EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 18–22

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Pojam radijana u nastavi trigonometrije

Dina Kamber Hamzić

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu

Sažetak: U radu je objašnjen značaj radijana u nastavi trigonometrije, ali i problemi sa kojima se učenici i studenti susreću kad koriste radijane. Navedeni su glavni izvori problema sa razumijevanjem radijana, kao i moguća rješenja.

1. Uvod

Trigonometrija je veoma bitna oblast matematike. Antičke civilizacije (pogotovo egipatska, babilonska, indijska i kineska) su posjedovale značajno znanje praktične geometrije, uključujući i koncepte koje možemo smatrati počecima trigonometrije. Trigonometrija u modernom smislu počinje sa grčkom civilizacijom i *Hiparhom.* Hiparhova djela su nažalost vremenom izgubljena te danas o njemu i njegovom radu znamo iz *Ptolomejovog Almagesta* i djela drugih naučnika. Prvu tablicu vrijednosti sinusne funkcije nalazimo u djelu indijskog matematičara i astronoma *Aryabhate* (5. i 6. stoljeće), dok je prvu tablicu vrijednosti tangensne i kotangensne funkcije konstruisao *Habaš al-Hasib* (9. stoljeće). Naučnici islamske civilizacije su poslije Grka nastavili razvijati trigonometriju, a *Nasir al-Din al-Tusi* je u 13. stoljeću napisao prvi rad o trigonometriji neovisan o astronomiji, time uspostavljajući osnove trigonometrije kao neovisne matematičke oblasti. Prva knjiga posvećena isključivo trigonometriji, *De triangulis omnimodis*, objavljena je 1533. godine u Bavarskoj i napisao ju je renesansni naučnik *Regiomontanus.* Sljedeći veliki korak u razvoju klasične trigonometrije je bio izum logaritama. Logaritamske tablice *Johna Napiera* su značajno olakšale razne numeričke izračune, a između ostalog omogućile su i pravljenje trigonometrijskih tablica [6].
Danas se trigonometrija koristi, osim u matematici i astronomiji, i u fizici (određivanje komponenti vektorskih veličina, modeliranje valova i oscilacija,...), arhitekturi i građevini (mjerenje i računanje visina, širina,...), geodeziji (kartografija), forenzici (kretanje projektila), akustici (modeliranje zvučnih valova),... Naravno, trigonometrija je neizostavan dio srednjoškolske i fakultetske matematike, te kao oblast koja povezuje geometriju, algebru i grafičke prikaze, važan je uvod u diferencijalni i integralni račun.

2. Nastava trigonometrije i značaj radijana

Obično se učenici prvo susreću sa tzv. trigonometrijom trougla: trigonometrijske funkcije se definišu kao omjeri dužina stranica u pravouglom trouglu. Trigonometrija trougla omogućava da odredimo nepoznate dužine stranica ili veličine uglova, ali ako treba procijeniti vrijednost trigonometrijske funkcije za neku vrijednost varijable x, odrediti da li u nekom intervalu funkcija raste ili opada, nacrtati grafik funkcije $\sin 2x$,

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trigonometrija, radijan
Kategorizacija: Stručno-metodički rad
Rad preuzet: jun 2022

trigonometrija trougla tu ne pomaže [11]. Da bi uradili ovakve zadatke, učenici moraju trigonometrijske funkcije stvarno razumjeti kao funkcije, tj. kao jednu vrstu procesa koji za varijablu uzima ugao/broj, a kao rezultat daje neki realan broj. Međutim, tradicionalni pristup nastavi trigonometrije naglašava razumijevanje trigonometrijskih funkcija kao omjera i ne omogućuje učenicima da ih shvate kao funkcije [11]. Da je prijelaz sa razumijevanja trigonometrijskih funkcija kao omjera dužina stranica na razumijevanje trigonometrijskih funkcija kao stvarnih funkcija težak za učenike, pokazuje i istraživanje Challenger [2], u kom je zapaženo da su neki učenici razumjeli trigonometriju kada se radilo samo sa trouglovima, ali sada ne znaju „odakle da započnu“.
Za definisanje trigonometrijskih funkcija kao funkcija na skupu realnih brojeva izuzetno je bitan pojam radijana i mnogi autori smatraju da dio poteškoća u razumijevanju trigonometrije potiče upravo iz osiromašene veze između trigonometrijske kružnice i radijana sa jedne i trigonometrijskih funkcija sa druge strane. Oni smatraju da slabo razumijevanje trigonometrijske kružnice i radijana onemogućuje studentima da definišu trigonometrijske funkcije na skupu realnih brojeva.
Zašto je radijan bitan za razumijevanje trigonometrijskih funkcija? Zato što kad pokušavamo odgovoriti na gore navedena pitanja: na kojem podskupu skupa $\mathbb{R}$ funkcija $f(x) = \cos x$ raste, kako izgleda grafik funkcije $f(x) = \sin 2x$, koja je (barem približna) vrijednost funkcije $f(x) = \sin x$ za $x = 30$, odgovore tražimo u skupu realnih brojeva, tj. trigonometrijske funkcije posmatramo kao realne funkcije jedne realne varijable. To znači, da u $f(x) = \sin x$ je $x \in \mathbb{R}$ i mjeren je u radijanima. Koliko to učenici i studenti (ne) shvaćaju, pokazuje istraživanje [1], kada niko od ispitanika u istraživanju nije procijenio vrijednost $\sin 30$ kao sinus ugla od 30 radijana, iako je naglašeno da je riječ o funkciji $f(x) = \sin x$ definisanoj za $x \in \mathbb{R}$.

