EVOLVENTA (JAMTK) 4(2) (2021), 34 – 38

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Različiti načini izračunavanja $tg\frac{7\pi}{24}$

Dragoljub Milošević

Republika Srbija

Sažetak: U radu je dato šest različitih načina izračunavanja vrijednosti tangensa ugla od $\dfrac{7\pi}{24}$ (ili $52°30'$).

1. Uvod

Postoje određeni zadaci koji mogu da se riješe na jedan jedini način. Oni podsjećaju na planinski vrh koji može da se "osvoji" samo s jedne strane. Za razliku od njih, postoje i zadaci koji omogućavaju "osvajanje s više strana", to jest postoji više puteva koji vode do rješenja. Takvi zadaci omogućavaju da iskažemo svo naše bogatstvo ideja, dosjetki, domišljatosti i inventivnosti.

Matematičko iskustvo učenika bilo bi nekompletno ako mu ne bismo pružali šanse da pokuša da riješi pojedine zadatke na više načina. Time stiče samopouzdanje, razvija istraživački duh i svoju matematičku zrelost.

2. Izračunavanje vrijednosti $tg\frac{7\pi}{24}$

Sada ćemo dati više raznih načina izračunavanja tangensa ugla $\dfrac{7\pi}{24}$ (ili $52°30'$), to jest $tg\dfrac{7\pi}{24}$. Pri tome ćemo koristiti razne činjenice iz algebre, geometrije i trigonometrije.

Način I:

Korištenjem formule za tangens zbira, $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ i činjenice da je $\dfrac{7\pi}{24}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{8}$, dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24}=\frac{tg\frac{\pi}{6}+tg\frac{\pi}{8}}{1-tg\frac{\pi}{6}tg\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+tg\frac{\pi}{8}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{3}+3tg\frac{\pi}{8}}{3-\sqrt{3}tg\frac{\pi}{8}}. \tag{1}$$

Budući da je

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}},$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: formule za tangens zbira i razlike, kosinusna teorema, Pitagorina teorema, pretvaranje razlike sinusa u proizvod, svojstva jednakostraničnog i jednakokrakog trougla, romba i deltoida
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: mart 2021.

koristeći se identitetima sinusa i cosinusa dvostrukog ugla dobijamo

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}. \tag{2}$$

Iz (2) onda imamo

$$tg\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (1) konačno imamo

$$\begin{aligned}
tg\frac{7\pi}{24} &= \frac{\sqrt{3}+3tg\dfrac{\pi}{8}}{3-\sqrt{3}tg\dfrac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{3}+3(\sqrt{2}-1)}{3-\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3}{3-(\sqrt{6}-\sqrt{3}}\\
&= \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3}{3-(\sqrt{6}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+(\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3+(\sqrt{6}-\sqrt{3}}\\
&= \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3+9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-3\sqrt{6}-9-3\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{9-(9-6\sqrt{2})}\\
&= \frac{-12-6\sqrt{6}+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{2}(-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+4).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$tg\frac{7\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+2.$$

Način II:

Korištenjem formule za tangens razlike, $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$ i činjenice da je $\dfrac{7\pi}{24} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{24}$, dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24} = \frac{tg\dfrac{\pi}{3}-tg\dfrac{\pi}{24}}{1+tg\dfrac{\pi}{3}tg\dfrac{\pi}{24}} = \frac{\sqrt{3}+tg\dfrac{\pi}{24}}{1+\sqrt{3}tg\dfrac{\pi}{24}}. \tag{4}$$

Na osnovu jednakosti (2) imamo

$$tg\frac{\pi}{24} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{12}}{\sin\dfrac{\pi}{12}}. \tag{5}$$

Kako je

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

i

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$

iz (5) dobijamo

$$tg\frac{\pi}{24}=\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})},$$

odakle nakon proširivanja razlomka sa $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ imamo

$$tg\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2. \tag{6}$$

Iz (4) i (6) konačno dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24}=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

Način III:
Korištenjem formule za tangens zbira, činjenice da je $\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{24}$ i relacije (6) imamo

$$\begin{aligned}
tg\frac{7\pi}{24}&=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{24}\right)=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{24}}{1-tg\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{24}}\\
&=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{1-(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{-\sqrt{6}+\sqrt{3}+-+\sqrt{2}-3)}\\
&=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}\\
&=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\\
&=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.
\end{aligned}$$

Način IV:
Iz osnovne formule za tangens i relacije $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ imamo

$$tg\frac{7\pi}{24}=\frac{\sin\frac{7\pi}{24}}{\cos\frac{7\pi}{24}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{24}\right)}{\cos\frac{7\pi}{24}}=\frac{\cos\frac{5\pi}{24}}{\cos\frac{7\pi}{24}}.$$

