EVOLVENTA (JAMTK) 5(1) (2022), 30–38

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Približna trisekcija ugla

Hasan Smajić[a]

[a]*JU OŠ "Malešići", Malešići*

Sažetak: U ovome radu su prezentirane dvije konstrukcije približne trisekcije ugla od 60°, inspirisane Arhimedovom konstrukcijom. Također je pokazano da su obje konstrukcije izvedene s veoma malom pogreškom.

1. Uvod

Starogrčka Platonova akademija postavila je pitanje trisekcije ugla (podijeliti ugao na tri jednaka dijela) pomoću šestara i nebaždarenog lenjira (služi samo za povlačenje linije-spajanje dvije tačke) koje je dugo vremena zadavalo glavobolje matematičarima. Napokon došlo se do zaključka da se euklidskim konstrukcijama ne može riješiti trisekcija svakog ugla (moguće su trisekcije uglova $\alpha_n = \frac{360^\circ}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}_\circ$). U ovome radu pokazaćemo približnu konstrukciju trisekcije ugla od 60° pomoću šestara i dva nebaždarena trougla. No prije toga ćemo pokazati da je tu konstrukciju nemoguće izvesti samo pomoću šestara i nebaždarenog lenjira. Za to nam je neophodan sljedeći teorem o kubnoj jednadžbi (koji navodimo bez dokaza, v. [3]).

Teorem 1.1. *Ako su koeficijenti kubne jednadžbe*

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

racionalni brojevi i nijedno rješenje jednadžbe (1) nije racionalno, tada su sva ta rješenja nekonstruktibilni brojevi.

Kako je

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\end{aligned}$$

uzimajući da je $\theta = 60^\circ$, dobijamo

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}.$$

Neka je $x = \cos\frac{\theta}{3}$, te kako je $\cos\theta = \frac{1}{2}$, to onda dobijemo kubnu jednadžbu

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trisekcija ugla, Arhimedova konsrtrukcija
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: 30.09.2022.

Uvodeći smjenu $u = 2x$, posljednja jednadžba poprima oblik

$$u^3 - 3u - 1 = 0. \tag{2}$$

Vidimo da je (2) kubna jednadžba s racionalnim koeficijentima. Pretpostavimo da je u racionalan broj, to jest da je $u = \frac{r}{s}$, pri čemu je $r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N},\ (r, s) = 1$. Tada iz jednadžbe (2) dobijamo kubnu jednadžbu

$$r^3 - 3rs^2 - s^3 = 0,$$

iz koje onda slijedi

$$r(r^2 - 3s^2) = s^3 \Longrightarrow r|s^3 \Longrightarrow r|s \overset{(r,s)=1}{\Longrightarrow} r \in \{-1, 1\},$$

kao i

$$r^3 = s(3rs + s^2) \Rightarrow s|r^3 \Longrightarrow s|r \overset{(r,s)=1, s\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} s = 1.$$

Dakle, možemo zaključiti da je $u = \frac{r}{s} \in \{-1, 1\}$. Provjerimo sada jesu li $u = 1$ i/ili $u = -1$ rješenja jednadžbe (2).

i) $u = -1$

$$(-1)^3 - 3(-1) - 1 = -1 + 3 - 1 = 1 \neq 0,$$

to jest $u = -1$ nije rješenje jednadžbe (2).

ii) $u = 1$

$$1^3 - 3 \cdot 1 - 1 = 1 - 3 - 1 = -3 \neq 0,$$

to jest $u = 1$ nije rješenje jednadžbe (2).

Budući da niti jedno rješenje jednadžbe (2) nije racionalno, možemo zaključiti da su sva rješenja nekonstruktibilni brojevi pa i $2x$, odnosno, $x = \cos\frac{\theta}{3}$ je nekonstrukitibilan broj. Dakle, trisekcija posmatranog ugla od 60° nije moguća.

