EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 23 – 29

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Zlatna prava i zlatni paralelepiped (kvadar)

Alija Muminagić[a]

[a]*Penzioner, Danska*

Sažetak: U ovom članku dajemo konstrukciju zlatne prave, izvodimo njenu jednačinu i dokazujemo neke sume na više načina, primijenjujući znanja o zlatnoj pravoj. U drugom dijelu definišemo zlatni paralelepiped, dokazujemo kako se izračunava njegova površina i prostorna dijagonala i izvodimo jedan interesantan odnos između konstanti ϕ i π (zlatnog broja ϕ i broja π). Ukazujemo na vezu između zlatnog pravougaonika i zlatnog kvadra (zlatni kvadar je prostorni analogon zlatnog pravougaonika).

1. Uvod

Matematička literatura vrvi člancima o zlatnom presjeku, zlatnom trouglu, prvougaoniku, rombu, zlatnoj elipsi, zlatnoj spirali i superzlatnom pravougaoniku. Rijetko nalazimo članke o zlatnoj pravoj i zlatnom paralelepipedu (kvadru), mada je o zlatnoj pravoj pisao J. Metz u časopisu FIBONACCI QUARTERLY, augusta 1977. godine. U ovom članku i mi pišemo o zlatnoj pravoj, s nešto drugačijim pristupom, kao i o zlatnom paralelepipedu (kvadru).
Prethodno ćemo se sjetiti nekih definicija i teorema, koje će biti primijenjene nešto kasnije u ovom izlaganju.

Definicija 1.1. *Ako tačka C dijeli duž $\overline{AB}$, pri čemu je $a = |AC|$, $b = |BC|$ (Slika 1) tako da vrijedi*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, \tag{1}$$

kažemo da je ona dijeli u omjeru zlatnog presjeka (reza).

Slika 1.

Teorem 1.2. *Tačka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog presjeka ako je*

$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339\ldots \tag{2}$$

Broj ϕ se naziva *zlatni broj*. Jasno je da je

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi} = \phi^{-1} \approx 0,6180339\ldots$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: zlatni presjek, zlatna prava, zlatni paralelepiped
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: maj 21.02.2022.

Iz (1) slijedi

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

to jest

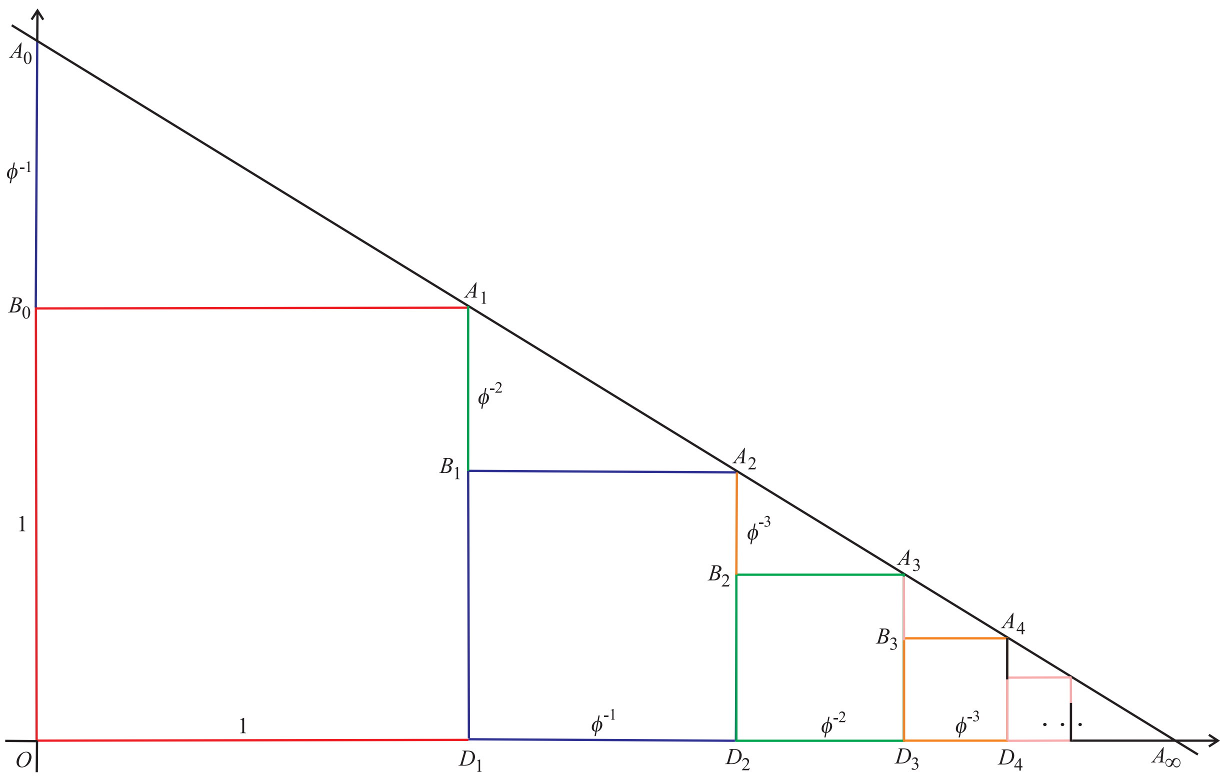
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Longleftrightarrow \phi^2 = \phi + 1 \tag{3}$$

