1$ *početni uvjeti.*

**Rješenje:** Jednadžba (7) ima invarijantu

$$I(x_{n+2}, x_{n+1}) = (-2)^{n+1}\,(n+1)!\,(x_{n+2} - x_{n+1})$$

jer je

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= (-2)^{n+1}\,(n+1)!\,(x_{n+2} - x_{n+1}) \\ &= (-2)^{n+1}\,(n+1)!\left[\frac{(1+2n)}{2\,(n+1)}x_{n+1} + \frac{1}{2\,(n+1)}x_n - x_{n+1}\right] \\ &= (-2)^n\, n![x_{n+1} - x_n] = \ldots = I(x_2, x_1) = (-2)\,[x_2 - x_1] = -1. \end{aligned}$$

Odavde se dobije

$$(-2)^n\, n!\,(x_{n+1} - x_n) = -1 \Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{(-2)^n\, n!}, \quad n \geq 1.$$

Dobili smo diferentnu jednadžbu prvog reda, čime smo snizili red jednadžbe (7) za jedan. Njeno rješenje u odnosu na početne uvjete je

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 1\right)x_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 1\right)\frac{1}{(-2)^k\, k!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(-2)^k\, k!},$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{2^k k!}.$$

Primjenom *Leibnizovog kriterija* vidimo da je gornji red konvergentan, pa je i niz $x_n$ konvergentan. □

**Primjer 2.6.** *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$x_{n+2} + x_{n+1} - n^2 x_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

*gdje su* $x_1 = -\frac{2}{3}$ *i* $x_2 = 1$ *početni uvjeti.*

**Rješenje:** Jednadžba (8) ima invarijantu $I(x_{n+2}, x_{n+1}) = \frac{1}{n!}[x_{n+2} + (n+1)\,x_{n+1}]$, jer je

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= \frac{1}{n!}[x_{n+2} + (n+1)\,x_{n+1}] = \frac{1}{n!}[-x_{n+1} + n^2 x_n + (n+1)\,x_{n+1}] \\ &= \frac{1}{(n-1)!}[x_{n+1} + n x_n] = \ldots = I(x_2, x_1) = \frac{1}{(1-1)!}[x_2 + x_1] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dobijanjem invarijante jednadžbe (8), snizili smo red jednadžbe za jedan. Tako imamo

$$\frac{1}{(n-1)!}[x_{n+1}+nx_n]=\frac{1}{3}\Longrightarrow x_{n+1}=-nx_n+\frac{1}{3}\,(n-1)!,$$

što je diferentna jednadžba prvog reda, čije je rješenje, uzimajući u obzir početne uvjete, dato u obliku

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\prod_{i=1}^{n-1}(-i)\right)x_1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}(-i)\right)(k-1)! \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{3}\left[-2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\right]. \end{aligned}$$

Kako je niz $x_n$ proizvod neograničenog i ograničenog niza, očito je da on divergira ka beskonačnosti. □

**Primjer 2.7.** *Ispitati konvergenciju niza koji je dat rekurentnom formulom*

$$x_{n+2}-\frac{(3n-2)}{n-1}x_{n+1}+\frac{2n}{(n-1)}x_n=n2^n,\quad n=2,3,\ldots, \tag{9}$$

*gdje su $x_2=2$ i $x_3=9$ početni uvjeti.*

**Rješenje:** Data jednadžba ima invarijantu $I(x_{n+2},x_{n+1})=\frac{1}{n}[x_{n+2}-2x_{n+1}]-2^{n+1}$, jer je

$$\begin{aligned} I(x_{n+2},x_{n+1}) &= \frac{1}{n}[x_{n+2}-2x_{n+1}]-2^{n+1}=\frac{1}{n}\left[\frac{(3n-2)}{n-1}x_{n+1}-\frac{2n}{(n-1)}x_n+n2^n-2x_{n+1}\right]-2^{n+1} \\ &= \frac{1}{n-1}[x_{n+1}-2x_n]-2^n=\ldots=I(x_3,x_2)=[x_3-2x_2]-2^2=1. \end{aligned}$$