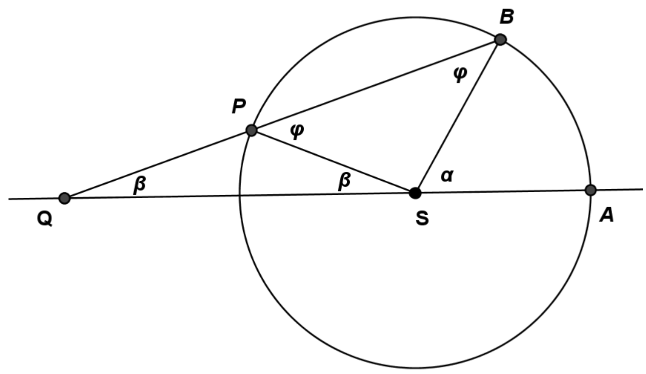
2. Arhimedova konstrukcija - trisekcija ugla pomoću trake papira

Poznato je da se problem trisekcije ugla ipak može riješiti, ali uz upotrebu nekih pomagala. U arapskom djelu "Knjiga lema", koja se pripisuje Arhimedu, opisana je konstrukcija trisekcije ugla uz pomoć šestara, ravnala i trake, [1].

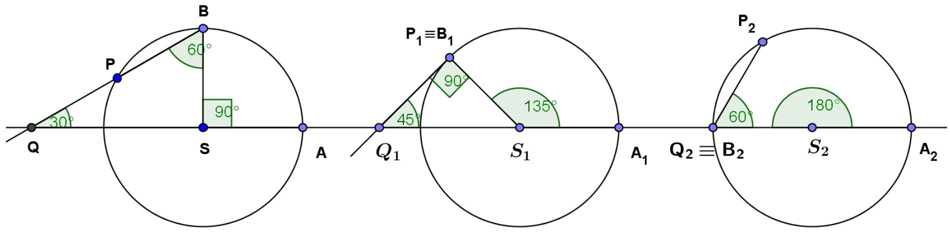
Neka je tačka S tjeme ugla $\alpha = \measuredangle ASB$. Šta je trećina tog ugla? Opišimo kružnicu poluprečnika r sa centrom u tački S. Tačke presjeka te kružnice i krakova ugla α označimo sa A i B. Nanesimo na rub trake papira tačke Q i P tako da je $|QP| = r$. Položimo tu traku papira na ravan crteža tako da joj tačka Q bude u pravcu SA i rub stalno prolazi tačkom B sve dok tačka P ne padne na kružnicu. Pomjeranjem trake tačka Q stalno ostaje na pravcu SA. Tvrdimo da je tada ugao $\beta = \measuredangle PQS = \frac{1}{3}\alpha$. Vidjeti Sliku 1.

Zaista, trouglovi $\triangle BPS$ i $\triangle QSP$ su jednakokraki pa je $\measuredangle PBS = \measuredangle BPS = \varphi$ i $\measuredangle PQS = \measuredangle PSQ = \beta$. Ugao $\varphi = BPS$ je vanjski ugao trougla $\triangle PQS$ pa je $\varphi = \beta + \beta = 2\beta$, a ugao $\alpha = \measuredangle ASB$ je vanjski za trougao $\triangle BSQ$ pa je $\alpha = \beta + \varphi$. Zamjenom $\varphi = 2\beta$ u posljednjoj jednakosti dobijamo da je $\alpha = 3\beta$, odnosno vrijedi $\beta = \measuredangle PQS = \frac{1}{3}\alpha$ što je i trebalo dokazati.

Na Slici 2 pokazana je trisekcija uglova 90°, 135° i 180° na Arhimedov način. U ovom radu koristit ćemo ih za približnu konstrukciju nekih uglova.



Slika 1: Arhimedova konstrukcija trisekcije ugla α



Slika 2: Arhimedova konstrukcija trisekcije uglova 90°, 135° i 180°

3. Trisekcije uglova 27°, 36°, 54°, 72°, 81° i 108°.

Izračunajmo trigonometrijske vrijednosti ugla 36°. Posmatrajmo jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je ugao nad osnovicom 36° i povucimo simetralu ugla $\measuredangle BAC = 72°$ (v. Sliku 3).

