EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 2 – 17

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Matematičke igre u nastavi matematike

Sajra Kasić

Univerzitet u Bihaću

Sažetak: U vremenu razvoja modernih tehnologija pred nastavnika i nastavni proces postavljeni su mnogobrojni izazovi. Kako u središte nastavnog procesa uvijek treba postaviti aktivni angažman učenika, temeljen na logičkom zaključivanju i kritičkom propitivanju, kroz ovaj rad izložen je jedan takav pristup nastavi matematike. U radu je predstavljena matematička igra "Prebacivanje žaba" s ciljem poticanja učenja matematike kroz na prvi pogled jednostavnu igru, ali igru sa dubokom matematičkom suštinom, koju učenici trebaju otkriti. Polazeći od najjednostavnijeg oblika igre učenici izvode matematičke zaključke, a zatim postepenim usložnjavanjem igre formulišu generalizacije kao krajnji ishod.

1. Uvod

U ovom radu kroz jednu zanimljivu igru prikazan je pristup novijoj, savremenijoj nastavi matematike. Poznato je da je igra ključna za razvoj prije svega djetetovih, a kasnije i učeničkih sposobnosti jer pridonosi kognitivnom razvoju djeteta.

Igra je, u biti, prva i najvažnija aktivnost sa kojom se dijete upoznaje još u dobi djetinjstva. Već tada kroz igru, dijete otkriva, razmišlja, uočava međusobne odnose i relacije između pojmova, odnosno - dijete uči. Kao neizostavan dio učenja u djetinjstvu igru je važno nastaviti koristiti i u nastavi. Prije svega na taj način učenik je zainteresiran za nastavni rad i veća je vjerovatnoća usvajanja nastavnih sadržaja kroz ovakav vid nastave, nego kroz ustaljeni tempo nastave koji se svodi samo na nastavnikovo reproduciranje sadržaja bez adekvatnog učenikovog angažmana.

Matematika je jedan od predmeta kojeg učenici od početka doživljavaju kao izuzetno težak i složen. Matematički sadržaji se učenicima mogu približiti kroz matematičke igre gdje će učenik razvijati logičko razmišljanje, provoditi analizu i sintezu i donositi konačne sudove.

Cilj igara u nastavi matematike je usvojiti matematičke vještine i sposobnosti, ukazati na matematičke odnose, razvijati apstraktno mišljenje i naravno pozitivan stav prema matematici.

2. O matematičkim igrama

Matematika je predmet u kojem je pored demonstriranja, pokazivanja, uvježbavanja i ponavljanja matematičkih vještina neophodno određene matematičke radnje i zaključke učenicima ilustrirati, veoma često i vizualizirati. Na taj način produbljuju se matematička znanja i sam proces nastave matematike podiže se na puno viši nivo. Samim tim, takav oblik nastave koji podrazumijeva korištenje novijih i savremenijih vidova

Ciljna skupina: svi uzrasti
Ključne riječi: matematičke igre
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: maj 2022.

i stilova učenja, često su učenicima zanimljiviji, a samim tim i prihvatljiviji. Budući da je cilj savremene nastave u središte nastavnog procesa postaviti učenika i njegov aktivni angažman u nastavi, kroz zanimljive matematičke igre ovaj cilj je moguće ostvariti.

Igra u kojoj se struktura i pravila igranja temelje na matematičkim idejama, a pobjeda u igri izravno je povezana s razmijevanjem matematike nazivamo *matematička igra*. Dakle, važno je da je u pozadini igre matematička suština. Matematičke igre pružaju učenicima priliku da istražuju temeljne koncepte u matematici: slijed brojanja, računske operacije, korespondenciju jedan na jedan, kombinacije brojeva, permutacije i slično. Iz tih razloga se može reći da su matematičke igre važan alat za učenje matematike u školi.

Matematičke igre mogu pomoći učenicima da sa razumijevanjem nauče važne matematičke vještine i procese. S druge strane, matematičke igre su osmišljene tako da uklone dosadu iz rutine i ponavljanja matematičkih postupaka. Nakon što je učenik poučen konceptu, igranjem matematičkih igara on dobiva bolje razumijevanje teme.

2.1. Prednosti matematičkih igara

Običan način predavanja kredom i tablom nije pogodan za svakog učenika prilikom usvajanja matematičkog znanja. Veliki dio nastave matematike vrti se oko davanja i uvježbavanja novostečenih vještina te učvršćivanja i ponavljanja već uvedenih vještina. Igra može generirati mnogo više prakse od samog udžbenika jer kada igraju, učenici će lakše ponavljati određene činjenice ili postupke.

Glavna suština matematčke igre ogleda se u u rečenici *Marie Montessori*[1)]: "Pomozi mi da to učinim sam." To znači da je neophodno učenika uputiti u određeni materijal, u našem slučaju - matematičku igru, dati mu jasne upute i pravila igre i cilj do kojeg treba doći. Kroz sam proces istraživanja i rješavanja igre učenik samostalno usvaja nova znanja i otvara put ka kritičkom mišljenju. Iz svijeta konkretnog materijala, preko matematičke igre učenik uočava određena ponavljanja, jasan i logičan slijed radnji te na zoran način ulazi u svijet apstraktnih zaključaka. Igranje matematičkih igara zahtijeva uključenost, a uspješna nastava matematike ovisi o aktivnom uključivanju učenika.

Neke od karakteristika matematičkih igara su:

- potiče mentalno zaključivanje
- poboljšava osnovne matematičke vještine
- potiče strateško razmišljanje
- potiče matematičku komunikaciju
- potiče pozitivne stavove prema matematici
- poboljšava osjećaj broja, operacija i odnosa
- održava interes učenika

Strateško razmišljanje jedna je od najvažnijih vještina za razvoj djece. Zahtijeva sposobnost promatranja, uzimanja različitih informacija, analize informacija, planiranja i angažiranja mogućih rješenja te odabira odgovarajuće radnje. Strateško razmišljanje je čin rješavanja problema.

Matematičke igre vrše pritisak na učenike da rade mentalno. Na taj način učenici razvijaju vještine kritičkog razmišljanja. Matematičke igre zahtijevaju od igrača da razmisli prije nego donese odluku. To poboljšava učenikove logičke vještine i vještine zaključivanja. Učenici počinju optimizirati svoje poteze i pronalaze način da dođu do rješenja pomoću najjednostavnijih koraka.

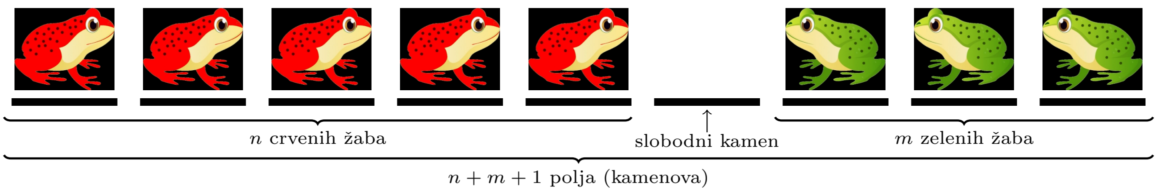
Vjerovatno jedan od najsnažnijih razloga za uvođenje matematičkih igara u nastavu matematike je entuzijazam, potpuna uključenost i uživanje koje učenici doživljavaju igrajući matematičke igre. Učenici su visoko motivirani i potpuno se uživljavaju u igre, a na kraju njihov odnos prema matematici postaje pozitivniji.

