

Osvrt na jedan zadatak sa više načina rješavanja

Reuf Ibrahimfendić^a

^a*Penzioner, Tuzla*

Sažetak: U ovom radu se daju još tri načina (sedmi, osmi i deveti) rješavanja zadatka 1.1 iz objavljenog članka: *Jedan zadatak sa više načina rješavanja* i na osnovu toga nekoliko zadataka sa rješenjima. Zajedno sa već objavljenim ovaj rad čini jedinstvenu cjelinu.

1. Uvod

U časopisu EVOLVENTA Vol.2, No.1, Tuzla 2019. (elektronska publikacija) objavljen je članak: JEDAN ZADATAK SA VIŠE NAČINA RJEŠAVANJA (autor Alija Muminagić) str. br. 2-10. U sekciji 2. PRVI NAČIN je prikazano kako učenici 8. i 9. razreda osnovne škole mogu dokazati jednakost (1), to jest

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \quad (1)$$

gdje su r_a , r_b i r_c poluprečnici trouglu pripisanih kružnica uz odgovarajuće stranice, a R i r poluprečnici opisane i upisane kružnice tog trougla.

2. Različiti načini dokazivanja jrdnskosti (1)

Učenicima osnovne škole možemo pokazati i ovo RJEŠENJE:

Način I:

U svakom trouglu vrijedi

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c}, \quad (2)$$

gdje je P površina trougla, a s poluobim. Koristeći veze (2) imamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c &= P \cdot \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) \\ &= P \cdot \frac{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= P \cdot \frac{s^2 - sb - sc + bc + s^2 - sc - sa + ac + s^2 - sb - sa + ab}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= P \cdot \frac{3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca}{(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Ciljna skupina: srednja škola

Ključne riječi: trougao, opisana i upisana kružnica, pripisane kružnice, poluprečnik, Heronov obrazac

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: juli 2021.

Kako je $a + b + c = 2s$ i na osnovu Heronovog obrasca, $s(s-a)(s-b)(s-c) = P^2$, izraženog sa

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s},$$

dalje imamo

$$P \cdot \frac{3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca}{(s-a)(s-b)(s-c)} = P \cdot \frac{3s^2 - 2s \cdot 2s + ab + bc + ca}{\frac{P^2}{s}} = \frac{s}{P} \cdot (-s^2 + ab + bc + ca).$$

Dakle, vrijedi

$$r_a + r_b + r_c = \frac{s}{P} \cdot (-s^2 + ab + bc + ca) \quad (3)$$

Pokažimo da vrijedi veza $ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr$. Kako je $r^2 = \left(\frac{P}{s}\right)^2 \cdot abc = 4RP$ tada je $4R = \frac{abc}{P} = \frac{abc}{r \cdot s}$ i $4Rr = \frac{abc}{P} \cdot r = \frac{abc}{s}$. Na osnovu ovoga imamo

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 + 4Rr &= \left(\frac{P}{s}\right)^2 + s^2 + \frac{abc}{s} = \frac{P^2}{s^2} + s^2 + \frac{abc}{s} \\ &= \frac{P^2 + s^4 + abc \cdot s}{s^2} = (\text{zbog } P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)) \\ &= \frac{s[(s-a)(s-b)(s-c) + s^3 + abc]}{s^2} = \frac{(s^2 - sb - sa + ab)(s-c) + s^3 + abc}{s} \\ &= \frac{s^3 - s^2b - s^2c + sbc - s^2a + sac + sab - abc + s^3 + abc}{s} \\ &= \frac{2s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab+bc+ca)}{s} = \frac{2s^3 - s^2 \cdot 2s + s(ab+bc+ca)}{s} \\ &= ab + bc + ca. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ove veze u (3) imamo

$$r_a + r_b + r_c = \frac{s}{P} (-s^2 + r^2 + s^2 + 4Rr) = \frac{s \cdot r(r + 4R)}{r \cdot s} = 4R + r.$$

Način II:

Na stranici br. 4 u [2], u okviru drugog načina dokaza jednakosti (1) stoji: "Predlažemo da srednjoškolci daju planimetrijski dokaz za "

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c} \quad \text{i} \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}. \quad (4)$$

