EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 22 – 33

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Neke elementarne algebarske metode u određivanju ekstremnih vrijednosti

Nevzeta Karać[a], Alma Šehanović[a]

[a] *JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla*

Sažetak: U ovom radu razmatramo neke elementarne algebarske metode u određivanju ekstremnih vrijednosti. Ove metode su ponekad složenije, ali ukazuju na raznovrsnost matematičkog mišljenja kao i na bogatstvo matematike i njene primjene.

1. Uvod

Živimo u vremenu kada često čujemo riječ optimizacija. Optimizacija ima vrlo značajnu ulogu u svijetu u kojem živimo. Mnoge stvari koje radimo pokušavamo napraviti na optimalan način, maksimizirati korisnost ili minimizirati trošak. Matematički gledano, optimizacijski problemi sastoje se u određivanju ekstrema (maksimuma ili minimuma) neke funkcije. Nalaženje ekstrema zadane funkcije u zadacima kako teorijskog tako i praktičnog karaktera spada u grupu veoma značajnih zadataka matematike i njenih primjena.

Metode nalaženja ekstrema zavise od osobina posmatrane funkcije, od oblasti u kojoj se traže ekstremi i od matematičkog aparata koji se koristi. Poznato je da za nalaženje ekstremnih vrijednosti postoji opšta metoda zasnovana na pojmovima i teoriji diferencijalnog računa. S druge strane, postoji velika potreba za metodama nalaženja ekstremnih vrijednosti funkcija koje ne pretpostavljaju poznavanje i mogućnost primjene diferencijalnog računa. Takve metode zovemo elementarnim metodama. Za mladog matematičara srednjoškolca korisnije je da pomenute probleme rješava elementarnim metodama, jer mu one proširuju pogled na matematičku metodologiju.

Zadaci, koji su ilustrovani u ovom radu, često se pojavljuju na takmičenjima i predstavljaju veoma dobru pripremu za učenike osnovnih škola.

2. Ekstremne vrijednosti

2.1. Osnovni pojmovi o minimumu i maksimumu

Definicija 2.1. *Neka je data realna funkcija $y = f(x)$ na nekom skupu D_f. Minimum (maksimum) funkcije $y = f(x)$ je takav broj m (odnosno M), za koji je ispunjeno sljedeće*

$$f(x) \geq m, \ \forall x \in D_f \ \text{(odnosno } f(x) \leq M, \forall x \in D_f\text{)}.$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: ekstremi, funkcija troškova, funkcija prihoda, funkcija dobiti
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: juli 2021.

Minimum funkcije $y = f(x)$ označavamo sa $\min f(x)$, a maksimum sa $\max f(x)$.

Polazeći od navedene definicije za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcija, vrlo često se koristi sljedeća jednostavna lema.

Lema 2.2. *Za svaki realan broj t je $t^2 \geq 0$, pa je najmanja (najveća) vrijednost funkcije $f(t) = t^2$ $\left(f\left(t\right) = -t^2\right)$ nula i ona se dostiže za $t = 0$.*

Koristeći ovu jednostavnu lemu lahko uočavamo sljedeće:

- Za funkciju $f_1(x) = x^2 + 1$ je $\min f_1(x) = 1$ za $x = 0$.
- Za funkciju $f_2(x) = (x-2)^2 + 3$ je $\min f_2(x) = 3$ za $x = 2$.
- Za funkciju $f_3(x) = -x^2 - 2$ je $\max f_3(x) = -2$ za $x = 0$.

Za nalaženje ekstremnih vrijednosti složenijih funkcija koriste se sljedeće jednostavne tvrdnje.