[1)] Maria Tecla Artemisia Montessori (1870-1952): Italijanska fizičarka

3. Jedna igra: Prebacivanje žaba

U ovom odjeljku dat ćemo pravila igre "*Prebacivanje žaba*", opisana u općenitom slučaju.

Posmatrajmo $m + n + 1$ kamenova poredanih u nizu i na njima raspoređenih n crvenih žaba sa lijeve strane i m zelenih žaba sa desne strane kao što je prikazano na Slici 1. Srednji kamen je slobodan i jedini je takav.



Slika 1: Postavka igre.

Pristupimo sada pravilima igre. Žabe se mogu kretati na dva načina, skokom na susjedni slobodni kamen, što ćemo u daljem zvati pomjeranjem žabe, ili preskokom jedne žabe na slobodni kamen, što ćemo zvati skokom.

Žabe koje se nalaze na lijevoj strani se mogu kretati samo udesno, a desne žabe se mogu kretati samo ulijevo. Skokovi preko praznog kamena nisu dozvoljeni.

Cilj igre je premjestiti sve crvene žabe sa lijeve strane niza kamenova na krajnje desne kamenove, a zelene žabe sa desne strane na krajnje lijeve kamenove, tako da opet između njih ostane jedan kamen slobodan kao u početnom stadiju igre. Igra završava kada sve crvene žabe sa lijeve strane pređu na desnu stranu, a sve zelene žabe sa desne strane dođu na lijevu stranu niza kamenova.

Dva ključna momenta u cjelokupnoj igri su određivanje pravilnog redoslijeda poteza kojima se vrši pomjeranje žaba i određivanje broja potrebnih poteza da se dođe do cilja, za bilo koji broj žaba.

Kroz ovu igru učenici će imati priliku:

- razviti logičko zaključivanje i vještine rješavanja problema
- vježbati opisivanje brojevnog uzorka u algebarskoj formuli
- razvijati komunikacijske vještine kroz razgovor u grupi i razredu
- tumačiti i rješavati probleme

3.1. Matematički model igre

Matematičku pozadinu igre odnosno razlog zašto ovu igru možemo svrstati u kategoriju matematičkih igara otkrivamo kroz sljedeće:

1. Rješavanje najjednostavnijeg oblika igre sa ukupno dvije žabe (jedna crvena i jedna zelena žaba) i određivanje ukupnog broja poteza pri premještanju žaba sa jedne strane na drugu
2. Rješavanje modificiranog oblika igre sa različitim brojem žaba
3. Uspostavljanje matematičkog odnosa između broja žaba i broja pomjeranja i skokova
4. Opisivanje pravilnosti i zakonitosti igre matematičkim jezikom do nivoa uspostavljanja teorema koji predstavlja generalizaciju cjelokupne igre

Kako bi učenici uspjeli izvesti određene matematičke zaključke u radu ćemo krenuti od najjednostavnijeg slučaja igre sa jednom crvenom i jednom zelenom žabom, a zatim ćemo igru polako usložnjavati sa brojem žaba. Neka se u svim igrama crvene žabe nalaze na lijevoj strani, a zelene na desnoj strani niza kamenova.

Poznavajući pravila igre, radi lakšeg rada, uvest ćemo sljedeću specijalnu notaciju za opisivanje igre,

$$\check{Z}\,{}^{k}_{s},$$

gdje $\check{Z} \in \{C, Z\}$ označava boju žabe (u našem slučaju crvena ili zelena), $k \in \{P, S\}$ gdje je P pomjeranje, a S skok žabe, $s \in \{1, 2, ..., a\}$ redni broj žabe. Iz gornjih indeksa možemo pratiti tip kretanja - pomjeranje ili skok, a iz donjih indeksa redni broj žabe koja se kreće. Tako bi sljedeće notacije imale značenja,

- Z_1^P- pomjeranje prve zelene žabe,
- C_2^S - skok druge crvene žabe i slično

Cilj ovog rada jeste da za ovu, na prvi pogled jednostavnu igru, otkrijemo njenu matematičku pozadinu te izvedemo određene matematičke zaključke i obrasce u kojima se uočavaju matematički odnosi.

3.1.1. Igra sa jednom crvenom i jednom zelenom žabom

U samom predstavljanju igre krenut ćemo od najjednostavnijeg oblika igre sa jednom crvenom i jednom zelenom žabaom. Početno stanje sa ovim brojem žaba predstavit ćemo sa

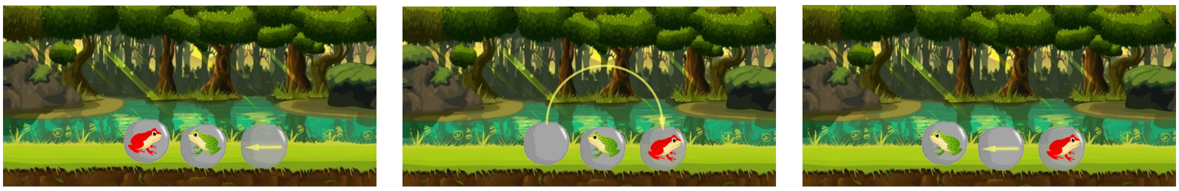
$$C_1 \_ Z_1 \ .$$

Cilj je premjestiti crvenu žabu sa lijeve na desnu stranu i zelenu žabu sa desne na lijevu stranu, tako da između njih ostane jedan slobodan kamen kao u početnom stanju. Pod pretpostavkom da se zelena žaba pomakne prva i uz uvedenu notaciju u prethodnom dijelu rada, demonstrirajmo rješenje najjednostavnijeg slučaja tabelom,

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_1\ Z_1\ \_$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
2.	$\_\ Z_1\ C_1$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
3.	$Z_1\ \_\ C_1$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$

Tabela 1: Igra sa 1 crvenom i 1 zelenom žabom.

Gornje možemo i vizualizovati!



(a) Pomjeranje Z_1^P, (b) skok C_1^S, (c) pomjeranje Z_1^P.

Time je postupak rješavanja igre moguće zapisati nizom,

$$Z_1^P - C_1^S - Z_1^P.$$

3.1.2. Igra sa dvije crvene i dvije zelene žabe

Postepenim usložnjavanjem igre dolazimo do igre sa ukupno 4 žabe, odnosno sa 2 crvene žabe na lijevoj strani i 2 zelene žabe na desnoj strani. Početno stanje za ovaj slučaj igre prikazat ćemo notacijom

$$C_2\ C_1\ \_\ Z_1\ Z_2$$

Uz ista pravila igre i usvojenu notaciju, Tabelom 2 prikazujemo rješenje ovog slučaja igre.

