EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 15–25

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Karamatine nejednakosti

Risto Malčeski[1], Samoil Malčeski[2]

[1] *Skopje, Sjeverna Makedonija*
[2] *Međunarodni slavjanski univerzitet, Sv. Nikole, Sjeverna Makedonija*

Sažetak: U radu se razmatraju Karamatine nejednakosti koje su neposredne posljedice Jensenove nejednakosti. Zatim je pomoću tih nejednakosti dokazan veći broj nejednakosti koje su zadavane na matematičkim takmičenjima.

1. Uvod

Nejednakosti su neizostavan dio rada matematičara, posebno onih čiji je uži interes matematička analiza, pa je njihovo detaljno proučavanje neophodno. Većina učenika, učesnika matematikičkih takmičenja, je upoznata s nejednakostima između sredina, Nesbittovom nejednakošću, nejednakostima preraspodjele, Jensenovom nejednakošću i nizom drugih nejednakosti. Jedna od manje poznatih nejednakosti je Karamatina nejednakost, koja se u literaturi često povezuje s imenima poznatijih matematičara, među kojima su Schur, Hardy, Littlewood, Pojaa i Weyl, a može se naći i kao nejednakost za majorizaciju.

2. Konveksne funkcije. Jensenova nejednakost

Definicija 2.1. *Za funkciju f reći ćemo da je* ***konveksna*** *na intervalu (a, b) ako za bilo koje $x_1, x_2 \in (a, b)$ i za svako $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi nejednakost*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Za funkciju f kažemo da je ***konkavna*** *na (a, b) ako je funkcija $-f$ konveksna na (a, b).*

Definicija 2.2. *Funkciju f nazivamo* ***strogo konveksnom*** *na (a, b) ako za bilo koje $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$ i za svako $\alpha \in (0, 1)$ vrijedi nejednakost*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Funkciju f nazivamo ***strogo konkavnom*** *na (a, b) ako je funkcija $-f$ strogo konveksna na (a, b).*

Primjer 2.3. *[4] Funkcija $f(x) = x^2$ je strogo konveksna na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Zaista, ako je $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in (0, 1)$, tada vrijedi*

$$\begin{aligned}(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)^2 &= \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_1 x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 \\ &< \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)\left(x_1^2 + x_2^2\right) + (1-\alpha)^2 x_2^2 = \alpha x_1^2 + (1-\alpha) x_2^2,\end{aligned}$$

što znači da je funkcija $f(x) = x^2$ strogo konveksna na $(-\infty, +\infty)$.

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: konveksna funkcija, Jensenova nejednakost, Karamatina nejednakost
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

Primjedba 2.4. *Prethodni primjer pokazuje da je postupak neposredne provjere konveksnosti prilično složen čak i za najjednostavnije funkcije. Postavlja se pitanje postoji li jednostavniji način za provjeru konveksnosti funkcije, pomoću npr. neprekidnosti, diferencijabilnosti i slično. U nastavku ćemo se detaljnije zadržati na prethodnim pitanjima, ali ćemo prvo razmotriti nekoliko osnovnih svojstava konveksnih funkcija. Pretpostavit ćemo da je čitatelj upoznat s neprekidnošću i diferencijabilnošću realnih funkcija definiranih na intervalu (otvorenom ili zatvorenom).*

Lema 2.5. *[4] Konveksna funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\neq const$ ne dostiže svoj maksimum ni u jednoj tački $x_0\in(a,b)$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno tvrdnji leme, to jest da funkcija f dostiže svoju maksimalnu vrijednost u bar jednoj tački $x_0\in(a,b)$. Budući da je $f\neq const$, postoji interval $(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$ tako da je $x_0\in(x_1,x_2)$ a na jednom od njegovih krajeva vrijednost funkcije je strogo manja od njezine vrijednosti u tački x_0. Neka je, na primjer, $f(x_1)<f(x_0)$, $f(x_2)\leq f(x_0)$. Zbog toga, budući da je $x_0\in(x_1,x_2)$, postoji $\alpha\in(0,1)$ takav da je $x_0=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$. Ako posljednje dvije nejednakosti pomnožimo redom s α i $1-\alpha$, te ih nakon toga saberemo, dobit ćemo