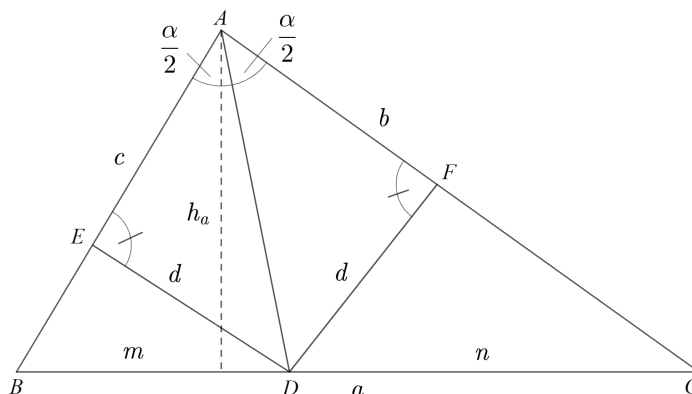
Ovdje ćemo izložiti taj planimetrijski dokaz, ali prethodno ćemo dokazati dva teorema.

Teorem 2.1. *Simetrala unutrašnjeg ugla trougla dijeli naspramnu stranicu na dva odreska, čije se duljine odnose kao duljine drugih dviju stranica trougla, koje s tim odrescima imaju zajedničku tačku.*

Dokaz: Postoji mnogo dokaza ove tvrdnje od kojih je ovdje izložen jedan, a čitaocima preporučujemo da teorem pokušaju dokazati i na druge načine.

Neka je AD simetrala unutrašnjeg ugla α trougla $\triangle ABC$. Uz oznake kao na Slici 1. treba dokazati da vrijedi:

$$|BD| : |CD| = |AB| : |AC| \quad \text{ili} \quad m : n = c : b$$



Slika 1.

Označimo podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC sa E i F. Tada je $|DE| = |DF| = d$ (zašto?). Neka $[XYZ]$ označava površinu trougla XYZ. Sada imamo

$$[ABD] : [ADC] = \frac{1}{2}m \cdot h_a : \frac{1}{2}n \cdot h_a = m : n$$

S druge strane je

$$[ABD] : [ADC] = \frac{1}{2}c \cdot d : \frac{1}{2}b \cdot d = c : b$$

Zato je

$$m : n = c : b = BD : CD \tag{5}$$

□

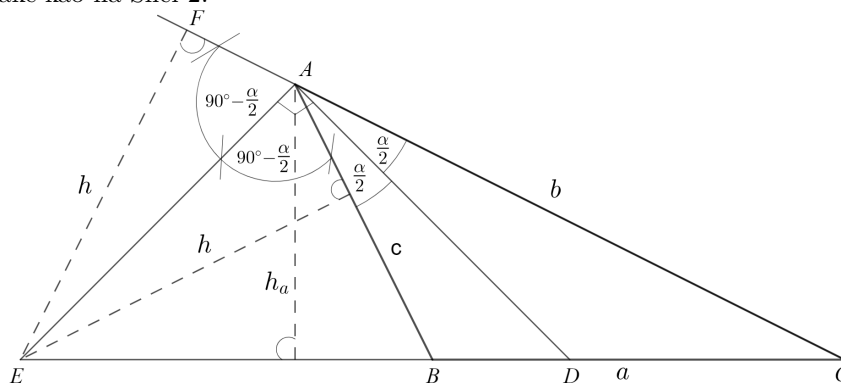
Formulišite obrat ove teoreme i dajte dokaz.

Teorem 2.2. Ako simetrala unutrašnjeg ugla α trougla $\triangle ABC$ siječe stranicu BC u tački D, a simetrala pripadnog spoljašnjeg ugla produžetak stranice CB, preko tačke B, u tački E, vrijedi da je

$$|BE| : |CE| = |BD| : |CD| = c : b \tag{6}$$

Dokaz: (Primjetite da simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha A i simetrala odgovarajućeg unutrašnjeg ugla dijele naspramnu stranicu jednakom omjeru i to jedna u spoljašnjem, a druga u unutrašnjem omjeru.)

Uvedimo oznake kao na Slici 2.



Slika 2.