Za razliku od prvog i najjednostavnijeg slučaja sa ukupno 2 žabe, u ovom malo kompleksnijem slučaju imamo više kretanja oba tipa. Ukupno je potrebno 8 pravilnih poteza da bismo došli do konačnog cilja, za razliku od prethodnog slučaja u kojem smo problem zamjene žaba riješili sa samo 3 poteza. Brojanjem broja pomjeranja i broja skokova uočavamo da je u ovom slučaju zadržan podjednak broj za oba tipa kretanja - izvedeno je ukupno 4 pomjeranja i 4 skoka. Komparacijom sa igrom od jedne crvene i jedne zelene žabe uočavamo da se broj pomjeranja povećao za 2, a broj skokova za 3. Konačno rješenje igre možemo očitati iz posljednje kolone Tabele 2,

$$Z_1^P - C_1^S - C_2^P - Z_1^S - Z_2^S - C_1^P - C_2^S - Z_2^P.$$

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_2\ C_1\ Z_1\ \_\ Z_2$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
2.	$C_2\ \_\ Z_1\ C_1\ Z_2$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
3.	$\_\ C_2\ Z_1\ C_1\ Z_2$	pomjeranje druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^P}$
4.	$Z_1\ C_2\ \_\ C_1\ Z_2$	skok prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^S}$
5.	$Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ \_$	skok druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^S}$
6.	$Z_1\ C_2\ Z_2\ \_\ C_1$	pomjeranje prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^P}$
7.	$Z_1\ \_\ Z_2\ C_2\ C_1$	skok druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^S}$
8.	$Z_1\ Z_2\ \_\ C_2\ C_1$	pomjeranje druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^P}$

Tabela 2: Igra sa 2 crvene i 2 zelene žabe.

3.1.3. Igra sa tri crvene i tri zelene žabe

Uočavanjem promjena u broju pomjeranja, broju skokova, učestalosti kretanja žaba po bojama, koje nastaju povećavanjem broja žaba, dolazimo do matematičke suštine u ovoj igri. Nakon što smo predstavili dva specijalna oblika igre, možemo predstaviti i oblik igre koji je i najviše u upotrebi (igra sa tri crvene i tri zelene žabe) s ciljem generalizacije igre i uopštavanja određenih matematičkih odnosa. Početni položaj žaba prikazat ćemo sa,

$$C_3\ C_2\ C_1\ \_\ Z_1\ Z_2\ Z_3\ .$$

Rješenje ove igre možemo detaljno opisati tabelom:

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_3\ C_2\ C_1\ Z_1\ \_\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
2.	$C_3\ C_2\ \_\ Z_1\ C_1\ Z_2\ Z_3$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
3.	$C_3\ \_\ C_2\ Z_1\ C_1\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^P}$
4.	$C_3\ Z_1\ C_2\ \_\ C_1\ Z_2\ Z_3$	skok prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^S}$
5.	$C_3\ Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ \_\ Z_3$	skok druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^S}$
6.	$C_3\ Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ Z_3\ \_$	pomjeranje treće zelene žabe	$\mathbf{Z_3^P}$
7.	$C_3\ Z_1\ C_2\ Z_2\ \_\ Z_3\ C_1$	skok prve crvene žabe	$\mathbf{C_1^S}$
8.	$C_3\ Z_1\ \_\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1$	skok druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^S}$
9.	$\_\ Z_1\ C_3\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1$	skok treće crvene žabe	$\mathbf{C_3^S}$
10.	$Z_1\ \_\ C_3\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1$	pomjeranje prve zelene žabe	$\mathbf{Z_1^P}$
11.	$Z_1\ Z_2\ C_3\ \_\ C_2\ Z_3\ C_1$	skok druge zelene žabe	$\mathbf{Z_2^S}$
12.	$Z_1\ Z_2\ C_3\ Z_3\ C_2\ \_\ C_1$	skok treće zelene žabe	$\mathbf{Z_3^S}$
13.	$Z_1\ Z_2\ C_3\ Z_3\ \_\ C_2\ C_1$	pomjeranje druge crvene žabe	$\mathbf{C_2^P}$
14.	$Z_1\ Z_2\ \_\ Z_3\ C_3\ C_2\ C_1$	skok treće crvene žabe	$\mathbf{C_3^S}$
15.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ \_\ C_3\ C_2\ C_1$	pomjeranje treće zelene žabe	$\mathbf{Z_3^P}$

Tabela 3: Igra sa 3 crvene i 3 zelene žabe.

Postoji samo jedno rješenje za igru ako zelena žaba kreće prva, a zbog očigledne simetrije problema imamo i jedno rješenje ako se crvena žaba pomiče prva. U svim potezima (osim početnog poteza), kad god postoje dva moguća poteza, jedan od njih dovest će do pogreške i zbog toga je rješenje jedinstveno.

I u ovoj igri konačno rješenje možemo predstaviti nizom,

$$Z_1^P - C_1^S - C_2^P - Z_1^S - Z_2^S - Z_3^P - C_1^S - C_2^S - C_3^S - Z_1^P - Z_2^S - Z_3^S - C_2^P - C_3^S - Z_3^P.$$

Ovo je ilustacija računskog razmišljanja i rješavanja matematičkih problema gdje rješavamo manje i jednostavnije probleme kako bismo pronašli obrasce i koristili ove uzorke za rješavanje težih problema.

3.2. Uočavanje matematičkih pravilnosti

U ovoj sekciji rada matematičkim jezikom ćemo izraziti određene pravilnosti do kojih se dolazi detaljnom razradom igre. Te pravilnosti su sljedeće:

1. očavanje simetrije i otkrivanje matematičke ljepote u zapisu rješenja igre kao niza vrste kretanja (P-pomjeranje, S - skok) i boje žabe (C - crvena, Z - zelena),
2. uočavanje algebarske veze između broja žaba i broja pomjeranja,
3. uočavanje algebarske veze između broja žaba i broja skokova.

Povećavajući broj žaba koje učestvuju u igri, svako rješenje koje opisuje ispravno kretanje žaba izrazili smo kao niz pokreta uz unaprijed određenu i definisanu notaciju. Zapisivanjem ispravnih sekvenci pokreta uočavamo da se broj potrebnih poteza povećava kako se povećava broj žaba. Drugi ključan momenat je da se slova Z i C u nizu poteza pojavljuju u blokovima.

Analizirajmo rješenja igara prezentovanih u prethodnoj sekciji, sa stanovišta pojavljivanja pomjeranja (P) i skokova (S). Ovdje je n broj žaba jedne boje, a bojom sugerišemo koja žaba je napravila kretnju. Sada imamo sljedeće situacije,

za $n = 1$	P - S - P
za $n = 2$	P - S - P - SS - P - S - P
za $n = 3$	P - S - P - SS - P - SSS - P - SS - P - S - P.

Slika 2: Raspored pomjeranja i skokova za $n = 1, 2, 3$.

Možemo uočiti da postoji zanimljiva simetrija u ovom zapisu. Primjetimo da za $n = 1$ postoji istaknut centralni (središnji) skok (jedan **S**), za $n = 2$ imamo takva dva skoka (dva **S**), kod igre sa 6 žaba, to jest za $n = 3$ imamo centralna tri **S**. Udaljavajući se od tog centralnog bloka skokova i sa lijeve i sa desne strane uočavamo isti redoslijed učestalosti pojavljivanja slova **P** i **S**. Ovakav prikaz predstavlja jednu matematičku pravilnost, možemo je okarakterisati i sa ljepotom, rasporeda pomjeranja i skokova.