Sada je ugao $\measuredangle BDA = 180° - (36° + 72°) = 72°$. Trouglovi $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ su jednakokraki pa je $|AD| = |CD| = a$. Kako simetrala ugla dijeli suprotnu stranicu u omjeru u kome se odnose stranice koje obrazuju taj ugao vrijedi:

$$a : (b-a) = b : a \iff a^2 = b^2 - ab \iff a^2 + ab - b^2 = 0 \iff a_{\pm} = \frac{-b \pm b\sqrt{5}}{2}.$$

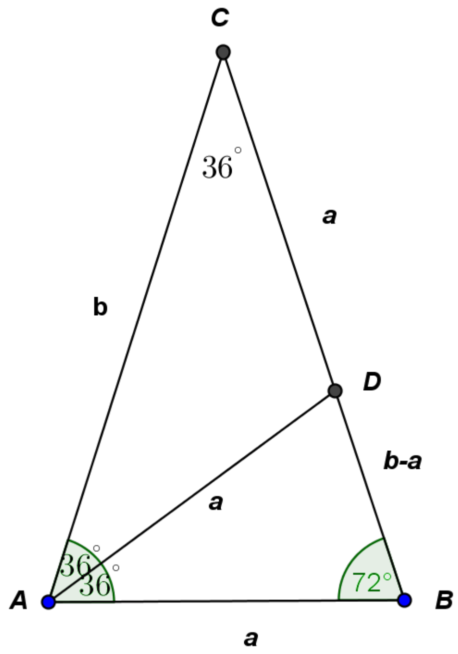
Budući da je $a_- = \frac{(-1-\sqrt{5})b}{2} < 0$, to je $a = a_+ = \frac{(-1+\sqrt{5})b}{2}$. Za $b = 1$ (jedinica mjere) dobijamo da je $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Primjenom kosinusnog teorema na trougao $\triangle ABC$, dobije se

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos 36° \iff \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos 36°$$

$$\iff \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 2 - 2\cos 36° \iff 3 - \sqrt{5} = 4 - 4\cos 36° \iff 4\cos 36° = \sqrt{5} + 1,$$

odnosno

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$



Slika 3: Trigonometrijske vrijednosti ugla 36°

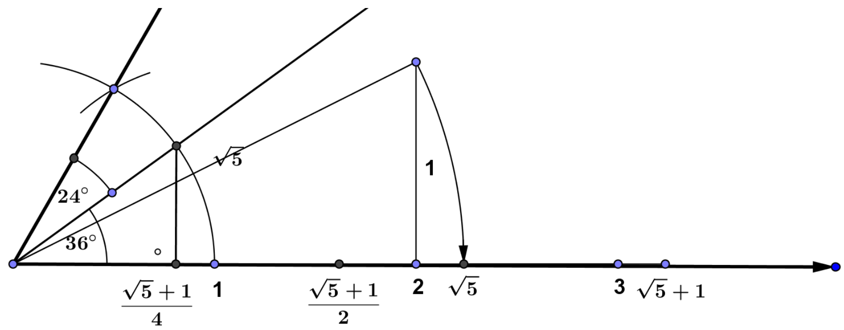
Sada je

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Koristeći Sliku 4 daćemo kratku uputu kako uraditi trisekciju uglova 27°, 36°, 54°, 72°, 81° i 108°. To slijedi iz jednakosti

$$\frac{1}{3}27^\circ = 9^\circ = \frac{1}{4}36^\circ, \qquad \frac{1}{3}36^\circ = 12^\circ = \frac{1}{2}24^\circ, \qquad \frac{1}{3}54^\circ = 18^\circ = \frac{1}{2}36^\circ,$$

$$\frac{1}{3}72^\circ = 24^\circ, \qquad \frac{1}{3}81^\circ = 27^\circ = \frac{3}{4}36^\circ, \qquad \frac{1}{3}108^\circ = 36^\circ.$$