Koristeći invarijantu uspjeli smo sniziti red date jednadžbe te tako dobiti jednadžbu prvog reda

$$\frac{1}{n-1}[x_{n+1}-2x_n]-2^n=1\Longleftrightarrow x_{n+1}=2x_n+2^n\,(n-1)+(n-1)\,,n\geq 2. \tag{10}$$

Dalje imamo

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{x_n}{2^n}=\frac{1}{2}(n-1)+\frac{n-1}{2^{n+1}}\Longleftrightarrow \triangle\left(\frac{x_n}{2^n}\right)=\frac{1}{2}(n-1)+\frac{n-1}{2^{n+1}}$$

odnosno,

$$x_n=2^n\left[\frac{1}{2}\triangle^{-1}(n-1)+\triangle^{-1}\left(\frac{n-1}{2^{n+1}}\right)+C\right]. \tag{11}$$

Izračunajmo sada $\triangle^{-1}(n-1)$ i $\triangle^{-1}\frac{n-1}{2^{n+1}}$, koristeći formule $\triangle^{-1}a^t=\frac{a^t}{a-1}, a\neq 1$ i $\triangle^{-1}n^{(k)}=\frac{n^{(k+1)}}{k+1}$, gdje je $n^{(k)}=n(n-1)...(n-k+1),\;\; n,k$ prirodni brojevi. Naime,

$$\triangle^{-1}(n-1)=\triangle^{-1}(n)-\triangle^{-1}(1)=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2},$$

$$\triangle^{-1}\frac{n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\triangle^{-1}n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\triangle^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Kako za antidiferentni operator vrijedi

$$\triangle^{-1}(x(n)\triangle y(n)) = x(n)y(n) - \triangle^{-1}(Ey(n)\triangle x(n))$$

to će biti

$$\begin{aligned}\triangle^{-1} n\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left\| \begin{array}{cc} x(n) = n & \triangle x(n) = 1 \\ \triangle y(n) = (\frac{1}{2})^n & y(n) = -2(\frac{1}{2})^n \end{array} \right\| \\ &= -2n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \triangle^{-1}\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot 1\right] \\ &= -2n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \triangle^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Odavde se dobija

$$\triangle^{-1}\frac{n-1}{2^{n+1}} = -\frac{n}{2^n}.$$

Sada, uvrštavanjem traženih vrijednosti u (11) dobijamo rješenje diferentne jednadžbe (opći član niza)

$$x_n = -n + C2^n - \frac{3}{4}n2^n + \frac{1}{4}n^2 2^n.$$

Odredimo konstantu $C$ iz početnih uvjeta

$$2 = x_2 = -2 + C2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot 2^2 \Longrightarrow C = \frac{3}{2},$$

pa je $x_n = -n + 3\cdot 2^{n-1} - \frac{3}{4}n2^n + \frac{1}{4}n^2 2^n$. Tako dobijemo da je niz $x_n$ divergentan, odnosno vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

□

**Primjedba 2.8.** *Za razliku od prethodnih slučajeva gdje su diferentne jednadžbe bile homogene, ovog puta smo imali nehomogenu jednadžbu. Ali smo i ovdje zahvaljujući invarijanti uspjeli sniziti red diferentne jednadžbe.*

**Primjer 2.9.** *Ispitati konvergenciju niza koji je dat relacijom*

$$x_{n+3} - (n+5)\,x_{n+2} + (3n+5)\,x_{n+1} - 2nx_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