$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)<f(x_0)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2),$$

što je u protivrječnosti s konveksnošću funkcije f. $\square$

Posljedica 2.6. *Konkavna funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\neq const$ ne dostiže svoj minimum ni u jednoj tački $x_0\in(a,b)$.*

Dokaz: Neposredno slijedi iz Leme 2.5 i Definicije 2.1. $\square$

Teorem 2.7. *[4] Ako je funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ konveksna (konkavna) i ograničena na (a,b), tada je ona neprekidna na (a,b).*

Dokaz: Razmatrat ćemo slučaj kad je funkcija f konveksna. Analogno se izvodi dokaz i u slučaju konkavnosti. Pošto je f ograničena na (a,b), postoji konstanta $M>0$ takva da je $|f(x)|\leq M$ za sve $x\in(a,b)$. Neka su $x_0\in(a,b)$ i $h>0$ tako da je $x_0\pm h\in(a,b)$. Iz osobine konveksnosti funkcije f slijedi nejednakost

$$2f(x_0)\leq f(x_0-h)+f(x_0+h),$$

što je ekvivalentno s nejednakošću

$$f(x_0)-f(x_0-h)\leq f(x_0+h)-f(x_0). \tag{1}$$

Ako je $x_0\pm(k+1)h\in(a,b)$ za $k=1,2,...,n-1$, tada iz nejednakosti (1) dobijamo sistem nejednakosti

$$f(x_0-kh)-f(x_0-(k+1)h)\leq f(x_0+h)-f(x_0)\leq f(x_0+(k+1)h)-f(x_0+kh) \tag{2}$$

za $k=0,1,...,n-1$. Sabiranjem svih nejednakosti iz (2), dobijamo nejednakosti

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-nh)}{n}\leq f(x_0+h)-f(x_0)\leq\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{n},$$

odakle se, zbog ograničenosti funkcije f, dobije da vrijedi

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leq\frac{2M}{n}. \tag{3}$$

Neka je zadano $\varepsilon>0$. Uzmimo da je

$$n=\left\lfloor\frac{2M}{\varepsilon}\right\rfloor+1 \quad \text{i} \quad \delta=\min\left\{\frac{b-x_0}{n},\frac{x_0-a}{n}\right\}.$$

Konačno, iz (3) slijedi da za ovako odabrano $\delta>0$ vrijedi $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, čim je $|x-x_0|<\delta$, to jest funkcija f je neprekidna u proizvoljnoj tački $x_0\in(a,b)$. $\square$

Teorem 2.8. *[3] Funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako za svaku tačku $x_0\in(a,b)$ funkcija*

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$$

monotono raste (strogo monotono raste) na (a,b).

Dokaz: Razmatrat ćemo samo slučaj stroge konveksnosti. Neka je $a<x_0<x_1<x_2<b$ i

$$\alpha=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0},\quad 1-\alpha=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}.$$

Tada je $\alpha\in(0,1)$ i $x_1=\alpha x_0+(1-\alpha)x_2$. Sada tvrdnja za ovaj slučaj proizilazi iz sljedećeg niza ekvivalentnih nejednakosti

$$\begin{aligned}
&f(\alpha x_0+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_0)+(1-\alpha)f(x_2)\\
&\qquad\qquad\Longleftrightarrow f(x_1)<\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2)\\
&\qquad\qquad\Longleftrightarrow (x_2-x_0)f(x_1)<(x_2-x_1)f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_2)\\
&\qquad\qquad\Longleftrightarrow (x_2-x_0)[f(x_1)-f(x_0)]<(x_1-x_0)[f(x_2)-f(x_0)]\\
&\qquad\qquad\Longleftrightarrow g(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=g(x_2).
\end{aligned}$$

Dokazi za slučajeve $a<x_1<x_0<x_2<b$ i $a<x_1<x_2<x_0<b$ izvode se analogno. U sluačaju konveksnosti funkcije treba samo u gornjem nizu ekvivalentnih nejdnakosti znak "$<$" zamijeniti s "$\leq$". □