3. Klasični pristup pojmu radijana

Na prvi pogled, nema šta biti teško ili neshvatljivo kod radijana: u pitanju je samo još jedna mjera veličine ugla. U Bosni i Hercegovini učenici se sa radijanom obično prvi put susreću u drugom razredu srednje škole, kada se definiše radijan te daje veza između radijana i stepena. Npr. u udžbeniku Matematike za 2. razred srednjih škola [8], imamo klasični pristup uvođenju radijana.
Autor prvo ponavlja definiciju stepena, koju nije loše ponoviti jer većina učenika i studenata intuitivno zna šta je stepen, ali ga često ne znaju definisati [8, str.272]:

Definicija 3.1. *Ako punom uglu pridružimo broj* 360*, tada tristošezdesetom dijelu tog ugla odgovara broj* 1*. Na taj način smo uspostavili mjerenje uglova u stepenima.*

Ovu definiciju možemo malo preciznije napisati na sljedeći način:

Definicija 3.2. *Ako krug podijelimo na* 360 *podudarnih centralnih uglova, jedan taj ugao ima veličinu jedan stepen* (1°)*.*

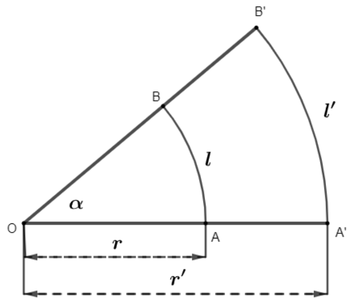
Ovakav način definisanja je bitan, jer stepen definiše preko centralnog ugla kruga, kako se definiše i radijan. Dalje je u [8] pokazano da je omjer dužine luka i poluprečnika nad istim centralnim uglom dva koncentrična kruga jednak, čime se uvodi pojam radijana, kao i njegova veza sa stepenima.
Pošto je

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}, l' = \frac{r'\pi\alpha}{180^\circ},$$

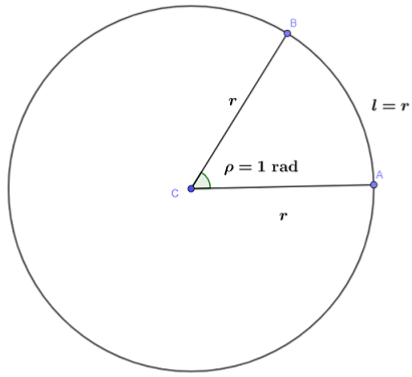
vrijedi

$$\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'} = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}.$$

Omjer $\frac{l}{r}$ nazivamo mjerom ugla α u radijanima. Očito, jedan radijan (1 rad) dobijamo kada je $\frac{l}{r} = 1$, tj. kada je $l = r$.



Slika 1: Dužine lukova i poluprečnika dva koncentrična kruga



Slika 2: Ugao veličine 1 radijan

Definicija 3.3. *Ako je dužina kružnog luka jednaka poluprečniku, tada je mjera odgovarajućeg centralnog ugla jedan radijan* (1 *rad) [8].*

Pošto je kod punog ugla dužina luka $l = 2r\pi$ (obim kruga), to je $\frac{l}{r} = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi$, odnosno puni ugao ima 2π radijana. To nam daje vezu između mjere ugla u stepenima i mjere ugla u radijanima: puni ugao ima $360°$, odnosno 2π radijana. Ako želimo ugao koji ima α stepeni mjeriti u radijanima, onda to radimo pomoću formule

$$\rho = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \,\text{rad},$$

a ako želimo ugao koji ima ρ radijana mjeriti u stepenima, koristimo formulu

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot \rho.$$

Potom [8] daje veći broj primjera gdje uglove mjerene u radijanima izražava pomoću stepeni i obratno.

