EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 26–36

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Logaritamska konveksnost gama funkcije

Zehra Nurkanović[1], Muhamed Šmigalović[2]

[1] *Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Tuzla*
[2] *Osnovna škola Rainci Gornji*

Sažetak: U ovom radu govorimo o gama funkciji, njenim osobinama, logaritamskoj konveksnosti i njenoj primjeni u raznim oblastima matematike. Na kraju dajemo jedan dokaz Gaussove multiplikativne formule (Zadatak 1 koji je naveden u [2] na strani 333).

1. Uvod

Početkom 18. vijeka švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. − 1783.), njemački matematičar Christian Goldbach (1690. − 1764.) i mnogi drugi matematičari (vidjeti Slike 1 i 2, [6], [7]) pokušavali su proširiti domenu faktorijela na sve realne brojeve. U jednom pismu Goldbachu iz 1730. godine Euler je naveo funkciju $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiranu izrazom

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\, dt, \tag{1}$$

bez upotrebe njenog naziva i oznake $\Gamma(x)$.
Naziv "**gama funkcija**" i oznaku $\boldsymbol{\Gamma}(x)$ za funkciju (1) uveo je tek 1814. godine francuski matematičar Adrien-Marie Legendre (1752. − 1833.) (vidjeti Sliku 3 i [8]). Smjenom $u = -lnt$, Legendre [3], gama funkciju datu sa (1) svodi na

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{2}$$

Gama funkcija (vidjeti Sliku 4) može se definisati preko beskonačnog proizvoda

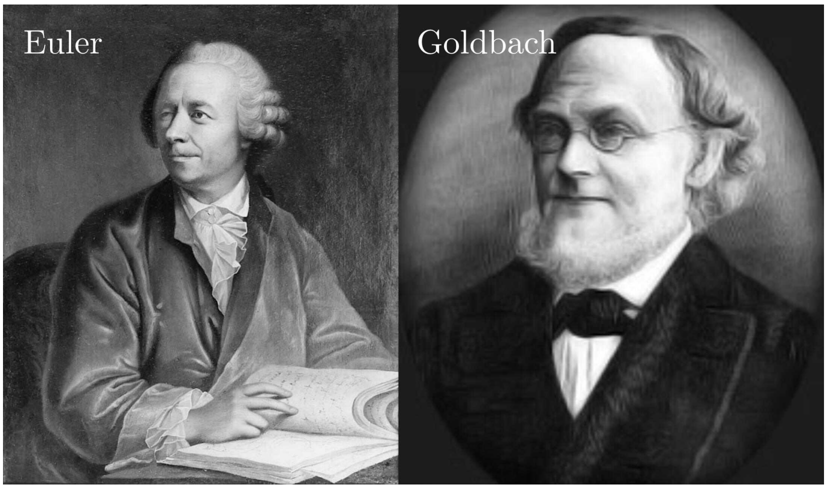
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}, \quad x \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{3}$$

ili preko limesa (Gaussov pristup definiranju gama funkcije):

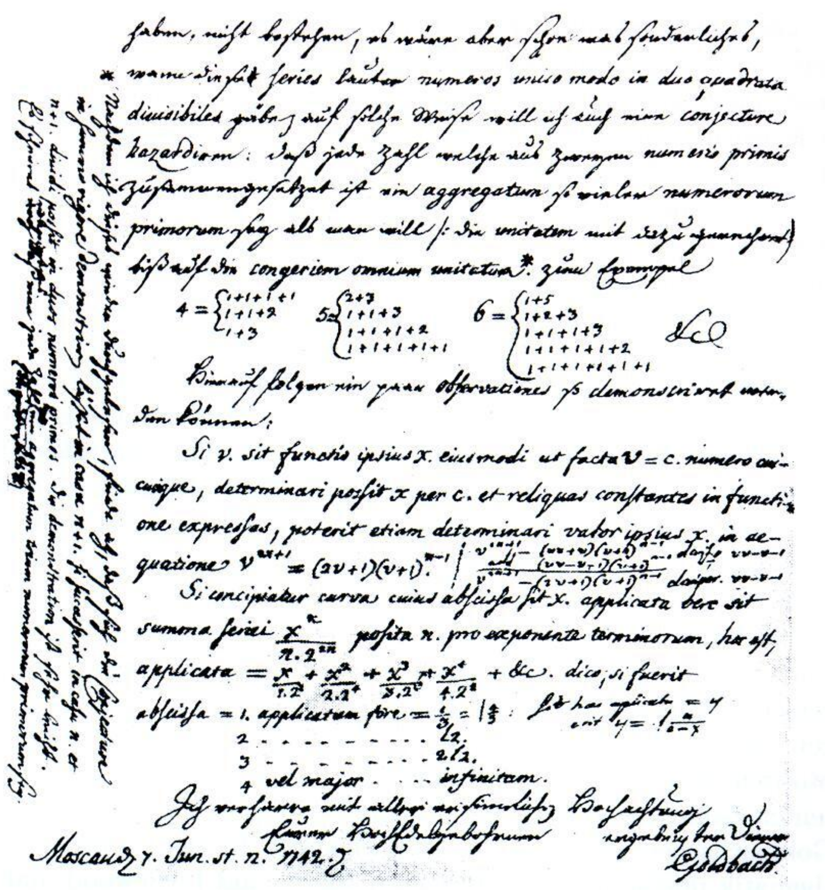
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad x \neq 0, -1, -2, \ldots. \tag{4}$$