Teorem 2.9. *[4] Neka je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ i neka za svako $x\in(a,b)$ postoji $f'(x)$. Funkcija f je konveksna (strogo konveksna) na (a,b) ako i samo ako funkcija f' monotono raste (strogo monotono rste) na (a,b).*

Dokaz: Neka je f konveksna na (a,b) i $a<x_1<x_2<b$. Prema Teoremu 2.8, za tačke $a<u<x_1<x_2<v<b$, imamo

$$\frac{f(u)-f(x_1)}{u-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2},$$

odakle slijedi

$$f'_-(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'_+(x_2),$$

odnosno

$$f'(x_1)=f'_-(x_1)\leq f'_+(x_2)=f'(x_2),$$

to jest f' monotono raste na (a,b).

Pretpostavimo sada da f' monotono raste na (a,b) i za $x_0\in(a,b)$ razmatrajmo funkciju $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$. Prema Lagrangeovom teoremu slijedi da postoji tačka c između x i x_0 tako da je $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$. Sada imamo

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2}=\frac{f'(x)-f'(c)}{x-x_0}\geq 0,\quad x\in(a,b)\setminus\{x_0\},$$

to jest funkcija g monotono raste na intervalima (a,x_0) i (x_0,b). Osim toga,

$$g(x_0-0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)=f'_+(x_0)=g(x_0+0).$$

Iz svega ovog i na osnovu Teorema 2.8 slijedi da je funkcija f konveksna na (a,b). □

Teorem 2.10. *[3] Neka je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ i neka za svako $x\in(a,b)$ postoji $f''(x)$. Funkcija f jekonveksna na (a,b) ako i samo ako za svako $x\in(a,b)$ vrijedi $f''(x)\geq 0$. Funkcija f je strogo konveksna na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)\geq 0$ za svako $x\in(a,b)$ i ne postoji interval $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ takav da za svako $x\in(\alpha,\beta)$ vrijedi $f''(x)=0$.*

Dokaz: Prema Teoremu 2.9 funkcija f je konveksna na (a,b) ako i samo ako f' monotono raste na (a,b). No, f' monotono raste na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)\geq 0$, za svako $x\in(a,b)$.
S druge strane, prema Teoremu 2.9, funkcija f je strogo konveksna na (a,b) ako i samo ako f' strogo monotono raste na (a,b). No, funkcija f' strogo monotono raste na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)\geq 0$ za svako $x\in(a,b)$ i ne postoji interval $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ takav da za svako $x\in(\alpha,\beta)$ vrijedi $f''(x)=0$. $\square$

Teorem 2.11. ***(Jensenova nejednakost)[1],[2]*** *Ako je f konveksna funkcija na (a,b), tada je za svaki prirodni broj $n\geq 2$, za koji je $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ i za koji je $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$, takvi da je $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$, zadovoljena nejednakost*

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+...+\alpha_nf(x_n). \tag{4}$$

Ako je funkcija f strogo konveksna, tada u (4) vrijedi stroga nejednakost, pri čemu su brojevi $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ takvi da nisu svi međusobno jednaki, a brojevi $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$ su pozitivni.

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti principom potpune matematičke indukcije u slučaju konveksnosti. Za $n=2$ nejednakost (4) se poklapa s nejednakošću u definiciji konveksne funkcije.
Pretpostavimo da je nejednakost (4) tačna za proizvoljan izbor od $n-1$ tačaka intervala (a,b) i za $n-1$ nenegativnih brojeva čiji je zbir jednak 1. Neka je $n\geq 3$ i neka su dati $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ i $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$, takvi da je $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$. Od brojeva $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ najmanje jedan je različit od 1. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $\alpha_1<1$. Tada, prema induktivnoj pretpostavci, imamo

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k\right) &= f\left(\alpha_1x_1+(1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}x_k\right)\leq\alpha_1f(x_1)+(1-\alpha_1)f\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}x_k\right)\\ &\leq\alpha_1f(x_1)+(1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}f(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kf(x_k). \end{aligned}$$