Trouglovi $\triangle AEB$ i $\triangle AEC$ imaju jednake visine (h) iz zajedničkog vrha E. Tako je

$$[AEB] = \frac{1}{2}c \cdot h \iff 2 \cdot [AEB] = c \cdot h \quad [AEC] = \frac{1}{2}b \cdot h \iff 2 \cdot [AEC] = b \cdot h,$$

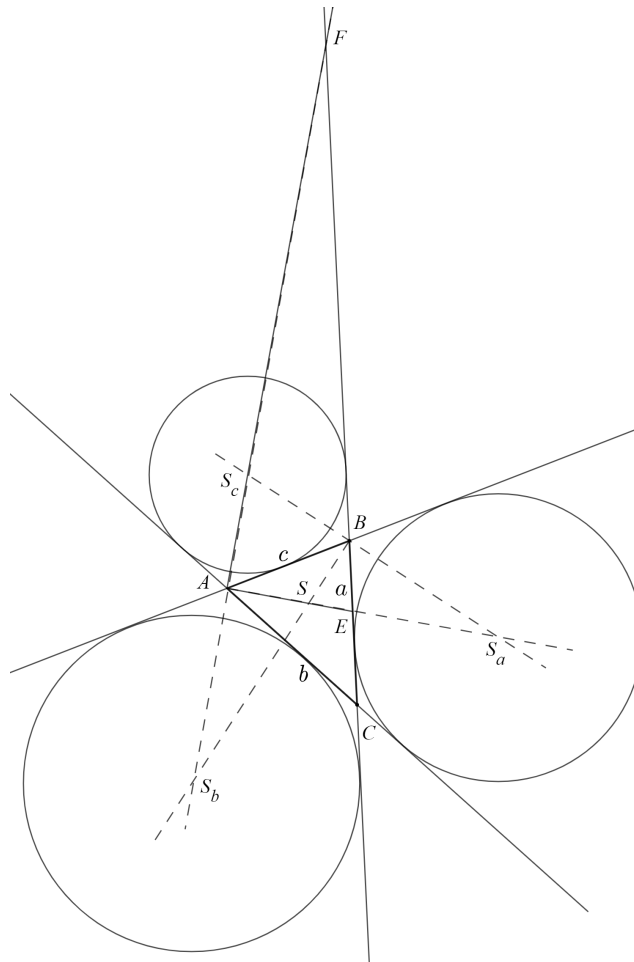
pa vrijedi $[AEB] : [AEC] = c : b$. S druge strane ti trouglovi imaju zajedničku visinu h_a iz vrha A . Zato je

$$2 \cdot [AEB] = BE \cdot h_a \text{ i } 2 \cdot [AEC] = CE \cdot h_a,$$

odakle slijedi $[AEB] : [AEC] = |BE| : |CE| = c : b \stackrel{(3)}{=} BD : CD$. □

Primjer 2.3. *Ako je S središte upisane kružnice $\triangle ABC$ i S_a, S_b i S_c središta pripisanih kružnica koja odgovaraju trouglovim stranicama BC, CA i AB i ako su E i F tačke u kojima simetrala unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod vrha A sijeku pravac BC dokazati da je*

- a) $|AS| : |SE| = |AS_a| : |S_aE|$,
- b) $|AS_b| : |S_bF| = |AS_c| : |S_cF|$.



Slika 3.

Primjenjujući Teoreme 2.1. i 2.2. na trouglove $\triangle ABE$ i $\triangle ABF$, dobijamo da je (Slika 3):

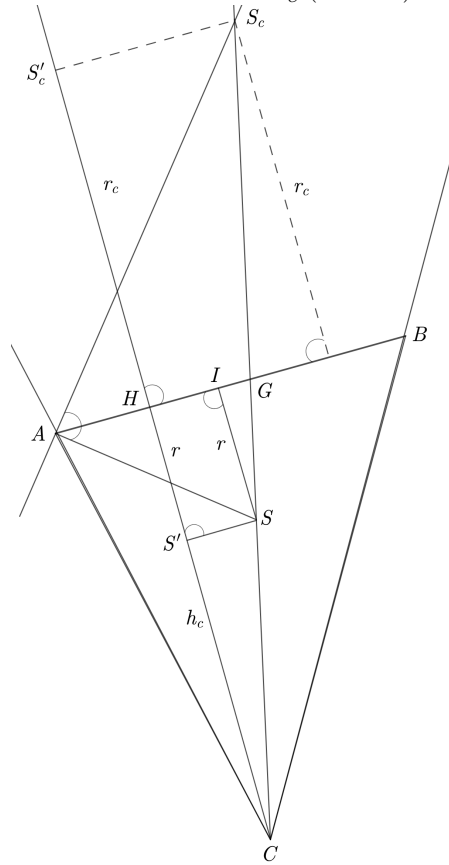
- a) $|AS| : |SE| = |AS_a| : |S_aE|$.
 Primjetite da je u $\triangle ABE$, BS simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B , a BS_a simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABE$.
- b) $|AS_c| : |S_cF| = |AS_b| : |S_bF|$.
 Ovdje je BS_c simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABF$, a BS_b simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha B u $\triangle ABF$.