i

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Longleftrightarrow \phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \Longleftrightarrow \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \Longleftrightarrow \phi - 1 = \phi^{-1} \Longrightarrow 1 + \phi^{-1} = \phi. \tag{4}$$

2. Zlatna prava

Posmatrajmo sada Sliku 2.



Slika 2.

U pravougli koordinatni sistem xOy konstruišimo redom kvadrate $OB_0A_1D_1$, $D_1B_1A_2D_2$, $D_2B_2A_3D_3$, ..., čije su dužine stranica redom $1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \ldots$. Konstruišimo pravu kroz tačke A_1 i A_2 i presječne tačke te prave s osama Ox i Oy i označimo sa A_∞ i A_0, respektivno. Sada lako dobijemo da prava kroz tačke $A_1(1,1)$ i $A_2(1+\phi^{-1}, \phi^{-1})$ ima jednačinu

$$y - 1 = \frac{\phi^{-1} - 1}{1 + \phi^{-1} - 1}(x-1) \Longleftrightarrow y - 1 = \frac{\phi^{-1} - 1}{\phi^{-1}}(x-1)$$

$$\Longleftrightarrow y - 1 = (1-\phi)(x-1) \Longleftrightarrow y - 1 = -(\phi - 1)x - 1 + \phi$$

$$(\text{zbog } (4), \text{ to jest } \phi - 1 = \phi^{-1} \Longleftrightarrow -(\phi - 1) = -\phi^{-1})$$

$$\Longleftrightarrow y = -\phi^{-1}x + \phi. \tag{5}$$

Jednačina (5) je ***jednačina zlatne prave***.

Uočimo da tačka A_k ima koordinate $(1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \cdots + \phi^{-k}, \phi^{-k}) = (\frac{1-\phi^{-k-1}}{1-\phi^{-1}}, \phi^{-k}), k = 1, 2, ...,$ odakle slijedi, koristeći jednakost (4), da je i $A_\infty = (\frac{1}{1-\phi^{-1}}, 0) = (\frac{\phi}{\phi-1}, 0) = (\phi^2, 0)$. Nije se teško uvjeriti da i tačke A_3, A_4, A_5, $\ldots$ leže na zlatnoj pravoj. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} y &= (1-\phi)\left(\frac{1-\phi^{-k-1}}{1-\phi^{-1}}\right) + \phi = (1-\phi)\frac{1-\phi^{-k-1}}{\frac{\phi-1}{\phi}} + \phi \\ &= -\phi(1 - \phi^{-k-1} + \phi) = -\phi + \phi^{-k} + \phi = \phi^{-k}, \end{aligned}$$

za $k = 3, 4, 5, ...,$ a da tačke A_0 i A_∞ imaju koordinte $A_0(0, \phi)$ i $A_\infty(\phi^2, 0)$ (jer je $y = -\phi^{-1} \cdot 0 + \phi = \phi$ i $0 = -\phi^{-1} \cdot x + \phi \Longleftrightarrow x = \frac{\phi}{\phi^{-1}} = \frac{\phi}{\frac{1}{\phi}} = \phi^2$).