Prema tome, nejednakost (4) vrijedi i za n tačaka, pa prema principu potpune matematičke indukcije slijedi da vrijedi i za svaki prirodni broj n. $\square$

3. Karamatine nejednakosti

Definicija 3.1. *Neka su $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ i $b=(b,b_2,...,b_n)$ dva konačna niza realnih brojeva. Kažemo da niz a majorira niz b, što ćemo označavati s $a\succ b$ ili s $b\prec a$, ako, uz eventualno prenumeriranje nizova, vrijede sljedeći uvjeti:*
1) $a_1\geq a_2\geq...\geq a_n$ i $b_1\geq b_2\geq...\geq b_n$,
2) $a_1+a_2+...+a_k\geq b_1+b_2+...+b_k$, za svako $k\in\{1,2,...,n-1\}$ i
3) $a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n$.

Pri tome ćemo za niz a reći da je *majoranta*, a za niz b da je *majoriran.*

Primjedba 3.2. *a) Jasno je da prvi uvjet u Definicije 3.1 nema nikakvih ograničenja, budući da se nizovi uvijek mogu prenumerirati tako da on bude zadovoljen. Ključni su drugi i treći uvjet.*
b) Za svaki niz $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ vrijedi $a\succ a$.

Primjer 3.3. *a) Ako je $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ proizvoljan niz nenegativnih realnih brojeva, čiji je zbir jednak n, tada vrijedi*

$$(n,0,...,0)\succ(a_1,a_2,...,a_n)\succ(1,1,...,1).$$

b) Nizovi $(4,4,1)$ i $(5,2,2)$ su neuporedivi u smislu Definicije 3.1, ni jedna od njih ne majorira drugu.

Teorem 3.4. ***(Prva Karamatina nejednakost)[3],[4],[5]*** *Neka nizovi $a = (a_i)_{i=1}^n$ i $b = (b_i)_{i=1}^n$ pripadaju intervalu (x, y). Ako je $a \succ b$ i ako je $f : (x, y) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada vrijedi nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(b_i). \tag{5}$$

Dokaz: Uvedimo oznake $c_i = \frac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Funkcija f je konveksna, pa prema Teoremu 2.8 funkcija

$$g(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad t \in (x, y) \setminus \{t_0\},$$

monotono raste na (x, y). Zbog uvjeta 1) Definicije 3.1 niz $c = (c_i)_{i=1}^n$ monotono opada. Dalje, neka je

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i, \quad k = 1, 2, ..., n, \quad A_0 = B_0.$$

Iz uvjeta 2) i 3) Definicije 3.1 slijedi

$$A_k \geq B_k, \text{ za } k = 1, 2, ..., n \text{ i } A_n = B_n.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} f(b_i) &= \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) - f(b_i)] = \sum_{i=1}^{n} c_i (a_i - b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (A_i - A_{i-1} - B_i + B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i (A_{i-1} - B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} (A_i - B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) (A_i - B_i).
\end{aligned}$$

No, kako je $c_i \geq c_{i+1}$ i $A_i \geq B_i$, za $i = 1, 2, ..., n-1$, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} f(b_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) (A_i - B_i) \geq 0,$$

što je upravo nejednakost (5).
Jasno je da u Karamatinoj nejednakosti (5) znak jednakosti vrijedi ako i samo ako za svako $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ vrijedi $c_i = c_{i+1}$ ili $A_i = B_i$. $\square$

Definicija 3.5. *Ako su za nizove $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $b = (b, b_2, ..., b_n)$ ispunjeni uvjeti:*
1) $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$,
2) $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k$, za svako $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$,
tada kažemo da niz a slabo majorira niz b.
Jasno je, ako niz a majorira niz b, tada on i slabo majorira niz b.