1. Ako postoji $\min f(x)$ ili $\max f(x)$ i ako je $q > 0$, onda je
$$\min\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \min f(x), \quad \max\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \max f(x).$$
2. Ako postoji $\min f(x)$ ili $\max f(x)$ i ako je $q < 0$, onda je
$$\min\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \max f(x), \quad \max\left[q \cdot f(x)\right] = q \cdot \min f(x).$$
3. Ako je $f(x) > 0$ za sve x iz domena funkcije f, onda je
$$\max\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\min f(x)}, \quad \min\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\max f(x)}.$$
4. Ako postoji maksimum, odnosno minimum, funkcije $f(x)$ i ako je $f(x) \geq 0$ za sve x iz domena funkcije f, tada je
$$\max\sqrt{f(x)} = \sqrt{\max f(x)}, \quad \min\sqrt{f(x)} = \sqrt{\min f(x)}.$$

Primjer 2.3. *Odrediti ekstremnu vrijednost funkcije $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$.*

Rješenje: Neka je
$$f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$
Funkcija $f_1(x)$ ima minimum, $\min f_1(x) = \frac{2}{3}$, za $x = -\frac{1}{3}$, pa je
$$\frac{1}{\min\sqrt{f_1(x)}} \overset{3.}{=} \max\left(\frac{1}{\sqrt{f_1(x)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$
Dakle,
$$-3 \cdot \max\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+2x+1}}\right) \overset{2.}{=} \min\left(\frac{-3}{\sqrt{3x^2+2x+1}}\right),$$
odnosno
$$\min f(x) = -\frac{3\sqrt{6}}{2}, \text{ za } x = -\frac{1}{3}.$$
□

Pored navedenih postupaka, vrlo često se ekstremne vrijednosti funkcija i algebarskih izraza mogu odrediti i direktno korištenjem jedne od sljedećih elementarnih algebarskih transformacija:

1. $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$,
2. $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$,
3. $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\left(x^2+y^2\right)$.

2.2. Zadaci iz oblasti minimuma i maksimuma

Primjer 2.4. *Proizvod dva pozitivna broja, čiji je zbir dat, ima najveću vrijednost kada su ti brojevi jednaki. Dokazati.*

Rješenje: Neka je dat zbir brojeva $x + y = a$. Tada iz identiteta $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ slijedi,

$$xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right].$$

Kako je $(x-y)^2 \geq 0$, to je

$$\max(xy) = \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}a^2,$$

za $(x-y)^2 = 0$, to jest za $x = y$. □

Primjer 2.5. *Dokazati da proizvod dva pozitivna broja, čiji je zbir kvadrata stalan, ima najveću vrijednost kada su ta dva broja jednaka.*

Rješenje: Neka je $x^2 + y^2 = a$. Iz već spomenutog identiteta $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$ slijedi,

$$xy = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

Kako je $(x-y)^2 \geq 0$, imamo da je $\max(xy) = \frac{1}{2}a$, za $(x-y)^2 = 0$, to jest za $x = y$. □

Primjer 2.6. *Dokazati da zbir kvadrata dva broja, čiji je zbir dat, ima najmanju vrijednost kada su ti brojevi jednaki.*

Rješenje: Neka je $x + y = a$. Koristeći identitet $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\left(x^2+y^2\right)$ dobijamo,

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

Kako je $(x-y)^2 \geq 0$, to je $\min\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}a^2$, za $(x-y)^2 = 0$, to jest za $x = y$. □

Primjer 2.7. *Odrediti pravougaonik maksimalne površine ako je njegov obim* 8*cm. Kolike su stranice tog pravougaonika?*

Rješenje 1: Poznato je da za površinu P i obim O pravougaonika vrijede formule: $P = ab$ i $O = 2a + 2b$. Primjenom identiteta $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ imamo,

$$ab = 4 - \frac{1}{4}(a-b)^2.$$

Kako je $(a-b)^2 \geq 0$, vrijedit će $\max(ab) = 4$, za $a = b = 2$. □
Rješenje 2: Iz činjenice da je $O = 2(a+b) = 8$ slijedi $a + b = 4$, odakle je $b = 4 - a$. Dalje imamo

$$(a+b)^2 = 16 \iff a^2 + 2ab + b^2 = 16 \iff 2ab = 16 - a^2 - b^2 \iff 2ab = 16 - a^2 - (4-a)^2$$
$$\iff 2ab = -2a^2 + 8a \iff ab = -a^2 + 4a \iff ab = -(a-2)^2 + 4,$$

iz čega slijedi

$$\max(ab) = 4, \text{ za } a = 2 \text{ i } b = 2.$$

□

Primjer 2.8. *Odrediti pravougaonik najmanjeg obima ako je njegova površina $P = 100cm^2$.*