U sljedećem prikazu predstavljamo i dalje kretanje žaba izraženo slovima **P** i **S** ali ovaj put smo blokove skokova izrazili kao broj pojavljivanja skoka u tom jednom bloku. Tako unoseći već poznata rješenja, možemo izvršiti generalizaciju rješenja i za $n = 4, 5, ...$ Na taj način dolazimo do veoma interesantnog prikaza rješenja u obliku trougla (bojama sugerišemo koja žaba vrši kretnju):

$$P{-}1-P$$
$$P-1-P{-}2-P-1-P$$
$$P-1-P-2-P{-}3-P-2-P-1-P$$
$$P-1-P-2-P-3-P{-}4-P-3-P-2-P-1-P$$
$$P-1-P-2-P-3-P-4-P{-}5-P-4-P-3-P-2-P-1-P$$

Slika 3: Pomjeranja i broj skokova.

Uočavamo da se skupine skokova mijenjaju u bojama alternativno, pri čemu svaki blok skokova predstavlja skakanje žaba iste boje.

Analogno ovome, istaknimo i blokove pomjeranja koji predstavljaju broj pojavljivanja pomjeranja u svakom od blokova:

$$\begin{array}{rcl} 1- & S & -1 \\ 1-S-1- & SS & -1-S-1 \\ 1-S-1-SS-1- & SSS & -1-SS-1-S-1 \\ 1-S-1-SS-1-SSS-1- & SSSS & -1-SSS-1-SS-1-S-1 \\ 1-S-1-SS-1-SSS-1-SSSS-1- & SSSSS & -1-SSSS-1-SSS-1-SS-1-S-1 \end{array}$$

Slika 4: Skokovi i broj pomjeranja.

U zapisu možemo uočiti da između svaka dva bloka skokova (S,SS,SSS,...), uvijek je prisutno samo jedno pomjeranje.

Iz Slike 3 možemo uočiti još jednu pravilnost. Naime, "čitamo" li broj kretanja (bilo pomjeranja ili skokova) jedne boje i prikažemo to nizovima boja, crvene - C i zelene - Z, dobijamo prikaze rješenja za razne n, prema kretanjima po bojama (Slika 5). Možemo sada primjetiti da broj žaba jedne boje (n) određuje centralni dio niza, s tim da se boje naizmjenično mijenjaju udaljavajući se od istaknutog (centralnog) dijela niza i sa lijeve i sa desne strane.

$$\begin{array}{c} Z-\mathbf{C}-Z \\ Z-CC-\mathbf{ZZ}-CC-Z \\ Z-CC-ZZZ-\mathbf{CCC}-ZZZ-CC-Z \\ Z-CC-ZZZ-CCCC-\mathbf{ZZZZ}-CCCC-ZZZ-CC-Z \\ Z-CC-ZZZ-CCCC-ZZZZZ-\mathbf{CCCCC}-ZZZZZ-CCCC-ZZZ-CC-Z. \end{array}$$

Slika 5: Kretanja po bojama žaba.

Iz posmatrane tri specijalne igre formirajmo tabelu u kojoj ćemo istaknuti vrste kretanja i ukupan broj kretnji.

n	*Opis rješenja*	*Pomjeranja*	*Skokovi*	*Ukupan broj kretanja*
1	Z_1^P, C_1^S, Z_1^P	2	1	$3 = 2 + 1$
2	$Z_1^P, C_1^S, C_2^P, Z_1^S, Z_2^S, C_1^P, C_2^S, Z_2^P$	4	4	$8 = 4 + 4$
3	$Z_1^P, C_1^S, C_2^P, Z_1^S, Z_2^S, Z_3^P, C_1^S, C_2^S, C_3^S, Z_1^P, Z_2^S, Z_3^S, C_2^P, C_3^S, Z_3^P$	6	9	$15 = 6 + 9$

Tabela 4: Kretanje žaba.

Jedno od opažanja u Tabeli 4 navodi nas na uočavanje određenih algebarskih veza između pojedinih elemenata u tabeli. Bit ovog rada je i kako naučiti učenike opisivati stvari oko sebe matematičkim relacijama (naravno, ako je to moguće u pojedinim slučajevima). U samom početku rada smo izdvojili tipove kretanja i usvojili određenu terminologiju i notaciju kojom razlikujemo pomjeranje i skokove. Kroz prethodne dijelove rada dali smo prikaz rješenja za tri naše igre " Preskakanje žaba".

Posmatrajmo sada posebno pomjeranje žaba da bismo izveli obrazac koji povezuje broj žaba jedne boje (n) i broja pomjeranja. Kako smo kroz rješenja igre sa jednom crvenom i jednom zelenom žabom imali dva pomjeranja, to ćemo radi lakšeg uočavanja te podatke uvrstiti u tabelu. Analogno pristupamo svakom slučaju igre da bismo došli do konačnog cilja - odrediti algebrasku vezu između broja pomjeranja i broja žaba.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	Broj pomjeranja
1	1	$2 = 1 + 1$
2	2	$4 = 2 + 2$
3	3	$6 = 3 + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n	$2n = n + n$

Tabela 5: Pomjeranje žaba.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	Broj skokova
1	1	$1 = 1 \cdot 1$
2	2	$4 = 2 \cdot 2$
3	3	$9 = 3 \cdot 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n	$n^2 = n \cdot n$

Tabela 6: Skokovi žaba.

Posmatrajući podatke u Tabeli 5 i poznavajući četiri osnovne računske operacije (što će vjerovatno učenicima biti i prva dosjetka kao najjednostavnije operacije u matematici) možemo primjetiti da je broj pomjeranja jednak ukupnom broju žaba. Preciznije, posmatrali smo jednak broj crvenih i zelenih žaba pa dolazimo do obrasca da ukupan broj pomjeranja iznosi $n + n$ odnosno $2n$.

Na potpuno analogan način pristupamo uočavanju algebarske veze između broja skokova i broja žaba. Poznate podatke prikazujemo u Tabeli 6. Kao što smo u slučaju sa pomjeranjem žaba uočili računsku operaciju sabiranja, uočavamo da je u ovom slučaju u pitanju množenje, odnosno da je broj skokova jednak proizvodu crvenih i zelenih žaba. Obzirom da radimo sa jednakim brojem crvnih i zelenih žaba (n), to za rezultat ukupnog broja skokova dobijamo $n \cdot n = n^2$, što se i slaže sa uočavanjem da su svi dobiveni rezultati za broj skokova u posljednjoj koloni kvadratni brojevi.