Sa Slike 2. vidimo da je

$$|OA_\infty| = |OD_1| + |D_1D_2| + |D_2D_3| + |D_3D_4| + \cdots = 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \cdots = \phi^2. \tag{6}$$

Dokažimo (6) i na ovaj način. Neka je

$$S = 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \cdots \tag{7}$$

Nakon množenja sa ϕ^{-1} dobijamo:

$$\phi^{-1} \cdot S = \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \cdots \tag{8}$$

i nakon oduzimanja (7) i (8) slijedi

$$S(1 - \phi^{-1}) = 1 \Longleftrightarrow S = \frac{1}{1 - \phi^{-1}} \Longleftrightarrow S = \frac{\phi}{\phi - 1} \Longleftrightarrow S \overset{(4)}{=} \frac{\phi}{\phi^{-1}} \Longleftrightarrow S = \phi^2.$$

Pokažimo sada zašto se prava čija je jednačina (5) s pravom naziva zlatnom pravom.

Imamo (v. Sliku 2) da je $|OA_0| = |OB_0| + |B_0A_0|$, to jest

$$\phi = 1 + |B_0A_0| \Longleftrightarrow |B_0A_0| = \phi - 1 \Longleftrightarrow (\text{zbog } 4)\ |B_0A_0| = \phi^{-1}. \tag{9}$$

Sada je $\frac{|OA_0|}{|OB_0|} = \frac{\phi}{1} = \phi$, što znači da tačka B_0 dijeli duž $\overline{OA_0}$ u omjeru zlatnog presjeka. Takođe je $\frac{|D_1A_1|}{|D_1B_1|} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$, $\frac{|D_2A_2|}{|D_2B_2|} = \frac{\phi^{-1}}{\phi^{-2}} = \phi, \ldots$ pa zaključujemo da tačka B_i dijeli duž $\overline{D_iA_i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ u omjeru zlatnog presjeka.

Do istog zaključka možemo doći i a sljedeći način.

Svi pravougli trouglovi $\triangle A_iB_iA_{i+1},\ i = 0, 1, 2, \ldots$ su slični i $\frac{|B_0A_1|}{|B_1A_2|} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$. Dobijamo, zbog (9), da je

$$\frac{|A_0B_0|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_0A_1|}{|B_1A_2|} \Longleftrightarrow \frac{\phi^{-1}}{|A_1B_1|} = \phi \Longleftrightarrow |A_1B_1| = \frac{\phi^{-1}}{\phi} \Longleftrightarrow |A_1B_1| = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}$$

i slično

$$|A_2B_2| = \phi^{-3},\ |A_3B_3| = \phi^{-4}, \ldots\ .$$

Dakle, $\phi^{-i},\ i = 1, 2, \ldots$ su dužine kateta trougla normalnih na Ox-osu, pa odavde vidimo da tačka B_i dijeli duž $\overline{D_iA_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ u omjeru zlatnog presjeka.

Čitaocima prepuštamo da dokažu da tačke $A_1, A_2, A_3 \ldots$ dijele dužine $A_0A_2, A_1A_3, A_2A_4, \ldots$ u omjeru zlatnog presjeka.

Posmatrajmo sada opet Sliku 2. Vidimo da je

$$
\begin{aligned}
&|A_0B_0| + |A_1B_1| + |A_2B_2| + |A_3B_3| + \cdots = |OA_0|, \quad \text{to jest}\\
&\phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \cdots = \phi \iff (\text{zbog (3) } \phi^2 = \phi + 1 \iff \phi = \phi^2 - 1)\\
&\iff \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \ldots = \phi^2 - 1 \iff 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \ldots = \phi^2
\end{aligned}
$$

i to je geometrijski dokaz za formulu (6). Označim sa $[XYZ]$ i $[PQRS]$ površine trougla $\triangle XYZ$ i kvadrata $\square PQRS$. Imamo da je (Slika 2)