Rješenje: Kako je površina pravougaonika $P = ab = 100$, primjenom identiteta $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ imamo,

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 400.$$

Kako je $(a-b)^2 \geq 0$, to je $\min\left((a+b)^2\right) = 400$, i postiže se za $a = b$, a odatle imamo da je najmanji obim $O_{\min} = 40cm$, za $a = b = 10cm$. □

Primjer 2.9. *Koji od svih pravougaonika dijagonale $d = 4cm$ ima najveći obim?*

Rješenje: Kako za dijagonalu d pravougaonika vrijedi $d^2 = a^2 + b^2$, imamo da je $a^2 + b^2 = 16$. Primjenom identiteta $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$ imamo,

$$(a+b)^2 = 32 - (a-b)^2.$$

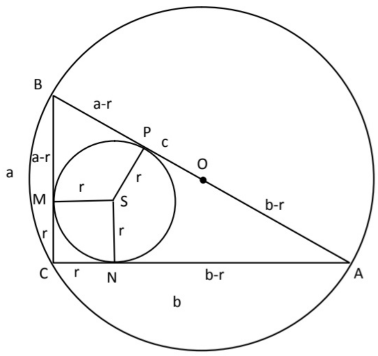
Kako je $(a-b)^2 \geq 0$, vrijedit će $\max\left((a+b)^2\right) = 32$, za $a = b$, odnosno

$$\max(a+b) = 4\sqrt{2}.$$

Stoga je $O_{\max} = 8\sqrt{2}cm$, za $a = b = 2\sqrt{2}cm$. □

Primjer 2.10. *Od svih pravouglih trouglova datog poluprečnika opisane kružnice R naći onaj s najvećim poluprečnikom upisane kružnice.*

Rješenje:



Neka je dat pravougli trougao ABC kao na slici. Neka je r poluprečnik upisane, a R zadani poluprečnik opisane kružnice. Poznato je da je poluprečnik opisane kružnice pravouglog trougla jednak polovini hipotenuze, to jest $R = \frac{c}{2}$. Neka je S centar kružnice upisane u trougao ABC i neka su M, N i P redom projekcije tačke S na stranice trougla a, b i c. Tada je $|SM| = |SN| = |SP| = r$. Četverougao $CMNS$ je očigledno kvadrat stranice r, pa vrijedi $|BM| = a - r$ i $|AN| = b - r$. Kako je

$$\left.\begin{array}{c} |AS| = |AS| \\ |SN| = |SP| = r \\ \angle ANS = \angle APS = 90^\circ \end{array}\right\} \overset{SSU}{\Longrightarrow} \triangle ANS \cong \triangle APS \implies |AN| = |AP|,$$

pa je

$$|AP| = b - r. \tag{1}$$

Analogno se dokazuje da je $\triangle BMS \cong \triangle BPS$, odakle slijedi $|BM| = |BP|$, pa je

$$|BP| = a - r. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$c = |AB| = |AP| + |BP| = b - r + a - r = a + b - 2r,$$

odakle je

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2} - R.$$

Kako je R konstanta

$$\begin{aligned} r_{\max} &= \max\left(\frac{a+b}{2}\right) - R = \frac{1}{2}\max(a+b) - R \\ &= \frac{1}{2}\left[\max\left(\sqrt{(a+b)^2}\right)\right] - R = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\max\left((a+b)^2\right)}\right] - R. \end{aligned}$$

Odredimo $\max\left((a+b)^2\right)$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

te je

$$2ab = (a+b)^2 - c^2. \tag{3}$$

S druge strane,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2ab,$$

odakle je

$$2ab = c^2 - (a-b)^2. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 2c^2 - (a-b)^2,$$

pa je

$$\max\left((a+b)^2\right) = 2c^2, \text{ za } a = b.$$

Dakle,

$$r_{\max} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\max\left((a+b)^2\right)}\right] - R = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2} - R = \sqrt{2}R - R = \left(\sqrt{2} - 1\right)R,$$

za $a = b = \sqrt{2}R$. □

Primjer 2.11. *Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$.