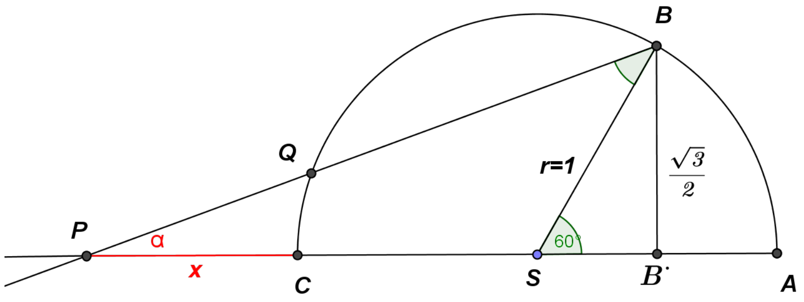
Slika 4: Konstrukcija uglova 36° i 24°

U nastavku data je tabela trigonometrijskih vrijednosti nekih značajnih uglova koja može pomoći kod trisekcije nekih uglova uz napomenu da neke vrijednosti mogu imati i drugu formu, [2].

Ugao α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$ctg\alpha$
$0°$	0	1	0	$\pm\infty$
$9°$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5-\sqrt{5-\sqrt5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5+\sqrt{5-\sqrt5}}}{4}$	$\sqrt5+1-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\sqrt5+1+\sqrt{5+2\sqrt5}$
$15°$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$2-\sqrt3$	$2+\sqrt3$
$18°$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{8}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$
$22.5°$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2-1$	$\sqrt2+1$
$30°$	$\frac12$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\sqrt3$
$36°$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{8}$
$37.5°$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt6+\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt6-\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{15-6\sqrt6-8\sqrt3+10\sqrt2}$ $=\sqrt6+\sqrt3-\sqrt2-2$	$\sqrt{15+6\sqrt6-8\sqrt3-10\sqrt2}$ $=2+2\sqrt6-\sqrt3-3\sqrt2$
$45°$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	1	1
$52.5°$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt6-\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt6+\sqrt2}{8}}$	$\sqrt{15+6\sqrt6-8\sqrt3-10\sqrt2}$ $=2+2\sqrt6-\sqrt3-3\sqrt2$	$\sqrt{15-6\sqrt6-8\sqrt3+10\sqrt2}$ $=\sqrt6+\sqrt3-\sqrt2-2$
$54°$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{8}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$
$60°$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac12$	$\sqrt3$	$\frac{\sqrt3}{3}$
$67.5°$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2+1$	$\sqrt2-1$
$72°$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{8}$
$75°$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$2+\sqrt3$	$2-\sqrt3$
$81°$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5+\sqrt{5-\sqrt5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5-\sqrt{5-\sqrt5}}}{4}$	$\sqrt5+1+\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\sqrt5+1-\sqrt{5+2\sqrt5}$
$90°$	1	0	$\pm\infty$	0

4. Približna trisekcija ugla od 60°.

Neka je riješena približna trisekcija ugla od $60°$ kao na Slici 5. Tada je $\alpha \approx 20°$.



Slika 5: Približna trisekcija ugla od 60°

Odredimo koliko je približno udaljena tačka P od tačke C. Označimo sa x traženu udaljenost. Sa Slike 5 očito je

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac32 + x} = \frac{\sqrt3}{2x+3}, \qquad \text{te je} \qquad 2x+3 = \frac{\sqrt3}{\tan\alpha}.$$

Odavde je

$$x = \frac{\sqrt{3} - 3\tan\alpha}{2\tan\alpha},$$

pa koristeći da je $\tan\alpha \approx \tan 20^\circ \approx 0.3639702342662$ (prema savremenim trigonometrijskim mjerenjima) dobijamo

$$x \approx \frac{\sqrt{3} - 3\,(0.3639702342662)}{2\,(0.3639702342662)} \approx 0.879\,38524157182... \;.$$

Uzmimo sada da je $x \approx 0.88 = \frac{88}{100} = \frac{22}{25}$ i izračunajmo pogrešku. Dakle, ako je $x = 0.88$ tada je