Kako je prisutno ukupno n crvenih i n zelenih žaba sa jednim slobodnim kamenom između, to svaka od n crvenih žaba se može (treba) pomaknuti naprijed za $n + 1$ slobodnih mjesta jer ukupno ima n mjesta na kojima su zelene žabe i još jedno slobodno mjesto koje predstavlja prazan kamen koji razdvaja crvene i zelene žabe (prethodno tumačenje vrijedi jer po pravilima igre žabe se mogu kretati samo naprijed, a nikako unatrag). Isto važi i za n zelenih žaba koje ispred sebe imaju ukupno $n + 1$ slobodnih mjesta uvažavajući samo kretanje unaprijed. Ukupan broj kretanja do ispunjavanja cilja igre je jednak zbiru pomjeranja crvenih i zelenih žaba odnosno $n\,(n + 1) + n\,(n + 1)$, gdje se prvi sabirak odnosi na crvene a drugi sabirak na zelene žabe. Ukupan broj skokova (S) je jednak proizvodu broja crvenih i zelenih žaba odnosno $n \cdot n$, pri čemu jedan skok obuhvata udaljenost od 2 polja. Da se uvjerimo da će ukupan broj pomjeranja (P) biti jednak $2n$, raspisat ćemo dosadašnja objašnjenja,

$$n\,(n + 1) + n\,(n + 1) - 2n \cdot n = n^2 + n + n^2 + n - 2n \cdot n = n + n = 2n.$$

Na ovaj način smo se uvjerili da navedena relacija zbira broja crvenih i zelenih žaba odgovara ukupnom broju pomjeranja.

Pozivajući se na rješenja gore navedene tri vrste igre, možemo uočiti i da se redni brojevi žaba koje vrše kretnju, pojavljuju u pravilnim blokovima. Naime, kod igre sa $n = 1$ te su kretnje date sa nizom $1 - 1 - 1$. Za $n = 2$ imamo $1 - 12 - 12 - 12 - 1$ i konačno za $n = 3$ kretnje su izražene nizom

$$1 - -12 - 123 - 123 - 123 - 23 - 3.$$

Pri tome ovi blokovi predstavljaju kretanje iste boje žaba i to alternativno, ako je prvi blok kretanje crvenih žaba, naredni je kretanje zelenih, pa onda crvenih i tako do kraja niza.

Na osnovu svih uočenih simetrija, pravilnosti i zakonitosti, kroz tri koraka možemo doći do rješenja igre sa bilo kojim brojem žaba n (n - broj žaba i jedne i druge boje).

Algoritam.

Korak 1: *Prvo ispišimo redoslijed blokova pomjeranja P i skokova S koji su prikazani u trouglovima na Slika 3 i Slika 4. Ispišimo ih na način kako smo to uočili na Slici 2,*

$$P - S - P - SS - P - SSS - ... - P - n \cdot S - P - (n-1) \cdot S - P - ... - P - SS - P - S - P$$

Dio koji se odnosi na $n \cdot S$ predstvalja središnji ili centralni dio zapisa.

Korak 2: *Sada zapišimo uočene simetrije koje vezujemo za redoslijed pojavljivanja boja. Počnimo sa zelenom bojom Z, potom dvije crvene CC, zatim tri zelene ZZZ i tako naizmjenično redajući boje u blokove gdje se u svakom sljedećem bloku boja pojavljuje jedna žaba više. Naizmjenično redanje boja pišemo dok ne dođemo do centralnog dijela, gdje nakon njega i dalje zapisujemo blokove boja naizmjenično s tim da sada u svakom bloku umanjujemo broj žaba za* 1 *i tako dobijemo lijepo simetričan zapis blokova boja (Slika 5).*

Korak 3: *U posljednjem koraku određujemo redni broj žabe koja se pomjera ili skače. Redni broj žaba zapisujemo na sljedeći način. Formiramo blokove, prvo počnemo sa* 1, *pa zatim* $1, 2$ *onda* $1, 2, 3$ *i tako redom do dijela* $1, 2, 3, 4, ...n$. *Nakon tog bloka brojeva ide centralni blok ponovo* $1, 2, ..., n$, *a onda udaljavajući se desno od centralnog bloka nastavljamo zapise na sljedeći način: ponovo ide blok* $1, 2, 3, 4, ...n$, *a u svakom sljedećem bloku izbacujemo po jedan broj s lijeve strane prethodnog bloka. Dakle, drugi blok od centralnog bi glasio* $2, 3, 4, ...n$, *treći bi bio* $3, 4, ..., n$ *i tako redom do zapisa* $n - 1, n$ *i zadnji blok bi bio samo* n.

Ovim načinom uspješno možemo riješiti igru gdje imamo isti broj žaba i jedne i druge boje.

Primjer 1. *Da bismo demonstrirali ovaj algoritam od tri koraka za uspješno rješavanje igre, pogledajmo primjer sa tri crvene i tri zelene žabe, odnosno slučaj kada je broj žaba obje boje* $n = 3$. *Prvo ispišimo redoslijed blokova pomjeranja P i skokova S kako je opisano u postupku. Prikaz blokova pomjeranja P i skokova S za* $n = 3$ *je sljedeći*

$$P - S - P - SS - P - SSS - P - SS - P - S - P.$$

Sada pristupamo koraku 2. U ovom koraku moramo prikazati učestalost kretanja žaba po bojama. Kako smo naveli u opisu koraka, započet ćemo sa jednom zelenom žabom Z, a potom naizmjenično redati boje u blokove, uvaćavajući svaki blok za po jedno slovo dok ne dođemo do centralnog dijela, što zapisujemo u našem slučaju kao $Z\ -\ CC\ -\ ZZZ$. Centrani blok definiše isti broj žaba kao prethodni blok samo je u pitanju druga boja žaba (CCC). Nakon centralnog dijela, po izloženim uputama i dalje naizmjenično redamo blokove kako slijede lijevo od centralnog dijela. Tako se održava simetričan zapis ($ZZZ\ -\ CC\ -\ Z$). Na taj način dobijamo cjelokupan niz blokova

$$Z\ -\ CC\ -\ ZZZ\ -\ CCC\ -\ ZZZ\ -\ CC\ -\ Z.$$

Do konačnog rješenja igre moramo još znati i redni broj crvene i/ili zelene žabe koja vrši kretnju. Kako je izloženo u opisu trećeg koraka, prvo počnimo sa 1, zatim 1,2, pa 1,2,3 i tako dalje dok ne dođemo do centralnog dijela koji se predstavlja nizom $1, 2, ..., n$, *odnosno u našem slučaju to je blok 1,2,3. Centralni dio ponavljamo, a zatim pišemo dio desno od centralnog dijela, ponavljajući prvi blok kao sa lijeve strane centralnog dijela odnosno blok 1,2,3. Dalje umanjujemo blokove, gdje svaki naredni blok započinjemo drugim brojem iz prethodnog bloka, odnosno u našem slučaju to je blok 2,3 i završavamo sa brojem 3. Navedeni postupak predstavljamo sljedecim nizom,*

$$1\ -\ 12\ -\ 123\ -\ 123\ -\ 123\ -\ 23\ -\ 3.$$

Sintezom i provedbom postupka kroz navedena tri koraka (koristeći uvedenu notaciju) dolazimo do rješenja igre za $n = 3$, *kako je izloženo u Sekciji 3.1.3, a to je:*

$$Z_1^P, C_1^S, C_2^P, Z_1^S, Z_2^S, Z_3^P, C_1^S, C_2^S, C_3^S, Z_1^P, Z_2^S, Z_3^S, C_2^P, C_3^S, Z_3^P.$$

3.3. Igra sa različitim brojem žaba

Igra sa jednakim brojem žaba, kao što smo mogli vidjeti, može se riješiti i opisati u opštem slučaju. Situacija sa različitim brojem žaba je takođe rješiva, ali je opis rješenja teško dati za opšti slučaj. Svi izvedeni zaključi prikupljeni za jednak broj žaba na svakoj strani, učenicima mogu olakšati uočavanje algebarskih veza kada posmatramo uzorak sa različitim brojem žaba na svakoj strani.