Rješenje: Funkciju $f(x)$ možemo napisati u obliku

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} = \frac{x^2+3-4}{x^2+3} = 1 - \frac{4}{x^2+3}.$$

Kako je $\frac{4}{x^2+3} \leq \frac{4}{0^2+3} = \frac{4}{3}$, to je $\max\left(\frac{4}{x^2+3}\right) = \frac{4}{3}$, odnosno

$$\min f(x) = 1 - \max\left(\frac{4}{x^2+3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}, \text{ za } x = 0.$$

□

Primjer 2.12. *Ako je $2x + y = 8$, naći najveću vrijednost koju može imati proizvod xy.*

Rješenje 1: Neka je $2x = t$, onda je $t + y = 8$. Primjenom identiteta $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ imamo,

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 \iff xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right].$$

Zamjenom x sa t dobijamo

$$ty = \frac{1}{4}\left[(t+y)^2 - (t-y)^2\right].$$

Kako je $t + y = 8$, vrijedit će

$$ty = \frac{1}{4}\left[64 - (t-y)^2\right] \iff ty = 16 - \frac{1}{4}(t-y)^2.$$

Dakle, izraz ty ima maksimalnu vrijednost za $t - y = 0$, to jest za $t = y$, pa je

$$\max(ty) = 16 \implies \max(2xy) = 16 \implies \max(xy) = 8, \text{ za } y = 4 \text{ i } x = 2.$$

□

Rješenje 2: Pomnožimo li uslov zadatka $2x + y = 8$ sa y, dobijamo $2xy + y^2 = 8y$, odakle je

$$2xy = -y^2 + 8y \iff 2xy = -(y-4)^2 + 16 \iff xy = 8 - \frac{1}{2}(y-4)^2,$$

pa je $\max(xy) = 8$, za $y = 4$ i $x = 2$. □

Primjer 2.13. *Za koju vrijednost x funkcija $f(x) = (x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)$ ima najmanju vrijednost?*

Rješenje:

$$\begin{aligned}
f(x) &= [x+(a+b)]\cdot[x-(a+b)]\cdot[x+(a-b)]\cdot[x-(a-b)] = \left[x^2-(a+b)^2\right]\cdot\left[x^2-(a-b)^2\right] \\
&= x^4 - x^2(a-b)^2 - x^2(a+b)^2 + (a+b)^2(a-b)^2 = x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + \left(a^2-b^2\right)^2 \\
&= x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \\
&= x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = x^4 - 2\left(a^2+b^2\right)x^2 + \left(a^2+b^2\right)^2 - 4a^2b^2 \\
&= \left[x^2 - \left(a^2+b^2\right)\right]^2 - 4a^2b^2 \geq -4a^2b^2, \text{ jer je } \left[x^2-\left(a^2+b^2\right)\right]^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\min(f(x)) = -4a^2b^2, \text{ za } x^2 - \left(a^2+b^2\right) = 0, \text{ to jest za } x = \pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

□

Primjer 2.14. *Za koje vrijednosti x i y izraz $A = \dfrac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ ima najveću, a za koje najmanju vrijednost?*

Rješenje: Za $x \neq 0$ i $y \neq 0$ izraz A možemo napisati u obliku

$$A = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x - 2y)^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = \frac{(x - 2y)^2}{x^2 + y^2} - 1 \geq -1.$$

Dakle,

$$\min\left(\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}\right) = -1, \text{ za } \frac{(x - 2y)^2}{x^2 + y^2} = 0, \text{ to jest za } x = 2y.$$

Izraz A možemo transformisati i na drugi način.