*gdje su $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ početni uvjeti.*

**Rješenje:** Jednadžba (12) je trećeg reda čija je invarijanta

$$I(x_{n+3}, x_{n+2}, x_{n+1}) = x_{n+3} - (n+4)\,x_{n+2} + 2\,(n+1)\,x_{n+1}$$

jer je

$$\begin{aligned}I(x_{n+3}, x_{n+2}, x_{n+1}) &= x_{n+3} - (n+4)\,x_{n+2} + 2\,(n+1)\,x_{n+1} \\ &= (n+5)\,x_{n+2} - (3n+5)\,x_{n+1} + 2nx_n - (n+4)\,x_{n+2} + 2\,(n+1)\,x_{n+1} \\ &= x_{n+2} - (n+3)\,x_{n+1} + 2nx_n = \ldots = I(x_3, x_2, x_1) = x_3 - 4x_2 + 2x_1 = 0.\end{aligned}$$

Na taj način dobili smo sljedeću diferentnu jednadžbu drugog reda

$$x_{n+2} - (n+3)\,x_{n+1} + 2nx_n = 0, \quad n \geq 1, \tag{13}$$

čime smo snizili red date jednadžbe s tri na dva. Međutim, jednadžba (13) također ima invarijantu oblika

$$I(x_{n+2}, x_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}[x_{n+2} - (n+1)\,x_{n+1}]$$

jer vrijedi

$$\begin{aligned} I(x_{n+2}, x_{n+1}) &= \frac{1}{2^{n+1}}[x_{n+2} - (n+1)\,x_{n+1}] = \frac{1}{2^{n+1}}[(n+3)\,x_{n+1} - 2nx_n - (n+1)\,x_{n+1}] \\ &= \frac{1}{2^n}[x_{n+1} - nx_n] = \ldots = I(x_2, x_1) = \frac{1}{2}\,(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\frac{1}{2^n}[x_{n+1} - nx_n] = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_{n+1} = nx_n + 2^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

što je diferentna jednadžba prvog reda, tj. snizili smo i red jednadžbe (13) za jedan. Njeno je rješenje, s obzirom na početne uvjete, oblika

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} i\right) 2^{k-1} = (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k-1}}{k!}.$$

Iz ovog se vidi da niz $x_n$ očito divergira, budući da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k!} = \frac{1}{2} e^2,$$

te vrijedi vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

□

**Primjedba 2.10.** *Koristeći se metodom invarijante, rješavanje homogene linearne diferentne jednadžbe trećeg reda sveli smo na rješavanje nehomogene linearne jednadžbe prvog reda. Na ovaj način snizili smo red diferentne jednadžbe za dva. Naravno nije to uvijek moguće, ali ako možemo red jednadžbe smanjiti makar za jedan i to je uspjeh, s obzirom na činjenicu da što je jednadžba višeg reda, to je njeno rješavanje zahtjevnije.*

*2.2. Sistemi diferentnih jednadžbi*

**Primjer 2.11.** *Neka su dati nizovi realnih brojeva*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{n}{n+2}x_n - \frac{3n}{n+2}y_n \\ y_{n+1} &= \frac{-1}{n+2}x_n + \frac{1-2n}{n+2}y_n, \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots\ , \end{aligned}$$

*gdje su* $x_0 = 1$ *i* $y_0 = 0$ *početni uvjeti. Odrediti* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

**Rješenje:** Invarijanta datog sistema je $I(x_{n+1}, y_{n+1}) = (n+2)\,(x_{n+1} - y_{n+1})$, jer vrijedi

$$\begin{aligned} I(x_{n+1}, y_{n+1}) &= (n+2)\,(x_{n+1} - y_{n+1}) = (n+2)\left(\frac{n}{n+2}x_n - \frac{3n}{n+2}y_n + \frac{1}{n+2}x_n - \frac{1-2n}{n+2}y_n\right) \\ &= I(x_n, y_n) = (n+1)\,(x_n - y_n) = \ldots = I(x_0, y_0) = (x_0 - y_0) = 1. \end{aligned}$$

S obzirom na invarijantu, onda vrijedi $(n+1)(x_n - y_n) = 1, \quad n \geq 0$. Odavde je

$$y_n = x_n - \frac{1}{n+1}, \tag{14}$$

pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu datog sistema dobija se linearna diferentna jednadžba prvog reda

$$x_{n+1} = \frac{-2n}{n+2} x_n + \frac{3n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 0,$$