Teorem 3.6. ***(Druga Karamatina nejednakost)[4],[5]*** *Neka niz $a=(a_i)_{i=1}^n$ slabo majorira niz $b=(b_i)_{i=1}^n$. Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monotono rastuća konveksna funkcija, tada vrijedi nejednakost (5).*

Dokaz: Koristit ćemo iste oznake kao i u dokazu Teorema 3.4. Na potpuno isti način zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(a_i)-\sum_{i=1}^n f(b_i)&=\sum_{i=1}^n c_i(A_i-B_i)-\sum_{i=1}^n c_i(A_{i-1}-B_{i-1})\\&=c_n(A_n-B_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i).\end{aligned}$$

No, $c_i\geq c_{i+1}$, za $i=1,2,...,n-1$ i $A_i\geq B_i$, za $i=1,2,...,n$ i kako je f monotono rastuća funkcija, imamo da je $c_n\geq 0$, pa zato je desna strana u posljednjoj jednakosti nenegativna, što znači da je tačna nejednakost (5). $\square$

4. Jensen-konveksne funkcije

Primjedba 4.1. *U Sekciji 1 razmatrali smo konveksne funkcije i dokazali Jensenovu nejednakost. Ovdje ćemo spomenuti da osim konveksnih funkcija postoje i tzv. Jensen-konveksne funkcije.*

Za funkciju $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ reći ćemo da je *Jensen-konveksna* ako za sve $x,y\in(a,b)$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{6}$$

Funkcija f je *strogo Jensen-konveksna* ako u (6) vrijedi stroga nejednakost.
Za Jensen-konveksne funkcije vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.2. *[3],[4] Ako je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ Jensen-konveksna funkcija, tada za sve $x_i\in(a,b)$, $i=1,2,...,n$ vrijedi nejdnakost*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}. \tag{7}$$

Ako je f strogo Jensen-konveksna, tada znak jednakosti u (7) vrijedi ako i samo ako je $x_1=x_2=...=x_n$.

Dokaz: *Prvi način.* Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1\geq x_2\geq...\geq x_n$. Za niz

$$y_1=y_2=...=y_n=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

vrijedi $x\succ y$, pa iz druge Karamatine nejednakosti slijedi

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\geq\sum_{i=1}^n f(y_i),$$

to jest

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\geq\sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right),$$

odakle slijedi nejednakost (7). Jasno je da, u slučaju kada je f strogo Jensen-konveksna, u (7) vrijedi znak jednakosti ako u (6) vrijedi znak jednakosti, to jest ako i samo ako je $x_1=x_2=...=x_n$.

Drugi način. Za $n=2$, nejednakost (7) je u suštini nejednakost iz definicije Jensen-konveksne funkcije. Pretpostavimo da (7) vrijedi za prirodni broj $n \geq 2$ i neka su $x_i \in (a,b)$, $i=1,2,...,n,n+1$. Uvedimo oznaku $x=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i$. Tada iz induktivne pretpostavke slijedi

$$f(x)=f\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i+\frac{x_{n+1}+(n-1)x}{n}}{2}\right)\leq\frac{f\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+(n-1)x}{n}\right)}{2}$$
$$\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)+f(x_{n+1})+(n-1)f(x)}{2n},$$

odakle, nakon sređivanja, dobijemo

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)+f(x_{n+1})}{n+1},$$

to jest nejednakost (7) vrijedi za $n+1$. Prema principu potpune matematičke indukcije slijedi da (7) vrijedi za svaki prirodni broj. $\square$

5. Primjeri riješenih problema

Problem 5.1. *[3] Dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}. \tag{8}$$

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \geq b \geq c$. Tada je jasno da je $(2a,2b,2c)\succ(a+b,b+c,c+a)$. Kako je funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ konveksna na intervalu $(0,+\infty)$, to iz prve Karamatine nejdnakosti slijedi nejednakost

$$f(2a)+f(2b)+f(2c)\geq f(a+b)+f(b+c)+f(c+a),$$

što je ekvivalentno s nejednakošću (8).

Problem 5.2. *[4] Dokazati da za sve $a,b\geq 0$ vrijedi*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}}\leq\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}. \tag{9}$$

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b\geq a\geq 0$. Za brojeve

$$y=b+\sqrt[3]{b},z=a+\sqrt[3]{a},u=b+\sqrt[3]{a},v=a+\sqrt[3]{b}$$

vrijedi $y\geq z$, pa je zato $(y,z)\succ(u,v)$ ili $(y,z)\succ(v,u)$ u zavisnosti od toga da li je $u\geq v$ ili je $v\geq u$, respektivno. Nadalje, funkcija $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ je konveksna na intervalu $(0,+\infty)$, pa prema prvoj Karamatinoj nejednakosti vrijedi nejednakost

$$f(y)+f(z)\geq f(u)+f(v),$$

što je ekvivalentno nejednakosti (9).