$$\begin{aligned} A &= \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{4x^2 + 4y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{4\left(x^2 + y^2\right) - 4x^2 - 4xy - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{4\left(x^2 + y^2\right) - \left(4x^2 + 4xy + y^2\right)}{x^2 + y^2} \\ &= 4 - \frac{(2x + y)^2}{x^2 + y^2} \leq 4. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\max\left(\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}\right) = 4, \text{ za } \frac{(2x + y)^2}{x^2 + y^2} = 0, \text{ to jest za } y = -2x.$$

□

Primjer 2.15. *Za koje vrijednosti promjenljivih x i y razlomak $R = \dfrac{4xy - 4x^2 - y^2 + 1}{9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y + 11}$ ima najveću vrijednost?*

Rješenje: Dati razlomak možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} R &= \frac{4xy - 4x^2 - y^2 + 1}{9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y + 11} = \frac{1 - \left(4x^2 - 4xy + y^2\right)}{9x^2 - 6xy + y^2 - 2(3x - y) + 11} \\ &= \frac{1 - (2x - y)^2}{(3x - y)^2 - 2(3x - y) + 1 + 10} = \frac{1 - (2x - y)^2}{(3x - y - 1)^2 + 10}. \end{aligned}$$

Razlomak ima najveću vrijednost ako je brojnik maksimalan i nazivnik minimalan, to jest za $2x - y = 0$ i $3x - y = 1$. Dakle, za $x = 1$ i $y = 2$, $R_{\max} = \frac{1}{10}$. □

Primjer 2.16. *Za koje vrijednosti promjenljivih x i y izraz $A = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y + 2}{2x^2 + 2y^2 - 4y + 7}$ ima najmanju vrijednost?*

Rješenje: Dati izraz možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 + y^2 - 2y + 2}{2x^2 + 2y^2 - 4y + 7} = \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1}{2x^2 + 2(y - 1)^2 - 2 + 7} = \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + 1 - 1\right] + 5} \\ &= \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + 1\right] + 3} = \frac{x^2 + (y - 1)^2 + 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + 1 + \frac{3}{2}\right]} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{2\left[x^2 + (y - 1)^2 + \frac{5}{2}\right]} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4\left[x^2 + (y - 1)^2 + \frac{5}{2}\right]}. \end{aligned}$$

Vrijednost izraza A će imati minimalnu vrijednost kada je razlomak $\frac{1}{x^2+(y-1)^2+\frac{5}{2}}$ maksimalan, to jest kada je izraz $x^2+(y-1)^2+\frac{5}{2}$ minimalan. Dakle,

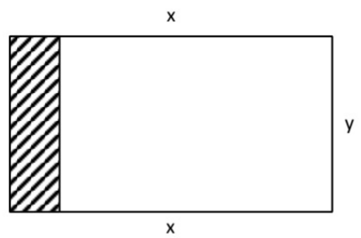
$$\min\left(\frac{x^2+y^2-2y+2}{2x^2+2y^2-4y+7}\right)=\frac{1}{5}, \text{ za } x=0 \text{ i } y=1.$$

□

2.3. Praktični optimizacijski problemi

Matematičke zadatke, kad god je to moguće, treba vezivati za konkretne situacije iz svakodnevnog života. Na taj način dolazi do izražaja povezanost matematike sa stvarnošću, što svakako povećava interes za rješavanje problema. U nastavku navodimo nekoliko takvih primjera.

Primjer 2.17. *Treba sa 400m žice ograditi dio dvorišta tako da se dobije ograđeni pravougaoni prostor najveće moguće površine, pri čemu ograda ima 4 struke, a zid zgrade služi kao jedna strana ograde. Odrediti stranice ograđenog prostora.*



Slika 1

Rješenje: Označimo sa x dvije strane ograde, a sa y onu stranu koja ima dužinu zida (Slika 1). Kako ograda ima 4 struke vrijedi

$$4(2x+y)=400 \iff 2x+y=100 \iff y=100-2x.$$

Površina pravougaonika je

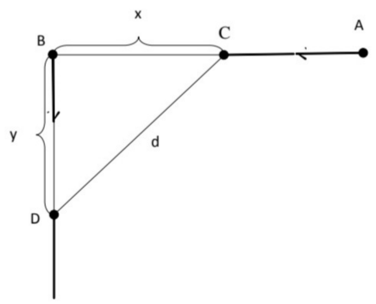
$$\begin{aligned} P=xy=x(100-2x)&=-2x^2+100x=-2\left(x^2-50x+625-625\right)=-2\left[(x-25)^2-625\right]\\ &=-2(x-25)^2+1250. \end{aligned}$$