Dokazujemo sada da je $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$.

Dokaz: U $\triangle ACG$ je AS simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha A , a AS_c je simetrala spoljašnjeg ugla kod vrha A . Prema rješenju zadatka 1. vrijedi da je:

$$|CS'| : |SG| = |CS_c| : |S_cG|. \tag{7}$$

Neka je $|CH| = h_c$ visina iz vrha C na stranicu $|AB| = c$. Produžimo $h_c = CH$, preko tačke H i projekcije tačaka S i S_c na pravac CH označimo sa S' i S'_c (Slika 4.)



Slika 4.

Sada vrijedi

$$|CS'| : |S'H| = |CS| : |SG| \stackrel{(5)}{=} |CS_c| : |S_cG| = |CS'_c| : |S'_cH|.$$

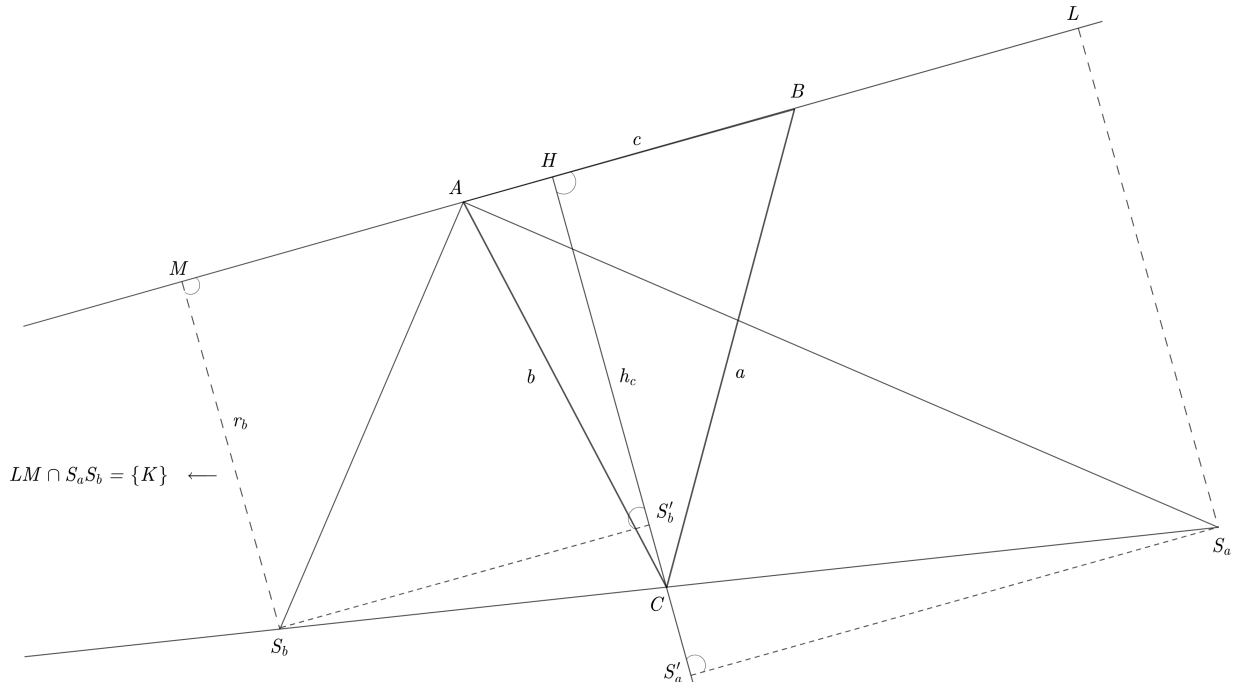
Dakle, $|CS'| : |S'H| = |CS'_c| : |S'_cH|$, a zbog $|CS'| = |CH| - |HS'| = h_c - r$ i $|CS'_c| = h_c + r_c$ dobijamo

$$\begin{aligned} (h_c - r) : r = (h_c + r_c) : r_c &\iff \frac{h_c}{r} - 1 = \frac{h_c}{r_c} + 1 \iff h_c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \right) = 2 \\ &\iff \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}. \end{aligned}$$

□

Dokazujemo sada da vrijedi $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$.