$$
\left.
\begin{aligned}
&[A_0B_0A_1] = \frac{1}{2}|A_0B_0| \cdot |B_0A_1| = \frac{1}{2}\phi^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{2}\phi^{-1}\\
&[A_1B_1A_2] = \frac{1}{2}|A_1B_1| \cdot |B_1A_2| = \frac{1}{2}\phi^{-2} \cdot \phi^{-1} = \frac{1}{2}\phi^{-3}\\
&[A_2B_2A_3] = \frac{1}{2}|A_2B_2| \cdot |B_2A_3| = \frac{1}{2}\phi^{-3} \cdot \phi^{-3} = \frac{1}{2}\phi^{-5}\\
&\vdots
\end{aligned}
\right\} \tag{10}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&[OB_0A_1D_1] = 1 = \phi^0\\
&[D_1B_1A_2D_2] = (\phi^{-1})^2 = \phi^{-2}\\
&[D_2B_2A_3D_3] = (\phi^{-2})^2 = \phi^{-4}\\
&\vdots
\end{aligned}
\right\} \tag{11}
$$

Koristeći opet Sliku 2 i formule (10) i (11) možemo dokazati da je

$$1 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \cdots = \phi. \tag{12}$$

Formulom (12) predstavljen je zbir površina kvadrata, čije su dužine stranica $1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \ldots$ i taj zbir jednak je razlici između površine trougla $\triangle A_0OA_\infty$ i zbira površina trouglova $\triangle A_iB_iA_{i+1}$ $i = 0, 1, 2, 3 \ldots$. Prema tome,

$$1 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \cdots = [A_0OA_\infty] - \sum[A_iB_iA_{i+1}].$$

Kako je površina $\triangle A_0OA_\infty$

$$\triangle[A_0OA_\infty] = \frac{1}{2}A_0O \cdot OA_\infty = \frac{1}{2}(1 + \phi^{-1}) \cdot \phi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\phi+1}{\phi}\right) \cdot \phi^2 = \frac{1}{2}\phi(\phi + 1),$$

imamo da je

$$
\begin{aligned}
&1+\phi^{-2}+\phi^{-4}+\phi^{-6}+\cdots = \frac{1}{2}\phi(\phi+1) - \frac{1}{2}(\phi^{-1}+\phi^{-3}+\phi^{-5}+\cdots)\\
&\iff 2 + 2 \cdot \phi^{-2} + 2 \cdot \phi^{-4} + \cdot 2\phi^{-6} + \cdots = \phi^2 + \phi - \phi^{-1} - \phi^{-3} - \phi^{-5} - \cdots\\
&\iff (\text{zbog } \phi^2 \overset{(6)}{=} 1+\phi^{-1}+\phi^{-2}+\phi^{-3}+\phi^{-4}+\cdots)\\
&\iff 2+2 \cdot \phi^{-2}+2 \cdot \phi^{-4}+\cdot 2\phi^{-6}+\cdots = 1+\phi^{-1}+\phi^{-2}+\phi^{-3}+\phi^{-4}+\phi^{-5}+\phi-\phi^{-1}-\phi^{-3}-\phi^{-5}-\cdots\\
&\iff 1+\phi^{-2}+\phi^{-4}+\phi^{-6}+\cdots = \phi.
\end{aligned}
$$

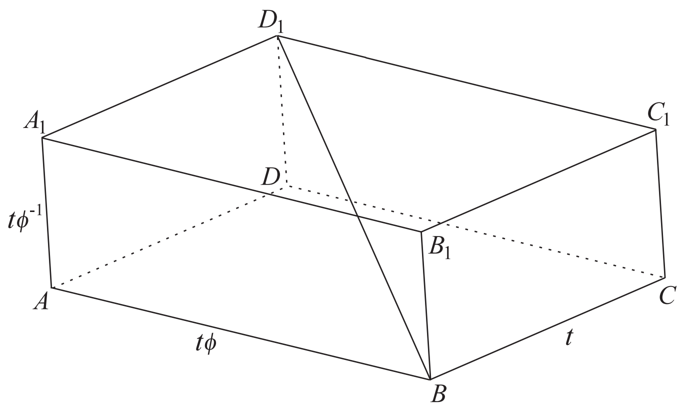
3. Zlatni paralelepiped (kvadar)

Paralelepiped je četvorostrana prizma kojoj je baza paralelogram.