čije je rješenje

$$\begin{aligned} x_n &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{-2i}{i+2} \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{-2i}{i+2} \right) \frac{3k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{n-k-1} \frac{(n-1)!\,(k+2)!}{k!\,(n+1)!} \frac{3k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{3(-2)^{n-1}}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} k \left( -\frac{1}{2} \right)^k, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Izračunajmo sumu u posljednjem izrazu, koristeći tzv. metod parcijalnog sumiranja (v. [4, 5])

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k \left( -\frac{1}{2} \right)^k &= \triangle^{-1} \left[ k \left( -\frac{1}{2} \right)^k \right]_1^n = \left\| \begin{matrix} x(k) = k & \triangle x(k) = 1 \\ \triangle y(k) = (-\frac{1}{2})^k & y(k) = \left(-\frac{2}{3}\right)(-\frac{1}{2})^k \end{matrix} \right\| \\ &= \left[ \left( -\frac{2}{3} \right) k \left( -\frac{1}{2} \right)^k - \triangle^{-1} \left\{ \left( -\frac{2}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)^{k+1} \right\} \right]_1^n \\ &= \left[ \left( -\frac{2}{3} \right) k \left( -\frac{1}{2} \right)^k - \frac{1}{3} \triangle^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right)^k \right]_1^n \\ &= \left[ \left( -\frac{2}{3} \right) k \left( -\frac{1}{2} \right)^k + \frac{2}{9} \left( -\frac{1}{2} \right)^k \right]_1^n \\ &= \left\{ \left( -\frac{2}{3} \right) n \left( -\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{9} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\} - \left\{ \left( -\frac{2}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) + \frac{2}{9} \left( -\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \left( -\frac{2}{3} \right) \left\{ \left( -\frac{1}{2} \right)^n \frac{3n-1}{3} + \frac{1}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Tako dobijemo da je

$$x_n = \frac{3(-2)^{n-1}}{n(n+1)} \left( -\frac{2}{3} \right) \left\{ \left( -\frac{1}{2} \right)^n \frac{3n-1}{3} + \frac{1}{3} \right\} = \frac{(-2)^n + 3n - 1}{3n(n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Iz (14) se dobije

$$y_n = \frac{(-2)^n - 1}{3n(n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Konačno je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3n - 1}{(-2)^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-2)^n}{(-2)^n} + 3\frac{n}{(-2)^n} - \frac{1}{(-2)^n}}{\frac{(-2)^n}{(-2)^n} - \frac{1}{(-2)^n}} = 1.$$

□

**Primjer 2.12.** *Nizovi $x_n$ i $y_n$, definirani su sistemom diferentnih jednadžbi*

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n - y_n\right)}{2^n}, y_{n+1} = \frac{y_n\left(x_n - y_n\right)}{2^n}, \quad n = 0, 1, ...,$$

*gdje su $x_0 = a > 0$ i $y_0 = b > 0$ početni uvjeti. Ispitati konvergenciju tih nizova u slucaju kad je $a > b$.*

**Rješenje:** Invarijanta datog sistema je $I\left(x_{n+1}, \quad y_{n+1}\right) = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$, jer vrijedi

$$I\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{\frac{x_n(x_n-y_n)}{2^n}}{\frac{y_n(x_n-y_n)}{2^n}} = \frac{x_n}{y_n} = I\left(x_n, y_n\right) = \ldots = I\left(x_0, y_0\right) = \frac{a}{b}.$$

Stavljajući

$$y_n = \frac{b}{a}x_n, \tag{15}$$

u prvu jednadžbu datog sistema imamo

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n - \frac{b}{a}x_n\right)}{2^n} = \frac{a-b}{a2^n}x_n^2.$$

Dobili smo jednadžbu koja nije linearna, ali koja se pogodnim transformacijama može svesti na linearnu. Tako se logaritmiranjem dobije

$$\ln x_{n+1} = 2\ln x_n + \ln\frac{a-b}{a2^n}.$$

Uvođenjem smjene $u_n = \ln x_n$ $(u_0 = \ln a)$, posljednja jednadžba postaje

$$u_{n+1} = 2u_n + \ln\frac{a-b}{a2^n},$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda čije je rješenje