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_1\ Z_1\ \_\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	Z_1^P
2.	$\_\ Z_1\ C_1\ Z_2\ Z_3$	skok prve crvene žabe	C_1^S
3.	$Z_1\ \_\ C_1\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	Z_1^P
4.	$Z_1\ Z_2\ C_1\ \_\ Z_3$	skok druge zelene žabe	Z_2^S
5.	$Z_1\ Z_2\ \_\ C_1\ Z_3$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P
6.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ C_1\ \_$	skok treće zelene žabe	Z_3^S
7.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ \_\ C_1$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P

Tabela 7: Igra sa 1 crvenom i 3 zelene žabe.

Ako posmatramo igru sa tri zelene i jednom crvenom žabom, što ustaljenom notacijom možemo predstaviti sa početnim stanjem: $C_1\ \_\ Z_1\ Z_2\ Z_3$, rješenje ćemo prikazati sljedećim koracima:

Rješenje možemo predstaviti i sa nizom boja, **Z - C - Z - Z - C - Z - C** ili nizom kretanja, **P - S - P - S - P - S - P**.

Da bi uvidjeli neke odnose, povećajmo broj crvenih žaba za 1, a broj zelenih žaba ostavimo istim, to jest posmatrajmo igru sa tri zelene i dvije crvene žabe. Početno stanje je $C_2\ C_1\ \_\ Z_1\ Z_2\ Z_3$. Rješenje je predstavljeno kroz 11 poteza u Tabeli 8. Anlogno prethodnom slučaju rješenje ćemo predstaviti nizom boja, **C - Z - Z - C - C - Z - Z - Z - C - C - Z** ili nizom kretanja, **P - S - P - S - S - P - S - S - P - S - P**.

Korak	Stanje	Opis koraka	Notacija
1.	$C_2\ \_\ C_1\ Z_1\ Z_2\ Z_3$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P
2.	$C_2\ Z_1\ C_1\ \_\ Z_2\ Z_3$	skok prve zelene žabe	Z_1^S
3.	$C_2\ Z_1\ C_1\ Z_2\ \_\ Z_3$	pomjeranje druge zelene žabe	Z_2^P
4.	$C_2\ Z_1\ \_\ Z_2\ C_1\ Z_3$	skok prve crvene žabe	C_1^S
5.	$\_\ Z_1\ C_2\ Z_2\ C_1\ Z_3$	skok druge crvene žabe	C_2^S
6.	$Z_1\ \_\ C_2\ Z_2\ C_1\ Z_3$	pomjeranje prve zelene žabe	Z_1^P
7.	$Z_1\ Z_2\ C_2\ \_\ C_1\ Z_3$	skok druge zelene žabe	Z_2^S
8.	$Z_1\ Z_2\ C_2\ Z_3\ C_1\ \_$	skok treće zelene žabe	Z_3^S
9.	$Z_1\ Z_2\ C_2\ Z_3\ \_\ C_1$	pomjeranje prve crvene žabe	C_1^P
10.	$Z_1\ Z_2\ \_\ Z_3\ C_2\ C_1$	skok druge crvene žabe	C_2^S
11.	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ \_\ C_2\ C_1$	pomjeranje treće zelene žabe	Z_3^P

Tabela 8: Igra sa 2 crvene i 3 zelene žabe.

Zaključak koji se može izvesti iz prethodna dva slučaja, gdje smo broj zelenih žaba državali konstantnim, a povećavali broj crvenih žaba, svodi se na povećanje ukupnog broja poteza koji vode do konačnog rješenja. Broj pomjeranja se povećao za 1, a broj skokova za 3, što za rezultat daje da se ukupan broj poteza povećao za 4. Primjetimo da je učestalost ponavljanja pomjeranja (P) i skokova (S) također u blokovima i da se ponavlja i sa lijeve i sa desne strane. Za prvi slučaj uočavamo niz

$$P\ S\ P\ \mathbf{S}\ P\ S\ P,$$

a za drugi slučaj

$$P\ S\ P\ S\ S\ \mathbf{P}\ S\ S\ P\ S\ P,$$

što se može predstaviti našim već poznatim "trouglovima" iz prethodne sekcije rada. Na upravo predstavljenim primjerima na uzorku sa tri zelene žabe sa jedne strane, "trougao" sa blokovima skokova bi imao sljedeći prikaz,

P - 1 - P - 1 - P - 1 - P
P - 1 - P - 2 - P - 2 - P - 1 - P
P - 1 - P - 2 - P - 3 - P - 2 - P - 1 - P

Ako predstavimo i ”trougao” pomjeranja u kome ćemo blokove pomjeranja izraziti brojem pojavljivanja pomjeranja u tom jednom bloku dobit ćemo sljedeće:

1 - S - 1 - S - 1 - S - 1
1 - S - 1 - SS - 1 - SS - 1 - S - 1
1 - S - 1 - SS - 1 - SSS - 1 - SS - 1 - S - 1

Možemo primjetiti da se zadržalo isto uočavanje blokova pomjeranja i u slučaju sa istim i različitim brojem crvenih i zelenih žaba, odnosno između svakog bloka skokova prisutno je uvijek samo jedno pomjeranje.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Pomjeranje P*	*Skok S*	*Ukupan broj poteza*
1	1	2	1	3
1	2	3	2	5
1	3	4	3	7
1	4	5	4	9
1	5	6	5	11
1	6	7	6	13

Tabela 9: Uzorak za jednu žabu sa jedne strane.

Posmatranjem i uočavanjem pravilnosti u Tabeli 9 dolazimo do sljedećih zaključaka:

- broj pomjeranja se povećava za 1,
- broj skokova se povećava za 1,
- ukupan broj poteza se povećava za 2 svaki put.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Pomjeranje P*	*Skok S*	*Ukupan broj poteza*
2	1	3	2	5
2	2	4	4	8
2	3	5	6	11
2	4	6	8	14
2	5	7	10	17
2	6	8	12	20

Tabela 10: Uzorak za dvije žabe sa jedne strane.

Iz Tabele 10 izvedimo matematičke zaključke:

- broj pomjeranja se povećava za 1 svaki put,
- broj skokova se povećava za 2 svaki put,
- ukupan broj poteza se povećava za 3 svaki put.