Problem 5.3. *[4] Neka su a, b i c dužine stranica trougla. Dokazati da je*

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}. \tag{10}$$

Rješenje. Budući da su a, b i c dužine stranica trougla vrijedi $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a+b-c > 0$, $b+c-a > 0$, $c+b-a > 0$. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $a \geq b \geq c$. Lahko se pokaže da vrijedi

$$(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a,b,c).$$

Kako je funkcija $f(x) = -\sqrt{x}$ konveksna na intervalu $(0,+\infty)$, prema prvoj Karamatinoj nejednakosti slijedi nejednakost

$$f(a+b-c) + f(c+a-b) + f(b+c-a) \geq f(a) + f(b) + f(c).,$$

koja je ekvivalentna nejednakosti (10).

Problem 5.4. *[3] Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost*

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq abc. \tag{11}$$

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $a \geq b \geq c$. Očito je da od brojeva $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$ najmanje jedan može biti negativan i ako je jedan od tih brojeva negativan, tada je nejednakost (11) trivijalna. Zato pretpostavimo da su sva tri ta broja nenegativni. Tada je

$$(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a,b,c)$$

i kako je funkcija $f(x) = -\ln x$, $x \in (0,+\infty)$ konveksna, iz prve Karamatine nejednakosti slijedi nejednakost

$$-\ln(a+b-c) - \ln(b+c-a) - \ln(c+a-b) \geq -\ln a - \ln b - \ln c,$$

što je ekvivalentno nejednakosti (11).

Problem 5.5. *Neka su $a,b,c > 0$ takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Rješenje. Iz $a,b,c > 0$ i $abc = 1$ slijedi da postoje $x,y,z > 0$ takvi da je $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ i $c = \frac{z}{x}$. Sada, zamjenom i sređivanjem dobijamo nejednakost

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz,$$

koja je već dokazana u Problemu 5.4.

Problem 5.6. *[3] Dokazati da za pozitivne brojeve $a_{1,}a_2,...,a_n$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^3}{a_n} + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2. \tag{12}$$

Rješenje. Neka su $x_i = \ln a_i$, $i = 1,2,...,n$ i razmotrimo nizove

$$3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, ..., 3x_n - x_1 \;\text{ i }\; 2x_1, 2x_2, ..., 2x_n. \tag{13}$$

Dokažimo da nizovi (13), koji su poredani u opadajućem redoslijedu svojih članova, zadovoljavaju Teorem 3.4. Neka su indeksi $m_1, m_2, ..., m_n$ i $k_1, k_2, ..., k_n$ takvi da je

$$\{m_1, m_2, ..., m_n\} = \{k_1, k_2, ..., k_n\} = \{1, 2, ..., n\}, \tag{14}$$

$$3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq ... \geq 3x_{m_n} - x_{m_n+1}, \tag{15}$$

$$2x_{k_1} \geq 2x_{k_2} \geq ... \geq 2x_{k_n}. \tag{16}$$

Tada, prvo iz (15), a zatim iz (16) slijede nejednakosti:

$$3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq 2x_{k_1},$$

$$(3x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (3x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (3x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (3x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq 2x_{k_1} + 2x_{k_2},$$

i općenito, za $p = 1, 2, ..., n-1$ zbir prvih p članova u (15) nije manji od zbira prvih p članova u (16). Jasno je da za $p = n$ vrijedi znak jednakosti, što znači da su svi uvjeti Teorema 3.4 zadovoljeni. No, funkcija $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, je konveksna, pa je zbog toga

$$e^{3x_1 - x_2} + e^{3x_2 - x_3} + ... + e^{3x_n - x_1} \geq e^{2x_1} + e^{2x_2} + ... + e^{2x_n}$$

te ako u zadnjoj nejednakosti stavimo $x_i = \ln a_i$, $i = 1, 2, ..., n$ i iskoristimo da je $e^{\ln t} = t$, za svako $t > 0$, direktno ćemo dobiti nejednakost (12).