4. Problemi sa razumijevanjem radijana

Iako je radijan samo još jedna mjera veličine ugla, kao što smo već napomenuli izuzetno je važan pojam za definisanje trigonometrijskih funkcija na skupu realnih brojeva. Istraživanja su pokazala da učenici i studenti ne razumiju u potpunosti pojam radijana, iako relativno lako rade zadatke u kojima je potrebno pretvarati radijane u stepene i obratno. Navest ćemo nekoliko problema koji su uočeni u razumijevanju pojma radijana.

Prvi problem: veliki broj autora uočava da pojam stepena dominira nad pojmom radijana. Npr., istraživanje opisano u [9] je rađeno sa 37 budućih nastavnika matematike i 14 nastavnika matematike, te je uočeno da kod njihovih ispitanika pojam stepena dominira nad pojmom radijana, te da niko ne zna definisati radijan. U svom istraživanju sa studentima – budućim nastavnicima matematike, Tuna [10] otkriva da 60% ispitanika zna definisati stepen, ali samo 8% njih zna definisati radijan. Autor zaključuje da studenti često znaju raditi zadatke sa radijanima, ali ne razumiju sam pojam radijana. Istraživanje sa studentima - budućim nastavnicima matematike u Zagrebu [3] je pokazalo da kod studenata stepen dominira kao mjera ugla, a kad trebaju izračunati dužinu luka ako je data mjera centralnog ugla u radijanima, studenti prvo pretvaraju radijane u stepene te koriste formulu za računanje dužine luka. Do sličnih rezultata je došlo i istraživanje [5], kada je od 63 ispitana studenta prve godine studija matematike, samo dvoje znalo tačnu definiciju radijana, a njih osam je znalo na datoj kružnici označiti (približno) ugao veličine 2 radijana. Pri tome su studenti koji su tačno odgovorili obično prvo 2 radijana pretvorili u stepene pa tek onda označili ugao. Kamber i Takači [4] su u istraživanju sa učenicima na kraju drugog i četvrtog razreda srednje škole uočile da učenici radijan obično definišu kroz njegov odnos sa stepenima. Treba napomenuti da nisu svi učenici koji su radijan definisali preko veze sa stepenom naveli tačnu vezu: neki su odgovorili da je „$1\text{rad} = 1^\circ$“, „$1\text{rad} = 180^\circ$“ ili „$1\text{rad} = \pi$“.
Drugi problem je nerazumijevanje definicije radijana. Nije problem što učenici ne znaju formu riječi za definisanje radijana, već nerazumijevanje definicije dovodi do toga da ne znaju npr. odrediti $\sin 2$ pomoću trigonometrijske kružnice (kada je riječ o $x = 2 \in \mathbb{R}$, tj. o 2 radijana). Nerazumijevanje radijana dovodi da učenici (i studenti) često ne znaju riješiti jednostavne zadatke kao što je:

Primjer 4.1. *Odrediti poluprečnik kruga, ako je poznato da centralnom uglu od* 3 *radijana odgovara kružni luk dužine* $19,5$ *cm [10].*

Učenik ili student koji zna i razumije definiciju radijana, lako će doći do zaključka da centralnom uglu od tri radijana odgovara kružni luk tri puta duži od poluprečnika, pa je sam poluprečnik dužine $19,5\text{cm} : 3 = 6,5\text{cm}$. Učenik ili student koji ne razumije definiciju će vjerovatno ugao od 3 radijana pretvoriti u stepene te koristiti formulu $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ odnosno $r = \frac{l\cdot 180^\circ}{\pi\alpha}$ - kao što su i radili neki ispitanici u istraživanju [10]. Ovo će dovesti do tačnog rezultata, ali je duže i komplikovanije rješenje.
Nepoznavanje i nerazumijevanje definicije radijana je usko povezano sa prvim problemom – učenici i studenti preferiraju raditi sa stepenima, koji su im poznati. Ovo je potpuno razumljivo, jer učenici prvo o uglovima uče u geometriji još u osnovnoj školi i tada koriste samo stepene. S druge strane, često učenici i studenti ne shvaćaju radijan kao mjeru bilo kojeg ugla ili u bilo kojoj kružnici, već interno zamišljaju da se radijan pojavljuje samo u jediničnoj (trigonometrijskoj) kružnici [7].
Treći problem: učenici i studenti često ne prepoznaju da je ugao mjeren u radijanima, ako nema „π“ u sebi. Do ovog zaključka su došle Čižmešija i Milin Šipuš [3], kad su uočile da studenti realne brojeve koji nisu oblika $q\pi, q \in \mathbb{Q}$ ne vežu za radijan, tj. ne prepoznaju kao mjeru ugla u radijanima. Slično, istraživanje [5] u zadatku određivanja ugla od 2 radijana otkriva da određeni broj studenata označava ugao od 2° ili 2π radijana – kao da je studentima nepojmljivo da ugao bude „samo“ 2 radijana. Akkoc [1] dolazi do zanimljivog otkrića da mnogi učenici i studenti imaju dvije različite predstave broja π: π je ugao u radijanima i π je iracionalan broj. Ako dobiju zadatak označavanja ugla od $3,1$ radijana, takvi učenici i studenti vjerovatno neće lako uočiti da je taj ugao veoma blizu ugla od $\pi \approx 3,14$ radijana, što je opruženi ugao.