Slično gornjem, možemo doći do odgovarajućih zaključaka i na osnovu Tabele 11

Jedan od zaključaka koji smo uočili i objasnili u dijelu sa jednakim brojem žaba, a odnosi se na ukupan broj pomjeranja, u ovom odjeljku će biti samo opšta generalizacija. Kako se kretanje žaba može izvoditi samo unaprijed, to će ukupan broj pomjeranja biti jednak

$$n\,(m+1) + m\,(n+1) - 2m \cdot n = nm + n + nm + m - 2nm = n + m,$$

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Pomjeranje P*	*Skok S*	*Ukupan broj poteza*
3	1	4	3	7
3	2	5	6	11
3	3	6	9	15
3	4	7	12	19
3	5	8	15	23
3	6	9	18	27

Tabela 11: Uzorak za tri žabe sa jedne strane.

gdje je n broj crvenih, a m broj zelenih žaba.

Kao generalni zaključak koji vrijedi i za slučaj sa istim brojem crvenih i zelenih žaba i sa različitim brojem crvenih i zelenih žaba, navedimo sljedeći teorem koji daje vezu između ukupnog broja poteza (kretanja) i broja crvenih i zelenih žaba.

Teorem 1. *Ukupan broj poteza jednak je zbiru crvenih i zelenih žaba i proizvoda broja zelenih i crvenih žaba, to jest*

$$P_B = Z_B \cdot C_B + Z_B + C_B,$$

gdje je Z_B - broj zelenih žaba, C_B - broj crvenih žaba i P_B - ukupan broj poteza.

U slučaju jednakog broja žaba imamo,
za $n = 1$ $\quad P_B = 1 \cdot 1 + 1 + 1 = 3,$
za $n = 2$ $\quad P_B = 2 \cdot 2 + 2 + 2 = 8,$
što možemo potvrditi i Tabelom 4. Isto slaganje sa formulom imamo za slučaj kada je broj crvenih i zelenih žaba različit, kao na primjer igru u kojoj je $Z_B = 3$ i $C_B = 1$ gdje je $P_B = 3 \cdot 1 + 3 + 1 = 7$, a što je tačno jer smo taj slučaj igre riješili sa ukupno 7 poteza (Tabela 9).
Ovih nekoliko do sada posmatranih i dobijenih rezultate prikažimo tabelom, čime se uvjeravamo u validnost tvrdnje iskazane u Teoremu 1.

Crvene žabe	*Zelene žabe*	*Broj pomjeranja*	*Broj skokova*	*Ukupan broj poteza* P_B
1	1	2	1	$1 \cdot 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 3$
2	2	4	4	$2 \cdot 2 + 2 + 2 = 4 + 4 = 8$
3	3	6	9	$3 \cdot 3 + 3 + 3 = 9 + 6 = 15$
3	1	4	3	$1 \cdot 3 + 1 + 3 = 3 + 4 = 7$
3	2	5	6	$2 \cdot 3 + 2 + 3 = 6 + 5 = 11$
3	5	8	15	$3 \cdot 5 + 3 + 5 = 15 + 8 = 23$
m	n	$m + n$	$m \cdot n$	$n \cdot m + n + m$

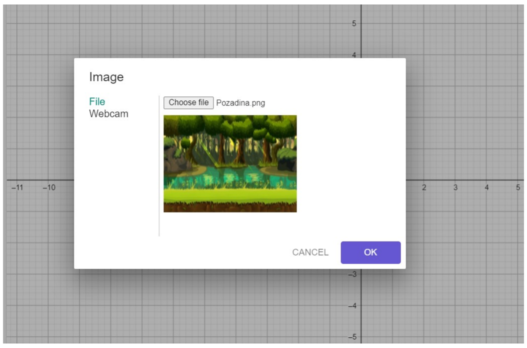
Tabela 12: Pregled nekih matematičkih uočavanja.

3.4. Osnovni zaključak

Dakle, da bismo pravilno riješili našu igru važno je da se vodimo uočenim pravilnostima. Uz poznavanje broja crvenih i zelenih žaba lako možemo odrediti broj poteza koji će nas dovesti do tačnog rješenja. Dalje, ukoliko poznajemo broj crvenih i zelenih žaba možemo odrediti koliko od tih poteza ide na pomjeranje (broj pomjeranja je jednak zbiru crvenih i zelenih žaba), a koliko ide na skokove (broj skokova je jednak proizvodu crvenih i zelenih žaba). Svaki blok skokova (jedan skok, dva ili više) razdvaja samo jedno pomjeranje što možemo uočiti iz posmatranih trouglova. Uz ovakva opažanja do kojih smo došli, lakše i jednostavnije možemo doći do cilja i riješiti bilo koju varijantu igre. Na ovaj način smo otkrili kako lakše riješiti igru poznavajući matematičku pozadinu iste igre.
Ljepota matematike se ogleda između ostalog u njenom otkrivanju u raznim stranama i stvarima prirode i života kao i u njenoj primjeni kod istih, što pokazuje i ova igra.

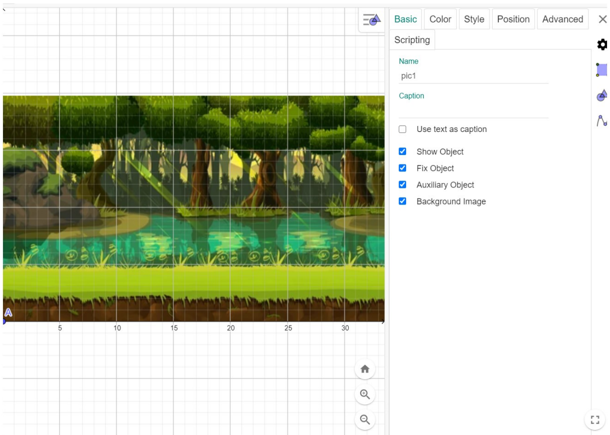
4. Informatički dio

Izradu igre "Preskakanje žaba" smo kreirali kroz dva softverska alata, a to su **GeoGebra** i **PhotoPea**. Samo postavljanje slika u GeoGebri se odvija sljedećim postupkom. Nakon kreiranja GeoGebra projekta prvo postavljamo sliku pozadine. Otvaranjem dijaloškog okvira za otvaranje datoteke odabiremo željenu sliku.



Slika 6: Postavljanje pozadine.

Smještanje slike možemo podesiti klikom miša na tačku za koju se vezuje donji lijevi ugao slike. Položaj slike može biti apsolutan na zaslonu ili relativan u koordinatnom sistemu što određujemo u kartici svojstava slike. Tu je omogućeno dodatno uređivanje slike i osobina poput debljine crte, vidljivosti, ispune i slično. Nakon sto je slika za pozadinu učitana, potrebno je tu sliku povećati pa u ovom slučaju dovoljno je da sliku centriramo.
Naredni korak jeste da tu sliku postavimo kao pozadinu u samoj GeoGebri. Odabirom "Settings" opcije trebamo osigurati da se slika pozadine nikako ne pomjera, odnosno da zadržimo fiksnu poziciju. Kada otvorimo "Settings" prozor, u koloni "Basic" trebamo odabrati dvije opcije: "Fix Object" i "Background Image".



Slika 7: Fix Object.