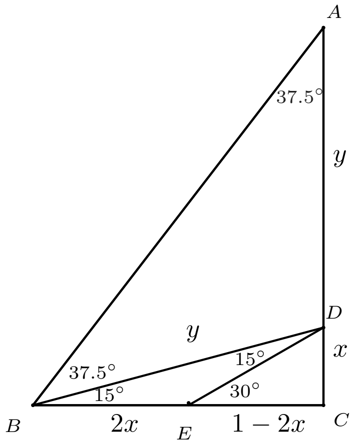
Proširivanjem posljednjeg razlomka sa $2\sin\frac{\pi}{24}$ i korištenjem formule $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
tg\frac{7\pi}{24}&=\frac{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}\\
&=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Racionalizacijom posljednjeg razlomka dobijamo

$$tg\frac{7\pi}{24}=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

Način V:
Nacrtajmo $\triangle ABC$ kod koga je $|BC| = 1$, $\angle ABC = 52,5°$ i $\angle BCA = 90°$. Tada je $\angle CAB = 90° - 52,5° = 37,5°$.



Na stranici AC odredimo tačku D tako da je $\angle DBC = 15°$, a time je $\angle ABD = 37,5°$. Trougao $\triangle ABD$ je jednakokraki pri čemu je $|AD| = |BD| = y$.
Na stranici BC odredimo tačku E tako da je $\angle BDE = 15°$. Time je $\triangle BED$ jednakokraki i stavimo $|BE| = |ED| = 2x$. Kako je $|BC| = 1$, onda je $|EC| = 1 - 2x$. Iz pravouglog trougla $\triangle DEC$, u kome je $\angle DEC = 30°$, imamo $\sin 30° = \dfrac{DC}{2x} = \dfrac{1}{2}$, iz čega zaključujemo da je $|DC| = x$.
Primjenom pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle CDE$ imamo $(2x)^2 = x^2 + (1-2x)^2$, odakle dobijamo da je $x = 2 - \sqrt{3}$ (jer je $x < 1$). Kako je i $\triangle BCD$ pravougli opet imamo $y^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2$, te je $y = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Najzad, iz $\triangle ABC$ (koji je pravougli trougao) slijedi

$$tg\, 52,5° = tg\frac{7\pi}{24} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{x+y}{1} = (2-\sqrt{3}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2.$$

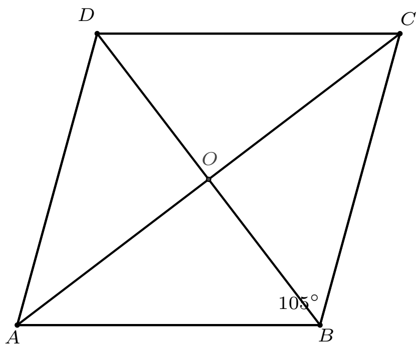
Način VI:
U rombu $ABCD$ stranice 1 u ugla $\angle ABC = 105°$, dijagonale AC i BD obilježimo redom sa $2x$ i $2y$ i njihov presjek je tačka O. Primjenom kosinusne teoreme na jednakokraki trougao $\triangle ABC$ imamo

$$(2x)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 75°.$$

Kako je

$$\cos 75° = \cos(90° - 15°) = \sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

zaključujemo da je $x^2 = \dfrac{1}{8}(4 + \sqrt{6} - \sqrt{2})$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle ABO$ imamo da je $y^2 = 1 - x^2 = \dfrac{1}{8}(4 - \sqrt{6} + \sqrt{2})$. Koristeći ove dvije relacije za x^2 i y^2 sada imamo



$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y^2} &= \frac{\frac{1}{8}(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\frac{1}{8}(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4-(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \cdot \frac{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{6-\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= \left(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)^2\end{aligned}$$

Kako iz parvouglog trougla $\triangle ABO$ imamo $tg\angle ABO = tg\, 52,5°$, vrijedi

$$tg\frac{7\pi}{24} = \frac{x}{y} = \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2.$$

3. Umjesto zaključka

Uočavamo da se za prva četiri rješenja koriste uobičajene formule za tangens zbira i razlike, adicione formule za sinus i kosinus, pretvaranje razlike sinusa u proizvod, te formula za sinus polovičnog ugla. U peostala dva rješenja koristi se znanje iz geometrije (Pitagorina teorema, svojstva jednakokrakog trougla i romba) i trigonometrije. Nadamo se da će ovaj rad inspirisati buduće čitaoce da daju još koje rješenje ovog zadatka ili ,pak, neki drugi zadatak riješe na više raznih načina.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene)*, Bosanska rijweč, Sarajevo, 2004.
[2] Z. Kumik: *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.