Primjedba 5.7. *Na potpuno analogan način, za pozizivne realne brojeve može se dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a_1^{n+k}}{a_2^n} + \frac{a_2^{n+k}}{a_3^n} + ... + \frac{a_{t-1}^{n+k}}{a_t^n} + \frac{a_t^{n+k}}{a_1^n} \geq a_1^k + a_2^k + ... + a_t^k.$$

Pri tome treba uvesti smjenu $x_i = \ln a_i$, $i = 1, 2, ..., n$ i razmatrati nizove

$$(n+k)\, x_i - n x_{i+1},\ i = 1, 2, ..., t \quad i \quad kx_i,\ i = 1, 2, ..., t \quad (\textit{kad je } x_{t+1} = x_1).$$

Problem 5.8. *[3] Ako su $x_i \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, $i = 1, 2, ..., n$, tada je*

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + ... + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n. \tag{17}$$

Dokazati.

Rješenje. Očito brojevi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$ pripadaju intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Na ovom intervalu funkcija $f(t) = -\cos t$ je konveksna. Analogno kao u Problemu 5.6 se dokazuje da nizovi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$, kada su raspoređeni da budu opadajući, zadovoljavaju uvjete Teorema 3.4. Konačno, nejednakost (17) slijedi iz prve Karamatine nejednakosti.

Problem 5.9. *Neka su $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$, $n \geq 2$. Dokazati da je*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) ... (1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) ... \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Rješenje. Postoje $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_1 = e^{x_1}, a_2 = e^{x_2}, ..., a_n = e^{x_n}$. Jasno je da su brojevi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$ realni, a funkcija $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$ je konveksna. Sada, analogno kao u Problemu 5.6 se dokaže da nizovi $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, ..., 2x_n - x_1$ i $x_1, x_2, ..., x_n$, kada su raspoređeni da budu opadajući, zadovoljavaju uvjete Teorema 3.4. Konačno, iz prve Karamatine nejednakosti i osobina funkcije ln, dobijemo

$$\ln(1 + e^{x_1}) + \ln\left(1 + e^{x2}\right) + ... + \ln(1 + e^{x_n}) \leq \ln\left(1 + \frac{e^{2x_1}}{e^{x_2}}\right) + \ln\left(1 + \frac{e^{2x_2}}{e^{x_3}}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{e^{2x_n}}{e^{x_1}}\right),$$

odnosno

$$\ln(1 + e^{x_1})\left(1 + e^{x2}\right) ... (1 + e^{x_n}) \leq \ln\left(1 + \frac{e^{2x_1}}{e^{x_2}}\right)\left(1 + \frac{e^{2x_2}}{e^{x_3}}\right) ... \left(1 + \frac{e^{2x_n}}{e^{x_1}}\right),$$

odakle je

$$(1 + e^{x_1})\left(1 + e^{x2}\right) ... (1 + e^{x_n}) \leq \left(1 + \frac{e^{2x_1}}{e^{x_2}}\right)\left(1 + \frac{e^{2x_2}}{e^{x_3}}\right) ... \left(1 + \frac{e^{2x_n}}{e^{x_1}}\right),$$

to jest

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)...\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right),$$

a što je i trebalo da se dokaže.

Problem 5.10. *Neka su* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$, $n \geq 2$. *Dokazati da za sve* $p, k \geq 1$ *vrijedi*

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}\right)^k \geq \frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}. \tag{18}$$

Rješenje. Uočimo da vrijede sljedeće ekvivalencije

$$\begin{aligned}(18) &\iff \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^k}{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k} \geq \frac{(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p)^k}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}} \\ &\iff \frac{a_1+a_2+...+a_n}{\sqrt[k]{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}} \geq \frac{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}{\sqrt[k]{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}} \\ &\iff \sum_{i=1}^n \sqrt[k]{\frac{a_i^k}{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt[k]{\frac{a_i^{pk}}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Neka je $0 < q \leq p$ i

$$A_i = \frac{a_i^p}{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p} \text{ i } B_i = \frac{a_i^q}{a_1^q+a_2^q+...+a_n^q}, \; i=1,2,...,n.$$