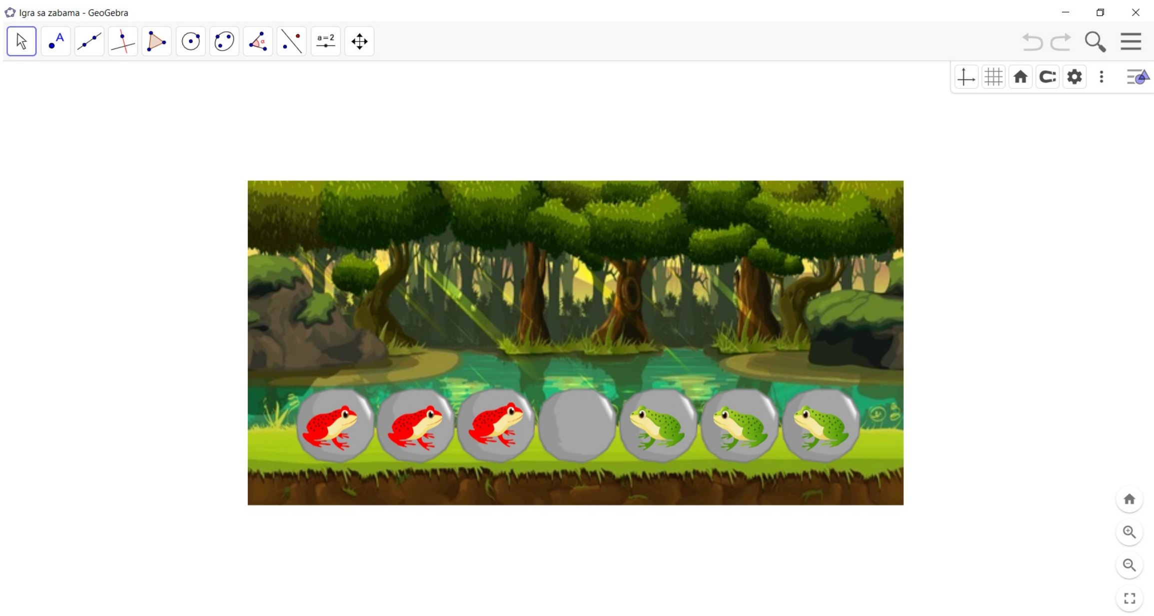
Da bismo dobili kompletan izgled igre, na već postavljenu pozadinu postavljamo slike kamenova te slike žaba. Slike za žabe ubacujemo na isti način kao u objašnjenju za prethodnu sliku. Sljedeći postupak se vrši onoliko puta koliko ima slika za žabe:

1. pomjeranje slike za žabu na jedan od kamenova,
2. smanjenje slike za žabu kako bi se žaba lijepo uklopila u oblik kamena,

3. sakrivanje tačaka vezanih za sliku.

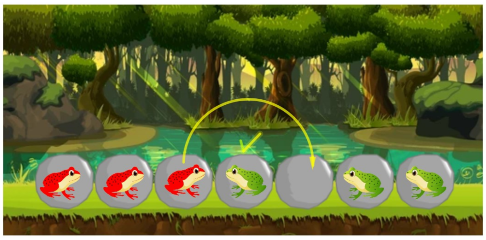
Slika 8: Uklanjanje mreže.

U konačnici, kada se sve slike za žabe učitaju i prilagode, preostaje još da se sakriju koordinate, mreža i kolona sa svim tačkama kako bi igra izgledala pregledno. Da bi se sakrila kolona sa tačkama, potrebno je kliknuti na tri tačkice pored ikonice u obliku zupčanika i odabrati opciju "Close".
Nakon svega ovoga, postavka naše igre na monitoru izgleda ovako,

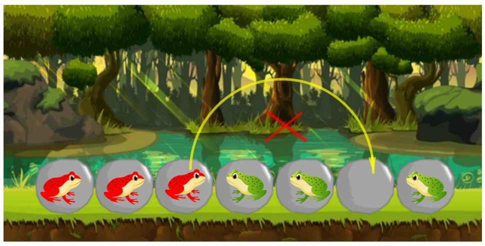


Slika 9: Konačni izgled igre.

Nakon što smo objasnili kreiranje pozadine, sada ćemo objasniti i predstaviti kretanje žaba. Žabe se pomjeraju klikom miša na željenu žabu. Klikom miša na žabu koju želimo pomjeriti otvara se mogućnost pomjeranja u svim pravcima. Ipak, da bismo došli do konačnog rješenja igre, žabe trebamo pomjeriti na način opisan pravilima igre. Lijevim klikom miša "povlačimo" željenu žabu na susjedni slobodni kamen ili preskačemo jednu žabu suprotne boje.



(a) Pravilno preskakanje.



(b) Nepravilno preskakanje.

Moramo voditi računa da se smije preskočiti samo jedna žaba, a ne dvije ili više, kao što se žaba smije pomjeriti samo za jedan susjedni slobodan kamen u odgovarajuću stranu. Takođe treba voditi računa da se crvene žabe smiju kretati samo udesno, a zelene samo ulijevo. Dakle, pravilno kretanje zelenih žaba dobit ćemo klikom miša na zelenu žabu i njenim pomjeranjem u lijevu stranu. Pravilno kretanje crvenih žaba dobit ćemo klikom miša na crvenu žabu i pomjeranjem u desnu stranu.

(c) Pravilno kretanje zelene žabe.

(d) Nepravilno kretanje zelene žabe.

5. Zaključak

Cilj rada je dati jedan konkretan primjer savremenog, modernog pristupa nastavi matematike kroz jednu igru u čijoj realizaciji je dubok matematički sadržaj koji se ogleda u temama kao što su analiza, donja granica, generalizacija rješenja. Ovdje je važno istaknuti algoritamsko razmišljanje kao sposobnost razumijevanja, izvršavanja, evaluacije i stvaranja računskih postupaka.

Kroz ovu igru učenici će imati priliku:

- razviti logičko zaključivanje i vještine rješavanja problema,
- razvijati komunikacijske vještine kroz razgovor u grupi i u razredu,
- vježbati opisivanje brojnog uzorka u algebarskoj formuli,
- fleksibilno razmišljati i primjenjivati stečena znanja i vještine,
- tumačiti i rješavati probleme.

Učenici uživaju u rješavanju ovakvih igara, a to povećava interes i motivaciju učenika. Ovo je primjer jedne matematičke igre koja učenicima pruža mjesto za razvoj kritičkog analitičkog zaključivanja. Da bi učenici mogli izvoditi određene generalizacije krenuli smo od jednostavnijeg slučaja u kojem učenici samo uočavaju pravilnosti i na taj način dolaze do složenijeg slučaja kojeg nastoje uopštiti. Cilj ovakve igre je i u rezoniranju apstraktnog i kvantitativnog. Učenici konstruiraju održive argumente i kritiziraju mišljenje drugih, uočavanjem pojedinih relacija iskazuju algebarske veze.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ , Sarajevo, 2004.
[2] Z. Kumik: *Posebne metode rješvanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.
[3] J. Križaj Grušovnik: *Montessori u nastavi*, Varaždinski učitelj, Varaždin, 2022.