Ove tri prikaza gama funkcije, (2), (3) i (4), su međusobno ekvivalentna (vidjeti [1]).

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: gama funkcija, analitička funkcija, cijela funkcija, konveksnost
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

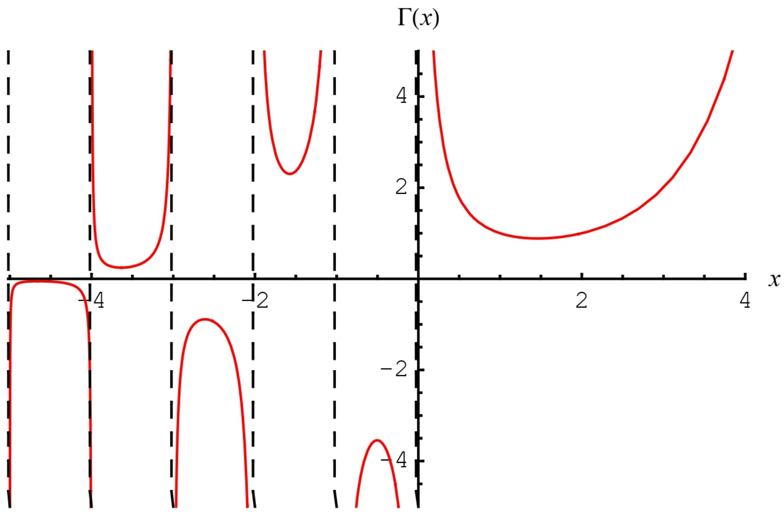


Slika 1: Leonhard Euler (1707. – 1783.) i Christian Goldbach (1690. – 1764.)



Slika 2: Pismo Goldbacha Euleru od 07.06.1742. godine

Slika 3: Adrien Marie Legendre (1752. – 1833.)



Slika 4: Graf gama funkcije proširen na negativne realne brojeve

U [1] je dat uvod u Gama funkciju. Navedene su i dokazane osnovne osobine Gama funkcije i dat je njen prikaz pomoću beskonačnog proizvoda za realne vrijednosti.
Navedimo sada neke od tih osobina:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \\
&\Gamma(n+1) = n! && (n = 0, 1, 2, \ldots), \\
&\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \tfrac{\pi}{\sin \pi x} && (x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\
&\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \\
&\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}} && (n = 0, 1, 2, \ldots), \\
&\Gamma\left(-n+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(-1)^n n! 2^{2n}\sqrt{\pi}}{(2n)!} && (n = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Pojam faktorijela

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

za $n \in \mathbb{N}$, se sada proširuje na proizvoljne realne brojeve sa

$$x! = \Gamma(x+1).$$

Tako je za

$$\begin{array}{lll} x \in \mathbb{Z}, \quad x > 0, & & x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x, \\ x \in \mathbb{Z}, \quad x < 0, & & x! = \pm\infty, \\ x = 0, & & 0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1, \\ x = \frac{1}{2}, & & \left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623, \\ x = -\frac{1}{2}, & & \left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1.7725, \\ x = -\frac{3}{2}, & & \left(-\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \approx -3.5449. \end{array}$$

Gama funkcija ima veliku primjenu u teoriji brojeva (u proučavanju prostih brojeva), u vjerovatnoći (funkcija gustoće poznate gama distribucije), integralnom računu, kod računanja Laplaceovih transformacija (vidjeti [4], str. 14 i 15) i drugim oblastima. Npr. integral

$$I = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^8} dt$$

se smjenom $t = 2x^8$ svodi na integral

$$I = \frac{\sqrt{2}}{16} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{2}}{16} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{16} \approx 0.156\,66.$$

Na kraju ovog rada dokazat ćemo da vrijedi sljedeća jednakost

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = m^{-mz+\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \Gamma(mz), \quad m \in \mathbb{N}, z \in D, \tag{5}$$

gdje je

$$D = \mathbb{C} \diagdown \left\{-\frac{n}{m} + k : n = 0, 1, ..., m-1; \quad k = 0, -1, -2, ...\right\}$$

(Zadatak 1 koji je naveden u [2] na strani 333).