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 0.88 + 3} \approx 0.3638762200775,$$

te je

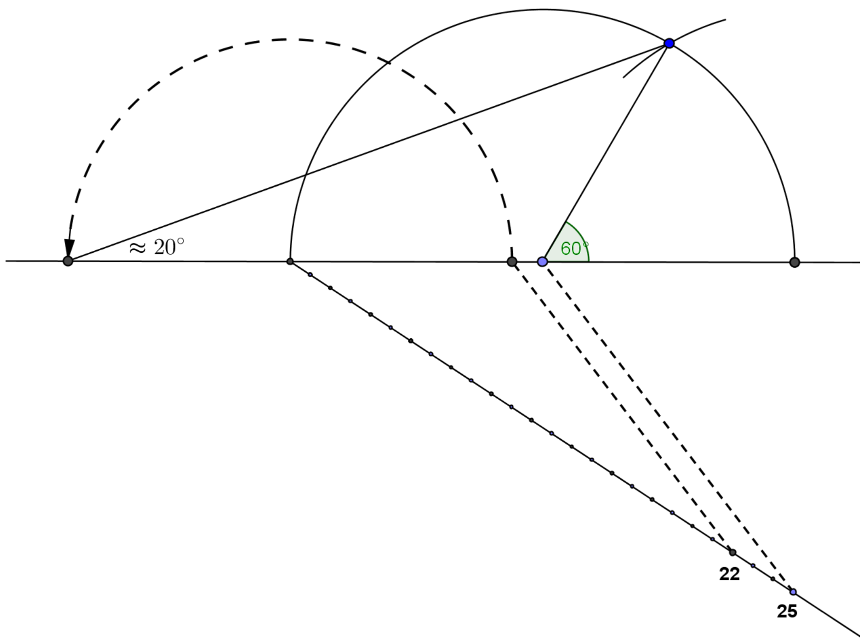
$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.3638762200775) = 19.9952433544587^\circ \approx 19.995^\circ.$$

Može se reći da je pogreška približno

$$-\left(\frac{5}{1000}\right)^\circ - \frac{5}{1000} \cdot 3600'' = -18''$$

(u sekundama) ili u procentima 0.025% (iz jednakosti $19.995^\circ = 20^\circ \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ dobijamo da je $p = 0.025\%$).

Na Slici 6 prikazana je konstrukcija ugla od 20° sa pogreškom $p = 0.025\%$.

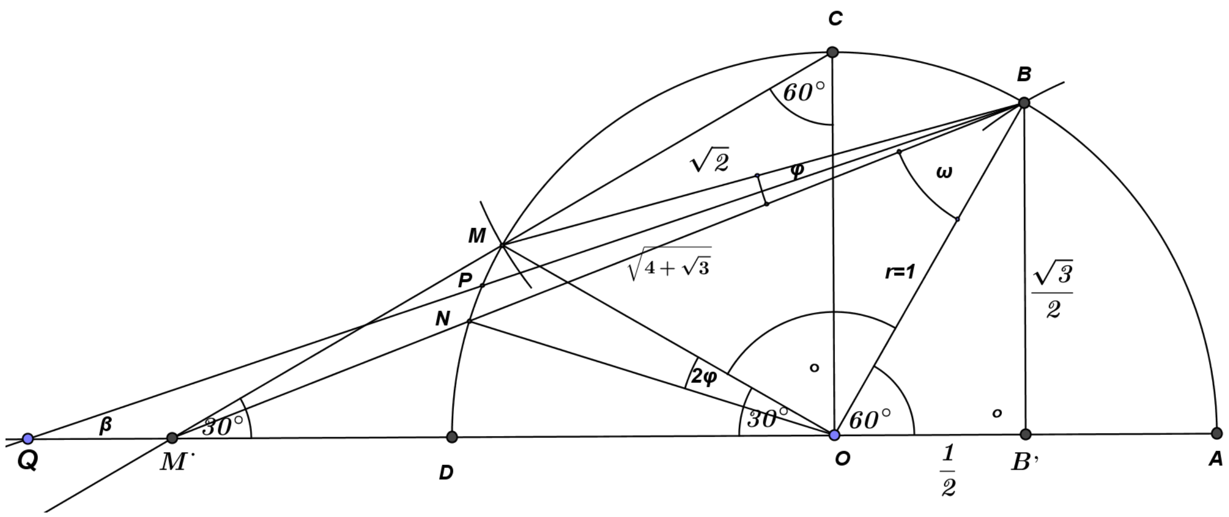


Slika 6: Konstrukcija ugla od 20° sa greškom od 0.025%.