Dokaz: Neka su S_a i S_b središta pripisanih kružnica koje odgovaraju stranicama a i b $\triangle ABC$, a K tačka u kojoj pravac S_aS_b siječe stranicu $AB = c$ istog trougla.



Slika 5.

Prema zadatku 1 u trouglu $\triangle ACK$ vrijedi (Slika 5.)

$$|CS_b| : |S_bK| = |CS_a| : |S_aK|.$$

Označimo sa S'_a i S'_b projekcije tačaka S_a i S_b na visinu $|CH| = h_c$ i njezin produžetak (preko tačke C). Sada imamo da je

$$\begin{aligned} |CS'_b| : |S'_bH| = |S'_aC| : |S'_aH| &\iff (h_c - r_b) : r_b = (r_a - h_c) : r_a \\ &\iff \frac{h_c}{r_b} - 1 = 1 - \frac{h_c}{r_a} \\ &\iff h_c \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) = 1 + 1 \\ &\iff \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}. \end{aligned}$$

Dokaz jednakosti (1) dalje ide kao u objavljenom članku [2], (sekcija 3. drugi način, str. 4)

□

Način II:

Prethodno ćemo dokazati da vrijedi:

a) $r_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $r_b = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $r_c = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Dokaz: Vidi sliku 4 u [2]. Imamo da je:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{AP} \iff AP \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = r_a \iff (\text{zbog } AP = s, \text{ v. str.br.5 u [2]}) \iff r_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Na sličan način dokazujemo druge dvije formule.

□

b) $r = 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$.

Dokaz: Dokazaćemo da je

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Iz kosinusne teoreme, to jest jednakosti $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ imamo

$$-2bc \cdot \cos \alpha = a^2 - b^2 - c^2. \quad (8)$$

Sada je

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{2bc - 2bc \cdot \cos \alpha}{2 \cdot 2bc} = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{4bc} && \text{(na osnovu (8))} \\ &= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc} \\ &= \frac{2 \cdot (s - b) \cdot 2 \cdot (s - c)}{4bc}, \end{aligned}$$

to jest $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. Druge dvije formule se dokazuju na isti način.

Sada dokazujemo b).

Vrijedi (vidi iznad):

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \cdot \frac{(s-c)(s-a)}{ac} \cdot \frac{(s-a)(s-b)}{ab} \\ &= \left(\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \right)^2. \end{aligned}$$

Odavde je onda

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}{s \cdot abc} \\ &= \frac{P^2}{sP4R} = \frac{P}{4Rs} = \frac{rs}{4Rs} = \frac{r}{4R}. \end{aligned}$$

Dakle, $r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$. □

c) $s = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c}{2} && \text{(prema sinusnoj teoremi } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R) \\ &= 2R \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{2} && \text{(zbog } \sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \text{ i } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) \\ &= R \cdot \left(2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right) \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{zbog } \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\gamma}{2} \text{ i} \\ \sin \frac{\gamma}{2} = \left[90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \end{array} \right\} \\ &= 2R \cdot \left(\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= 2R \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \right) && \text{(zbog } \cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}) \\ &= 4R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

to jest

$$s = 4R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} r_a + r_b &= s \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) = 4R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \right) \\ &= 4R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \\ &= 4R \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 4R \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= 4R \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} r_c - r &= s \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ &= 4R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \right) - 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ &= 4R \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \\ &= 4R \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 4R \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= 4R \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (**)$$

Sabiranjem jednakosti (*) i (**) dobijamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= 4R \cdot \underbrace{\left(\cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)}_{=1} = 4R \\ &\iff r_a + r_b + r_c = 4R + r. \end{aligned}$$

□

U gornjem smo se služili adicionim formulama:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x \text{ i } \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

kao i vezom

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \iff \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ \iff \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

3. Zadaci

Zadatak 3.1. Dokazati da u svakom truglu vrijedi:

$$a) \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad b) \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \quad c) \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_c}$$

Rješenje: a) Iz prethodno dokazanih jednakosti $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$ i $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$, dobijamo

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \iff \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

b) Dokazali smo već da vrijedi $\frac{2}{h_c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}$, a analogno se dokazuje da je $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}$ i $\frac{2}{h_b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}$. Nakon sabiranja ovih jednakosti imamo

$$\left(\frac{2}{h_a} + \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \iff 2 \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{3}{r} - \underbrace{\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)}_{=\frac{1}{r}} = \frac{2}{r}.$$