5. Šta je rješenje?

Jedno očigledno rješenje nudi [12], gdje je predloženo da nastavnici matematike prvo ispitaju koliko učenici doista znaju i razumiju o uglovima (mjerenima u stepenima i radijanima) prije nego počnu podučavati trigonometriju. U tu svrhu potrebno je, osim klasičnih zadataka pretvaranja radijana u stepene i obratno, raditi zadatke kao što su:

Primjer 5.1. *Primjeri zadataka sa radijanima:*

- *Odrediti poluprečnik kruga, ako je poznato da centralnom uglu od* $2,5$ *radijana odgovara kružni luk dužine* 10 *dm (primjer analogan primjeru 4.1).*

- *Odrediti dužine kružnih lukova na tri koncentrične kružnice, poluprečnika* 2 *cm,* 2,5 *cm i* 2,8 *cm redom, ako je zajednički centralni ugao veličine* 0,8 *radijana.*
- *Procijeniti veličinu ugla u radijanima (uz datu sliku kruga i centralnog ugla).*

Da bi učenici naučili da uglovi u radijanima ne moraju „sadržavati" π (tj. biti oblika $r\pi$), potrebno je raditi zadatke u kojima se π ne pojavljuje.

Primjer 5.2. *Primjeri zadataka sa radijanima bez* π*:*

- *Na kružnici približno nacrtati ugao veličine* 2 *radijana.*
- *Ugao od* 5 *radijana izraziti u stepenima.*
- *Pomoću trigonometrijske kružnice procijeniti vrijednosti funkcija* $\sin 2, \cos(-3), \ldots$ *(i naglasiti da je riječ o* 2 *rad,* -3 *rad,. . .).*

Obzirom da vizuelna pomagala, pogotovo softveri sa dinamičkim prikazom, mogu olakšati razumijevanje radijana, neki autori predlažu korištenje GeoGebre i sličnih edukativnih softvera. GeoGebrina zajednica nudi već gotove uratke drugih korisnika koji omogućavaju korisniku da „omotavaju" brojnu pravu oko kružnice i tako bolje razumiju radijan (npr. https://www.geogebra.org/m/avdhvmtu) ili koji krug postepeno ispunjavaju sa uglovima od jednog, dva, tri,. . . radijana i tako omogućavaju vizuelizaciju uglova mjerenih u radijanima (npr. https://www.geogebra.org/m/anfcnazd ili https://www.geogebra.org/m/VYq5gSqU).

Literatura

[1] H. Akkoç: *Pre-service mathematics teachers' concept images of radian*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **39**, 857-878, 2008, DOI: 10.1080/00207390802054458.

[2] M. Challenger: *From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry*, doktorska disertacija, University of Warwick, UK, 2009.

[3] A. Čizmešija i Z. Milin Šipuš: *The trigonometric functions-concept images of pre-service mathematics teachers*, Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Ankara, Turska, 2013.

[4] D. Kamber i Đ. Takači: *On problematic aspects in learning trigonometry*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **49**, 161-175, 2018, DOI: 10.1080/0020739X.2017.1357846.

[5] D. Kamber Hamzić: *Analiza i rješavanje kognitivnih prepreka u nastavi trigonometrije*, doktorska disertacija, Univerzitet u Sarajevu, BiH, 2019.

[6] E. Maor: *Trigonometry*, 25.07.2022., https://www.britannica.com/science/trigonometry. [Datum pristupa: 15.09.2022.]

[7] K. C. Moore, K. R. LaForest i H. J. Kim: *Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle*, Educational Studies in Mathematics **92**, 221-241, 2015, DOI: 10.1007/s10649-015-9671-6.

[8] Š. Prgo: *Matematika za 2. razred srednjih škola*, IP Svjetlost d.d., Sarajevo, 2008.

[9] T. Topçu, M. Kertil, H. Akkoç, K. Yilmaz i O. Önder: *Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian*, Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prag, Češka Republika, 2006.

[10] A. Tuna: *A conceptual analysis of the knowledge of prospective mathematics teachers about degree and radian*, World Journal of Education **3**, 1-9, 2013, DOI: 10.5430/wje.v3n4p1.

[11] K. Weber: *Connecting Research to Teaching: Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research*, Mathematics teacher **102**, 144-150, 2008, DOI: 10.5951/MT.102.2.0144.

[12] M. Yigit Koyunkaya: *Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **47**, 1028-1047, 2016, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1155774.