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} 2\right)u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\right)\ln\frac{a-b}{a2^k} \\
&= 2^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\ln\frac{a-b}{a2^k} = 2^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left(ln\frac{a-b}{a} + \ln 2^{-k}\right) \\
&= 2^n u_0 + 2^{n-1}\ln\frac{a-b}{a}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2^{n-1}\ln 2\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 2^n u_0 + \left(2^n - 1\right)\ln\frac{a-b}{a} - 2^{n-1}\ln 2\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left[\triangle^{-1}\left(k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\right]_1^n &= \left\| \begin{array}{cc} x(k) = k & \triangle x(k) = 1 \\ \triangle y(k) = (\frac{1}{2})^k & y(k) = -2(\frac{1}{2})^k \end{array} \right\| \\
&= \left[-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k - \triangle^{-1}\left\{-2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\cdot 1\right\}\right]_1^n \\
&= \left[-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \triangle^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]_1^n \\
&= \left[-2k\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]_1^n \\
&= -\frac{1}{2^{n-1}}\left(n+1\right) + 2,
\end{aligned}$$

imamo da je

$$u_n = 2^n \ln a + (2^n - 1) \ln \frac{a-b}{a} + (n + 1 - 2^n) \ln 2 = \ln 2^n a \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2^n - 1}.$$

Vraćanjem smjene dobije se

$$x_n = 2^n a \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2^n - 1},$$

a iz (15) slijedi da je

$$y_n = 2^n b \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2^n - 1}.$$

Očigledno da oba niza, $x_n$ i $y_n$ divergiraju i teže ka $+\infty$ kad je $a - b \geq 2$. U slučaju kad je $0 < a - b < 2$ oba niza su konvergentna i teže ka 0, jer nakon smjena $m = 2^n$ i $k = \frac{2}{a-b} > 1$ imamo

$$\lim_{m \to \infty} k \frac{m}{k^m} = 0.$$

$\square$

## Zahvalnost

Zahvaljujem se Profesoru Mehmedu Nurkanoviću na ideji za pisanje ovog rada, kao i za niz sugestija koje su omogućile da rad dobije kvalitetniji izgled.

## Zadaci za samostalan rad

Ispitati konvergencije nizova datih sljedećim rekurentnim formulama:

1. $(n+3)\, x_{n+2} - (2n+1)\, x_{n+1} + (n-2)\, x_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \;\; x_3 = \frac{1}{5},\, x_4 = \frac{3}{5}$ ;

2. $n x_{n+2} + 2\,(n-3)\, x_{n+1} - 3\,(n-2)\, x_n = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots), \;\; x_1 = -1,\, x_2 = \frac{2}{5}$;

3. $x_{n+3} - (n+1)\, x_{n+2} - (n+7)\, x_{n+1} + 6n x_n = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots), \;\; x_1 = 0,\, x_2 = 3,\, x_3 = 7.$

4. Dati nizovi realnih brojeva

$$x_{n+1} = \frac{3n-2}{n-1} x_n - \frac{3n+7}{n-1} y_n,$$
$$y_{n+1} = \frac{-2n}{n-1} x_n + \frac{4n+5}{n-1} y_n,$$

za $n = 0, 1, 2, \ldots$, gdje su $x_0 = \frac{1}{2}$ i $y_0 = 1$ početni uvjeti. Ispitati konvergenciju datih nizova.

## Literatura


[1] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations* (3rd ed.), Springer, New York, 2005.

[2] M.R.S. Kulenović, O. Merino: *Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, NewYork, Washington, D.C., 2002.

[3] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, 1(1), 2-5, 2018.

[4] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.

[5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.

[6] M. Nurkanović, M. Trumić: Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentim formulama, *Evolventa*, 4(1), 25-37, 2021.