Dakle, maksimalna površina ograđenog prostora je $P_{\max}=1250m^2$, za $x=25m$ i $y=50m$. □

Primjer 2.18. *Iz tačaka A i B, prema Slici 2, polaze istovremeno dva voza u naznačenim smjerovima brzinom od $40\frac{km}{h}$, odnosno $30\frac{km}{h}$. Poslije koliko će vremena rastojanje između vozova biti najmanje, ako je $|AB|=80km$ i koliko je to rastojanje?*

Rješenje: Sa Slike 2 vidimo da je $y=|BD|=30t$, gdje je t vrijeme za koje voz pređe dato rastojanje, te $x=|BC|=|AB|-|AC|=80-40t$. Dalje je,

$$\begin{aligned} d^2&=x^2+y^2=(80-40t)^2+(30t)^2=40^2(2-t)^2+30^2t^2\\ &=10^2\left[16(2-t)^2+9t^2\right], \end{aligned}$$



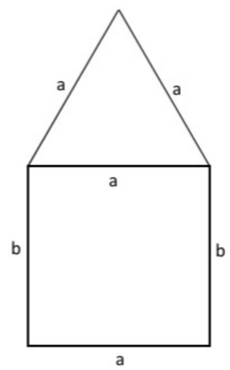
Slika 2

pa je

$$\begin{aligned} d =&10\sqrt{16\left(4-4t+t^2\right)+9t^2} = 10\sqrt{25t^2-64t+64} \\ =&10\sqrt{25\left(t^2-\frac{64}{25}t+\left(\frac{32}{25}\right)^2-\left(\frac{32}{25}\right)^2\right)+64} \\ =&10\sqrt{25\left(t-\frac{32}{25}\right)^2-25\cdot\frac{1024}{625}+64} = 10\sqrt{25\left(t-\frac{32}{25}\right)^2+\frac{576}{25}} \\ \leq&\ 10\sqrt{\frac{576}{25}} = 48, \end{aligned}$$

a znak jednakosti se postiže za $t=\frac{32}{25}h$. Dakle, $d_{\min}=48km$, za $t=\frac{32}{25}h=1^h16^{'}32^{''}$. □

Primjer 2.19. *Prozor ima oblik pravougaonika koji se na vrhu završava jednakostraničnim trouglom čija se osnovica poklapa sa gornjom osnovicom pravougaonika. Obim prozora iznosi* $4\,m$*. Kolika mora biti osnovica pravougaonika da bi prozor imao najveću površinu?*



Slika 3

Rješenje: Neka je O obim prozora prikazanog na Slici 3. Tada je $O=3a+2b=4$, odakle je

$$b = 2-\frac{3}{2}a. \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
P &= ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \overset{(5)}{=} a\left(2 - \frac{3}{2}a\right) + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a - \frac{3}{2}a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = -\frac{6-\sqrt{3}}{4}a^2 + 2a \\
&= -\frac{6-\sqrt{3}}{4}\left[a^2 - 2\cdot\frac{4}{6-\sqrt{3}}a + \left(\frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2\right] \\
&= -\frac{6-\sqrt{3}}{4}\left(a - \frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{6-\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{16}{\left(6-\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{6-\sqrt{3}}{4}\left(a - \frac{4}{6-\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{6-\sqrt{3}} \\
&\leq \frac{4}{6-\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

a jednakost se postiže za $a = \frac{4}{6-\sqrt{3}}$, pa je

$$P_{\max} = \frac{4}{6-\sqrt{3}}m^2, \text{ za } a = \frac{4}{6-\sqrt{3}}m \text{ i } b = \frac{10-2\sqrt{3}}{11}m.$$

□

2.4. Primjena u ekonomiji

Funkcija troškova

Ako je Q obim proizvodnje (količina proizvoda), onda je funkcija $T(Q)$ funkcija ukupnih troškova u funkcionalnoj zavisnosti o obimu proizvodnje. Funkcija ukupnih troškova mora zadovoljavati određene uvjete (da bi uopće imala ekonomskog smisla).