Dakle, vrijedi tvrdjenje b).

c) Imamo da je $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \iff \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right)$, a analogno je

$$\frac{1}{h_b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}\right) \text{ i } \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right)$$

Sada imamo

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r_a} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r_b} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r_c} \iff \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right)$$

zbog $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}$, vrijedi

$$\frac{1}{2r} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_c}\right) = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r_c} + \frac{1}{2r_c} = \frac{1}{r_c}.$$

□

Zadatak 3.2. Dokazati da u svakom trouglu $\triangle ABC$ vrijedi $P = r \cdot r_a \cdot \sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}}$.]

Rješenje: Iz $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ slijedi $4R - r_a + r = r_b + r_c$, pa je

$$\begin{aligned} P = r \cdot r_a \cdot \sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}} &\iff P^2 = r^2 \cdot r_a^2 \frac{4R - r_a + r}{r_a - r} \\ &\iff P^2 = r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \end{aligned}$$

Gore smo dokazali jednakost $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$ i analogno se dokazuje da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a} &\iff \frac{r_b + r_c}{r_b \cdot r_c} = \frac{2}{h_a} \iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot r_b \cdot r_c \\ \iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot \frac{P}{(s+b)(s-c)} &\iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)} \\ \iff r_b + r_c = \frac{2}{h_a} \cdot s(s-a) \end{aligned}$$

Slično dokazujemo da je

$$r_a - r = \frac{2}{h_a} \cdot (s-b)(s-c) \left(\text{ovdje smo primijenili } r_b = \frac{P}{s-b}, r_c = \frac{P}{s-c}, P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)\right)$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P^2 &= r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \iff (\text{zbog } P = r \cdot s) \ r^2 \cdot s^2 = r^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \\ &\iff s^2 = r_a^2 \cdot \frac{r_b + r_c}{r_a - r} \iff s^2 = r_a^2 \cdot \frac{\frac{2}{h_a} s(s-a)}{\frac{2}{h_a} s(s-b)(s-c)} \iff s^2 = r_a^2 \cdot \frac{s \cdot (s-a)}{(s-b)(s-c)} \\ &\iff s(s-b)(s-c) = r_a^2(s-a) \iff s(s-a)(s-b)(s-c) = r_a^2 \cdot (s-a)^2 \iff P^2 = P^2 \end{aligned}$$

što je tačno. □

Zadatak 3.3. Dokazati da u svakom truglu vrijedi jednakost

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = 2 \frac{R}{r} - 1.$$

Rješenje: Kako je $r_a = \frac{P}{s-a}$, $r_b = \frac{P}{s-b}$, $r_c = \frac{P}{s-c}$, te $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} &= \frac{\frac{P}{s-a}}{\frac{2P}{a}} + \frac{\frac{P}{s-b}}{\frac{2P}{b}} + \frac{\frac{P}{s-c}}{\frac{2P}{c}} = \frac{a}{2 \cdot (s-a)} + \frac{b}{2 \cdot (s-b)} + \frac{c}{2 \cdot (s-c)} = \dots \\ &\dots = \frac{(a+b+c) \cdot s^2 + 3abc - 2s \cdot (bc+ca+ab)}{2 \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{zbog } a+b+c = 2s, \ abc = 4Rr, \ (s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = \frac{r^2 s^2}{s} = r^2 s \ \text{ i} \\ \quad \quad \quad ab+bc+ca = r^2 + s^2 + 4Rr \end{array} \right\} \\ &= \dots = \frac{2s^2(s^2 + 6Rr - r^2 - s^2 - 4Rr)}{2 \cdot r^2 s^2} = \frac{r(2R-r)}{r^2} = 2 \cdot \frac{R}{r} - 1 \end{aligned}$$

□

Literatura

- [1] A. Marić: *TROKUT definicije, poučci, formule, problemi, jdnakosti, nejdnakosti*, Element, Zagreb, 2007.
- [2] A. Muminagić: *Jedan zadatak s više načina rješavanja*, EVOLVENTA, Vol.2, No.1, str. 2-10.
- [3] Pavković – Veljan: *MATEMATIKA 1, Zbirka zadataka s uputama i rješenjima za prvi razred srednjih škola*, Deseto izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1993.