Definicija 3.1. *Pravougli paralelepied (kvadar) čije se dužine ivica odnose kao*

$$\phi : 1 : \phi^{-1}$$

naziva se ***zlatnim paralelepipedom****.*

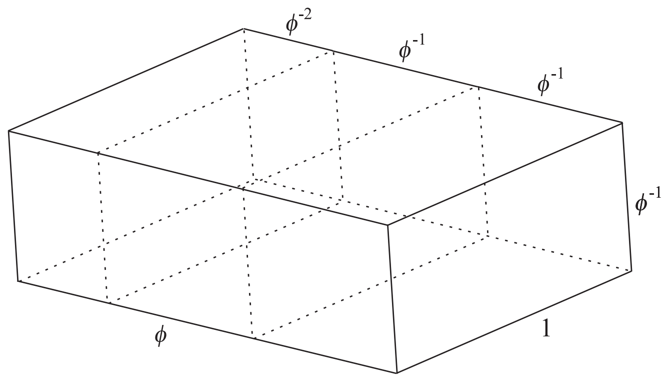


Slika 3.

Na Slici 3 prikazan je zlatni kvadar čije su dužine ivica t, $t\phi$ i $t\phi^{-1}$, t je realan broj. Tako je:

$$\frac{t\phi}{t} = \phi \text{ i } \frac{t}{t\phi^{-1}} = \phi.$$

Na osnovu definicije zlatnog pravougaonika (*pravougaonik u kome je odnos između dužina duže i kraće stranice jednak ϕ se naziva zlatnim pravougaonikom*) vidimo da su pravougaonici $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ i ADD_1A, BCC_1B_1 zlatni, a pravougaonici ABB_1A_1 i DCC_1D_1 nisu (jer je $\frac{t\phi}{t\phi^{-1}} = \phi^2$).
(Napomena: pakovanja putera od $500g$, brašna od $2kg$ i nekih sokova su zlatni kvadri.)
Posmatrajmo sada zlatni kvadar na Slici 4. Uočimo da je



Slika 4.

$$\phi^{-1} + \phi^{-1} + \phi^{-2} = 2\phi^{-1} + \phi^{-2} = \frac{2}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = \frac{2\phi + 1}{\phi^2} = \frac{\phi^3}{\phi^2} = \phi,$$

a zbog

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Longleftrightarrow \phi^2 = \phi + 1$$

je

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1.$$

Zapremina kvadra na Slici 3 jednaka je

$$V = t\phi \cdot t \cdot t \cdot \phi^{-1} = t^3 \cdot \phi \cdot \frac{1}{\phi} = t^3.$$

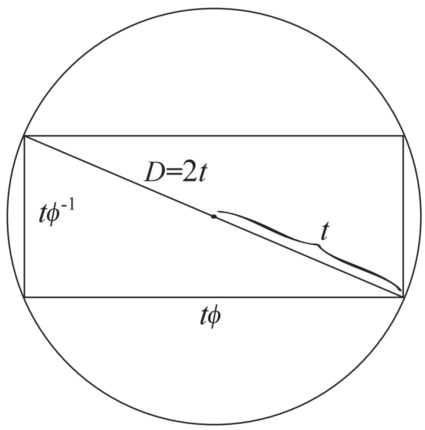
Dakle, za $t = 1$ je $V = 1$, a površina mu je

$$\begin{aligned} P_K &= 2 \cdot t \cdot \phi \cdot t + 2 \cdot t\phi \cdot t\phi^{-1} + 2t\phi^{-1} \cdot t = 2t^2(\phi + 1 + \phi^{-1}) \\ &= 2t^2 \left(\phi + 1 + \frac{1}{\phi}\right) = 2t^2 \left(\phi + \frac{\phi + 1}{\phi}\right) = (\text{zbog } \phi + 1 = \phi^2) \\ &= 2t^2 \left(\phi + \frac{\phi^2}{\phi}\right) = 2t^2 \cdot 2\phi = 4t^2\phi, \quad \text{za } t = 1 \text{ je } P = 4t^2. \end{aligned}$$

Prostorna dijagonala zlatnog kvadra je (v Sliku 3)