1. $Q \geq 0$, odnosno obim proizvodnje ne može biti negativna vrijednost.
2. $T(Q) > 0$, to jest troškovi su uvijek pozitivni.
3. Porast obima proizvodnje uvijek dovodi do rasta ukupnih troškova.

Vrlo važnu ulogu u praksi igraju tzv. prosječni troškovi, koji predstavljaju iznos ukupnih troškova po jedinici proizvoda. Ako funkciju prosječnih troškova označimo sa $\overline{T}(Q)$. Tada je

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}.$$

Oblast definiranosti prosječnih troškova je ista kao i oblast definiranosti ukupnih troškova.

Funkcija prihoda i dobiti

Ukupni prihod predstavlja proizvod količine određene robe prodate na tržištu u određenom vremenskom periodu i cijene po kojoj je ta roba prodata. Ako za cijenu uvedemo oznaku p, a za prihod P, onda je

$$P = Q \cdot p.$$

Uočimo da je količina prodate robe na tržištu ustvari funkcija potražnje za tom robom. Poznato je da se potražnja izražava kao funkcija cijene proizvoda, to jest $Q = Q(p)$, pa je u tom slučaju ukupni prihod funkcija cijene p,

$$P(p) = Q(p) \cdot p.$$

Međutim i cijena robe se može posmatrati kao funkcija potražnje, to jest $p = p(Q)$ i tada je ukupni prihod funkcija potražnje Q

$$P(Q) = Q \cdot p(Q).$$

Pri tome su $p(Q)$ i $Q(p)$ međusobno inverzne funkcije.

Ukupna dobit ostvarena u proizvodnji jednog artikla definira se kao razlika ukupnog prihoda prodate količine artikla na tržištu u određenom vremenskom periodu i ukupnih troškova proizvodnje te prodate količine artikla. Uvedemo li oznaku D za ukupnu dobit, tada je

$$D = P - T.$$

Ukoliko su nam poznate funkcije ukupnih troškova i ukupnih prihoda kao funkcije potražnje Q, tada je i ukupna dobit funkcija potražnje

$$D(Q) = P(Q) - T(Q).$$

Za proizvodnju nekog artikla vrlo je značajan *interval rentabilnosti* (Q_1, Q_2). Pod tim pojmom podrazumijevamo interval nezavisne varijable u funkciji ukupne dobiti gdje je ukupna dobit pozitivna. Nivo proizvodnje $Q^* \in (Q_1, Q_2)$ za koji se ostvaruje maksimalna dobit naziva se *optimalnom proizvodnjom*, a cijena $p = p(Q^*)$ se naziva optimalnom prodajnom cijenom.

Primjer 2.20. *Data je funkcija ukupnih troškova $T(Q) = 2Q^3 - 6Q^2 + 5Q$, gdje Q označava količinu proizvoda. Odrediti minimalne prosječne troškove i na kojem nivou proizvodnje se dostižu.*

Rješenje: Prosječni troškovi se definiraju kao $\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$, pa imamo

$$\begin{aligned}\overline{T}(Q) &= 2Q^2 - 6Q + 5 = 2\left(Q^2 - 3Q + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5\\ &= 2\left(Q - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

a jednakost vrijedi kada je $Q = \frac{3}{2}$. Zbog toga je $\min\left(\overline{T}(Q)\right) = \frac{1}{2}$, za $Q = \frac{3}{2}$. □

Primjer 2.21. *Data je funkcija potražnje $Q(p) = 20 - 0,5p$, gdje je p cijena proizvoda i prosječnih troškova $\overline{T}(Q) = Q + 30 + \frac{3}{Q}$, gdje je Q količina proizvoda. Odrediti funkciju ukupne dobiti i maksimalne dobiti.*