5. Približna trisekcija ugla od 60° pomoću trisekcije ugla 90°.

Pretpostavimo da je riješena približna trisekcija ugla od 60° pomoću trisekcije ugla 90°.

Neka je $r = 1$ poluprečnik polukružnice sa centrom u O, $\overline{AD}$ prečnik i $\measuredangle AOB = 60°$ čiju približnu trisekciju na Arhimedov način treba odrediti. Neka je $\beta = \measuredangle OQB$ trisekcija ugla 60° ($\beta \approx 20°$). Vidjeti Sliku 7. Tačke M i M' dobijemo konstrukcijom trisekcije ugla od 90° Arhimedovom metodom. Tačka B' je presjek normale povučene iz tačke B na poluprečnik OA. Jasno je da je $|BB'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ visina, a $|OB| = \frac{1}{2}$ (polovina osnovice jednakostraničnog trougla $\triangle AOB$).



Slika 7: Približna trisekcija ugla od 60°pomoću trisekcije ugla 90°.

Pokazat ćemo da je $|QM'| \approx 0.68 \cdot |M'N| = \frac{17}{25}\,|M'N|$.

Pravougli trougao $\triangle OM'C$ je specijalan pa je $|OM'| = \sqrt{3}$. Primjenom Pitagorinog teorema na pravougli trougao $\triangle BB'M'$ dobijamo

$$|BM'| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{12 + 4\sqrt{3} + 1}{4}} = \sqrt{4 + \sqrt{3}}.$$

Pravougli trougao $\triangle OBM$ je jednakokraki pa je $\measuredangle OBM = 45°$. Želimo pronaći vezu između dužina tetive $\overline{MN}$ i duži $\overline{QM}$. Ugao $\varphi = \measuredangle MBN$ je periferijski ugao nad tetivom $\overline{MN}$ pa je $2\varphi = \measuredangle MON$ njen centralni ugao. Ako primijenimo kosinusnu teoremu na trougao $\triangle BB'M'$, tada dobijamo

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 - 2\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \cos\omega,$$

odnosno

$$3 = 4 + \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot \cos\omega.$$

Dakle,

$$\cos\omega = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}} \approx 0.779403831,$$

te je

$$\omega \approx 38.7939769^\circ.$$

Sada je

$$\varphi = 45^\circ - \omega \approx 45^\circ - 38.7939769^\circ = 6.206023095^\circ.$$

Koristeći da je $2\varphi \approx 12.41204619^\circ$ primjenom kosinusne teoreme na trougao $\triangle MNO$ dobijamo