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(t\phi)^2 + (t\phi^{-1})^2 + t^2} = t\sqrt{\phi^2 + \phi^{-2} + 1} = \left(\text{zbog } \phi^{-2} = (\phi^2)^{-1} = \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi + 1}\right) \\ &= t\sqrt{\phi^2 + \frac{1}{\phi + 1} + 1} = t\sqrt{\phi^2 + \frac{\phi + 2}{\phi + 1}} = t\sqrt{\frac{\phi^3 + \phi^2 + \phi + 2}{\phi + 1}} \quad \left(\text{zbog } \begin{matrix} \phi^3 = 2\phi + 1 \\ \phi^2 = \phi + 1 \end{matrix}\right) \\ &= t\sqrt{\frac{2\phi + 1 + \phi + 1 + \phi + 2}{\phi + 1}} = t\sqrt{\frac{4(\phi + 1)}{\phi + 1}} = 2t. \end{aligned}$$

Specijalno, za $t = 1$, je $D = 2$.
Neka je sada oko zlatnog kvadra opisana lopta (vidi presjek na Slici 5).



Slika 5.

Znači, lopta ima poluprečnik t. Površina lopte je

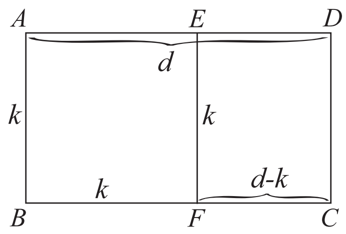
$$P_L = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot t^2.$$

Prema tome, dobijamo da je odnos između površine zlatnog kvadra i površine lopte opisane oko tog kvadra jednak

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{4t^2\phi}{4\pi t^2} = \frac{\phi}{\pi} \quad \text{(interesantan odnos između konstanti } \phi \text{ i } \pi\text{).}$$

Podsjetimo se sljedeće činjenice.

Teorem 3.2. *Ako iz zlatnog prevougaonika uklonimo kvadrat s najvećom mogućom površinom, onda je preostali pravougaonik takođe zlatni.*



Slika 6.

Dokaz: Neka je $ABCD$ zlatni pravougaonik i neka je duža stranica dužine $|AD| = d$ i kraća stranica dužine $|AB| = k$. Na Slici 6 je $ABFE$ kvadrat s najvećom mogućom površinom. Dokazaćemo da je $EFCD$ zlatni pravougaonik, to jest da vrijedi

$$\frac{k}{d-k} = \phi.$$

Iz definicije zlatnog pravougaonika slijedi da je

$$\frac{d}{k} = \phi \Longleftrightarrow \frac{d}{k} - 1 = \phi - 1 \Longleftrightarrow \left(\text{zbog } \phi - 1 = \frac{1}{\phi}\right) \Longleftrightarrow \frac{d-k}{k} = \frac{1}{\phi}, \text{ tj. } \frac{k}{d-k} = \phi,$$

što je i trebalo dokazati. $\square$
Šta vrijedi za zlatni kvadar? (v. Sliku 4.)
Ako iz zlatnog kvadra na Slici 4 uklonimo dva kvadra čije su dužine stranica ϕ^{-1}, $\phi-1$ i 1, onda preostali kvadar ima dužine ivica 1, ϕ^{-1} i $\phi - 2\phi^{-1} = \phi^{-2}$ $\left(\phi - 2\phi^{-1} = \phi - \frac{2}{\phi} = \frac{\phi^2-2}{\phi} = \frac{\phi+1-2}{\phi} = \frac{\phi-1}{\phi} = (\text{zbog } \phi - 1 = \phi^{-1}) = \frac{\phi^{-1}}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}\right)$.
Dakle, odnos ivica u preostalom kvadru je $1 : \phi^{-1} : \phi^{-2}$ i odavde nakon množenja sa ϕ slijedi $\phi : 1 : \phi^{-1}$ te zaključujemo da je preostali kvadar takođe zlatni.

Literatura

[1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Super zlatni pravokutnik*, Miš br. 89 /godina 18/ trvavanj 2017.
[2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Zlatna elipsa*, Matematičko-fizički list, LXVIX 1 (2018-2019).
[3] J. Frandsen: *De(t) gyldne snit*, Systime, 1999 (2 udgnve).
[4] M. Katić Žlepalo, B. Kovačić: *O zlatnom trokutu*, HMD, math.e br. 30.
[5] B. Kovačić, M. Katić: *O zlatnom rombu*, HMD, math.e br. 35.
[6] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.