Imamo da je

$$A_1 \geq A_2 \geq ... \geq A_n, \; B_1 \geq B_2 \geq ... \geq B_n \text{ i } \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n B_i.$$

Također, za svako $m < n$ vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m A_i \geq \sum_{i=1}^m B_i &\iff (a_1^p+...+a_m^p)(a_1^q+...+a_n^q) \geq (a_1^q+...+a_m^q)(a_1^p...+a_n^p) \\ &\iff (a_1^p+...+a_m^p)\left(a_{m+1}^q+...+a_n^q\right) \geq (a_1^q+...+a_m^q)\left(a_{m+1}^p...+a_n^p\right) \\ &\iff \sum_{1\leq i\leq m<j\leq n}\left(a_i^p a_j^q - a_i^q a_j^p\right) \geq 0,\end{aligned}$$

a posljednja nejednakost je tačna budući da za $i < j$ i $p-q > 0$ vrijedi $a_i^{p-q} \geq a_j^{p-q}$. Prema tome, niz $A_1, A_2, ..., A_n$ majorira niz $B_1, B_2, ..., B_n$. Dalje, $p, k \geq 1$, pa je zato $pk \geq k$, što znači da niz

$$S_i = \frac{a_i^{pk}}{a_1^{pk}+a_2^{pk}+...+a_n^{pk}}, \quad i=1,2,...,n$$

majorira niz

$$T_i = \frac{a_i^k}{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k} \quad i=1,2,...,n$$

i kako je funkcija $f(t) = -\sqrt[k]{t}$, $k \geq 1$, konveksna na $(0,+\infty)$, iz prve Karamatine nejednakosti slijedi nejednakost (19).

Problem 5.11. *(IMO 69.1) Dati su realni brojevi* a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$ *takvi da je*

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0,$$
$$b_1 \geq a_1,\ b_1 b_2 \geq a_1 a_2,\ ...\ , b_1 b_2 ... b_n \geq a_1 a_2 ... a_n.$$

Dokazati da je

$$b_1 + b_2 + ... + b_n \geq a_1 + a_2 + ... + a_n. \tag{20}$$

Rješenje. Neka je $a_i = e^{x_i}$, $b_i = e^{y_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Jasno je da niz $(y_i)_{i=1}^n$ slabo majorira niz $(x_i)_{i=1}^n$ i kako je funkcija $f(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, monotono rastuća i konveksna funkcija, iz Teorema 3.6 slijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} e^{y_i} \geq \sum_{i=1}^{n} e^{x_i},$$

koja je ekvivalentna nejednakosti (20).

Problem 5.12. *Odrediti maksimum izraza* $a^8 + b^8 + c^8$*, ako* $a, b, c \in [-1, 1]$ *i* $a + b + c = -\frac{1}{2}$.

Rješenje. Bez ograničenja općenitosti možemo smatrati da je $1 \geq a \geq b \geq c \geq -1$. Lahko se pokaže da vrijedi $\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right) \succ (a, b, c)$. Kako je funkcija $f(x) = x^8$ konveksna na intervalu $[-1, 1]$, iz prve Karamatine nejednakosti slijedi

$$a^8 + b^8 + c^8 = f(a) + f(b) + f(c) \leq f(1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1) = 1^8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^8 + (-1)^8 = 2\frac{1}{256}.$$

Prema tome, traženi maksimum je jednak $2\frac{1}{256}$ i dostiže se za $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$.

Literatura

[1] V. Cîrtoaje: *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing house, Zalau, 2006.
[2] D.S. Mitrinović, E.S. Barnes, D.C.B. Marsh, J.R.M. Radok: *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.
[3] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić: *Nejednakosti*, DMS, Beograd, 2003.
[4] R. Malčeski: *Elementarni algebarski i analitički neravenstva*, Armaganka, Skopje, 2019.
[5] D. Nomirovskij: Neravenstvo Karamati, *Kvant*, 2003.