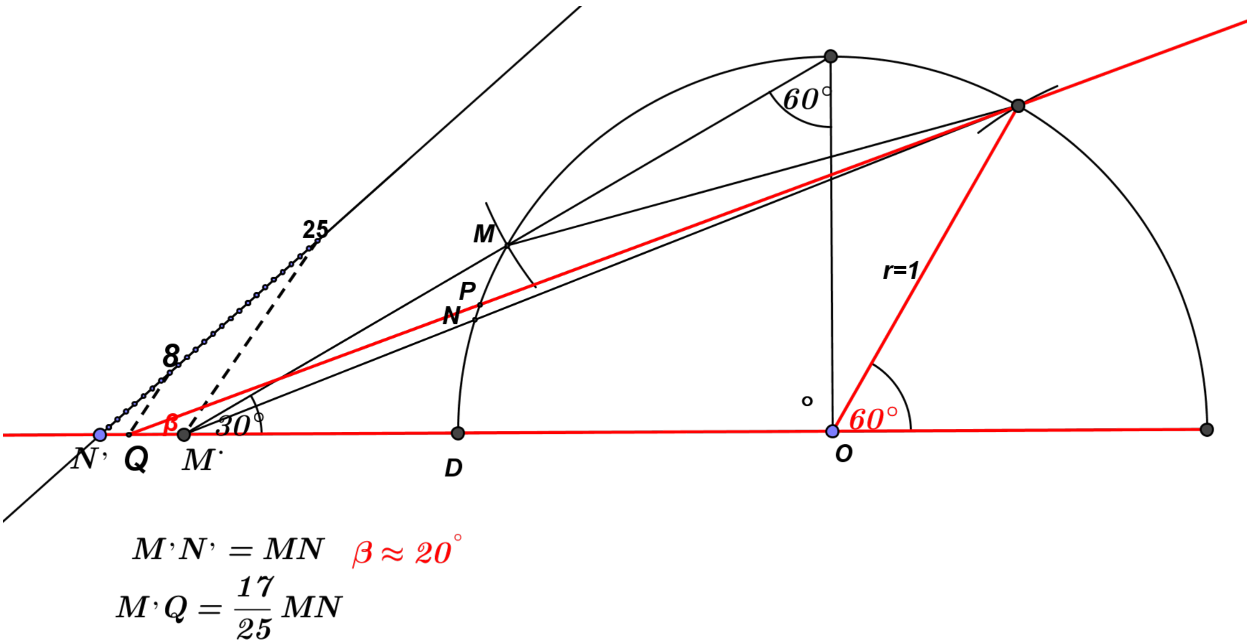
$$\left|\overline{MN}\right| \approx \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(12.41204619^\circ\right)} \approx 0.216207726.$$

Neka je $\left|\overline{QM}\right| = k \cdot \left|\overline{MN}\right|$. Iz pravouglog trougla $\triangle BB'Q$ je

$$\tan\beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \sqrt{3} + k \cdot \left|\overline{MN}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3} + 2k \cdot \left|\overline{MN}\right|}, \tag{3}$$

pa je

$$k = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\tan\beta} - 1 - 2\sqrt{3}}{2\left|\overline{MN}\right|}.$$



Slika 8: Konstrukcija ugla od 20° sa greškom od 0.01%.

Kako je $\tan\beta = \tan 20^\circ \approx 0.363970234$, $\sqrt{3} \approx 1.732050808$ i $\left|\overline{MN}\right| \approx 0.216207726$ dobijamo da je $k \approx 0.681448523$. Ako uzmemo sada da je $k \approx 0.68 = \frac{68}{100} = \frac{17}{25}$ to bi značilo da tetivu $\overline{MN}$ bez velikih teškoća možemo podijeliti na Arhimedov način (dva nebaždarena trougla i šestara) u omjeru 17 : 25. Izračunajmo sada pogrešku približne trisekcije ugla od 60°. Zamjenom $k = 0.68$ u (3) dobijamo da je

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3} + 2\,(0.68)\,(0.216207726)} \approx 0.364\,018147,$$

odnosno

$$\beta \approx 20.00242403^\circ.$$

Ako uzmemo da je $\beta \approx 20.002^\circ$ pogreška iznosi $+\left(\frac{2}{1000}\right)^\circ = \frac{1}{500} \cdot 3600'' = 7.2''$ ili u procentima 0.01% (iz jednakosti $20.002^\circ = 20^\circ \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ dobijamo da je $p = 0.01\%$).

Na Slici 8 prikazana je konstrukcija ugla od 20° sa pogreškom $p = 0.01\%$.

Literatura

[1] Franka Miriam Brückler, *Povijest matematike I*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.
[2] Hasan Smajić, *Tabela trigonometrijskih vrijednosti značajnih uglova*, Didaktički putokazi, Zenica, decembar 2016.
[3] Mehmed Nurkanović, *Elementarna matematika sa stanovišta više matematike*, Skripta, 2016.