Rješenje: Neka je $P(Q)$ – ukupan prihod, $T(Q)$ – ukupni trošak, $\overline{T}(Q)$ – prosječni trošak, p – cijena, Q – potražnja. Ukupan prihod je jednak proizvodu prodate količine proizvoda i cijene proizvoda, to jest

$$P(Q) = Q \cdot p.$$

Cijena mora biti izražena kao funkcija količine, to jest $p = p(Q)$, pa je $P(Q) = Q \cdot p(Q)$. Zbog toga iz potražnje $Q(p)$ odredimo cijenu preko količine Q.

$$Q = 20 - \frac{1}{2}p \iff 2Q = 40 - p \iff p = 40 - 2Q.$$

Dakle,

$$P(Q) = Q \cdot (40 - 2Q) = -2Q^2 + 40Q.$$

S druge strane, ukupni trošak je iz formule $\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$ dat sa

$$T(Q) = Q \cdot \overline{T}(Q) = Q^2 + 30Q + 3.$$

Ukupna dobit (ukupni profit) je razlika ukupnih prihoda i ukupnih troškova. Dakle,

$$\begin{aligned}D(Q) &= P(Q) - T(Q) = -2Q^2 + 40Q - Q^2 - 30Q - 3 = -3Q^2 + 10Q - 3 = -3\left(Q^2 - \frac{10}{3}Q + 1\right)\\ &= -3\left(Q - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \leq \frac{16}{3},\end{aligned}$$

a jednakost vrijedi kada je $Q = \frac{5}{3}$. Prema tome, $D_{\max} = \frac{16}{3}$ za $Q = \frac{5}{3}$. □

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti najmanju vrijednost izraza $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ako su x i y pozitivni realni brojevi takvi da je $x+y=5$.
2. Između svih kvadrata upisanih u kvadrat stranice a, odrediti onaj koji ima najmanju površinu.
3. Koji od svih pravougaonika obima $2s$ ima najkraću dijagonalu?
4. U deltoid datih dijagonala d_1 i d_2 upisati pravougaonik tako da su mu stranice paralelne sa dijagonalom deltoida. Koji od upisanih pravougaonika ima najveću moguću površinu?
5. Koji uspravni valjak datog obima osnog presjeka $s=100cm$ ima najveću bočnu površinu?
6. Normandijski prozor ima oblik pravougaonika koji se gore završava polukrugom. Kolika mora biti osnovica u pravougaoniku da pri obimu od $2m$ prostorija dobije najviše svjetlosti?
7. Dat je polinom $P(x,y)=x^4+2x^2+y^2-2y+2$. Naći najmanju vrijednost ovog polinoma i odgovarajuće vrijednosti promjenljivih x i y.
8. Koji uslov moraju zadovoljavati promjenljive $a,b,c,$ i d da bi vrijednost polinoma $P=a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$ bila minimalna.
9. Za koje vrijednosti promjenljivih izraz

$$B=5+\frac{a^2+4ab+4b^2-1}{4a^2+12ab+9b^2+4a+6b+3}$$

ima najmanju vrijednost?

Zahvalnost

Posebnu zahvalnost upućujemo profesoru Mehmedu Nurkanoviću kao i profesorici Zehri Nurkanović, koji su pored profesionalne podrške pružili srdačan i ljubazan odnos i na ovaj način učinili na šu saradnju posebnom i vrlo korisnom za buduće generacije.

Literatura

[1] V. Mihajlović, *Zbirka rešenih zadataka iz algebre*, Naučna knjiga, Beograd, 1971.
[2] S. Mintaković, *Zbirka zadataka iz matematike*, Svjetlost, Sarajevo, 1980.
[3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Elementarna matematika*, Printcom Tuzla, 2009.
[4] M. Nurkanović, O. Kurtanović, *Matematika za ekonomiste*, Printcom Tuzla, 2013.
[5] V. Stojanović, *Mathematiskop 2*, Beograd, 1999.
[6] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar, *Zbirka zadataka iz matematike,* Svjetlost, Sarajevo, 1987.