U tu svrhu navedimo sljedeće dvije definicije i dva teorema bez dokaza.

Definicija 1.1. *([2], str.* 38*) Neka je* $\mathbf{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup. Za funkcija* $f(z)$ *kažemo da je **analitička funkcija** na* $\mathbf{\Omega}$ *ako je* $f'(z)$ *neprekidna funkcija na* $\mathbf{\Omega}$*.*

U upotrebi su i nazivi *regularna funkcija i holomorfna funkcija.*

Definicija 1.2. *Funkcija* f *koja je **regularna u svim tačkama** kompleksne ravni* $\mathbb{C}$ *zove se **cijela funkcija**.*

Teorem 1.3. ***(Princip jedinstvenosti ili jednakosti za analitičke funkcija)*** *Neka su f i g analitičke funkcije na području $\mathbf{\Omega}$. Ako se funkcije f i g podudaraju na beskonačnom skupu, koji u području $\mathbf{\Omega}$ ima tačku gomilanja, onda se one podudaraju svuda na $\mathbf{\Omega}$, tj. $f = g$.*

Definicija tačke gomilanja i dokaz Teorema 1.3 može se naći u [2] na str. 58 i str. 95 (Teorem 31).

Teorem 1.4. *Neka je $\mathbf{\Omega}$ područje u $\mathbb{C}$ i $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz analitičkih funkcija definisanih na $\mathbf{\Omega}$, od kojih se nijedna ne poništava identički na $\mathbf{\Omega}$. Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(z) - 1|$ konvergira lokalno uniformno na $\mathbf{\Omega}$ i neka je $f = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$. Tada je*

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n}, \tag{6}$$

pri čemu red s desne strane formule (6) *konvergira lokalno uniformno na $\mathbf{\Omega} \backslash N(f)$.*

Sa $N(f)$ označavamo nule analitičke funkcije f na Ω. Dokaz Teorema 1.4 može se vidjeti u [2] str. 298 kao i u [5] str. 10.

2. Prikaz gama funkcije pomoću beskonačnog proizvoda

Neka je sada $z \in \mathbb{C}$. Tada za gama funkciju

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad z \in \mathbb{C} \diagdown \{0, -1, -2, ...\}, \quad t > 0, \tag{7}$$

i $n \in \mathbb{N}$, vrijede osobine (vidjeti [1] i [2], 165-170):

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!, \tag{8}$$

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad (z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}),$$

kao i da je funkcija $f(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}$ cijela te da su joj jedine nule $0, -1, -2, \ldots$ (i to jednostruke).
Vrijedi također

$$\lim_{n \to +\infty} e^{z\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)} = e^{Cz}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

gdje je

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \tag{9}$$

i naziva se *Eulerova konstanta.* Ona je s tačnošću do šesnaeste decimale jednaka

$$C = 0.5772156649015325.$$

Vjeruje se da je taj broj transcendentan ali do danas nije dokazano ni da C nije racionalan broj.

Navedimo još jedan teorem koji je dokazan u [2] (Teorem 92 na str. 331).

Teorem 2.1. *Za svako $z \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \tag{10}$$

i pri tome beskonačan proizvod konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.

3. Logaritamska konveksnost gama funkcije

Iz Teorema 2.1 vidimo da funkcija

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}h,$$

gdje je $h = \prod_{k=1}^{+\infty} h_k$, $h_k = \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$, zadovoljava uvjete Teorema 1.4. Dalje je

$$\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)' = \left(ze^{Cz}h\right)' = \left(e^{Cz} + ze^{Cz}C\right)h + ze^{Cz}h',$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)'}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = \frac{e^{Cz}h + ze^{Cz}Ch + ze^{Cz}h'}{ze^{Cz}h} = \frac{1}{z} + C + \frac{h'}{h} \overset{(6)}{=} \frac{1}{z} + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k'}{h_k},$$

odnosno, koristeći da je

$$\frac{h_k'}{h_k} = \frac{\left(\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}\right)'}{\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}} = \frac{-\frac{z}{k^2}}{1 + \frac{z}{k}} = -\frac{z}{k(z+k)},$$

dobijamo

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)'}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = -C - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z}{k(z+k)}. \tag{11}$$

Kako je $\left(-C - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z}{k(z+k)}\right)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$, to je

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(z+k)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}. \tag{12}$$

Na osnovu formule (12) možemo izvesti još jedno značajno svojstvo gama funkcije koje je vezano za pojam konveksnosti. Da bismo to uradili krenut ćemo od definicije konveksne funkcije. Za funkciju $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$**,** $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, kažemo da je *konveksna* na intervalu $\langle a, b\rangle$, ako vrijedi

$$\varphi((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y), \quad x, y \in \langle a, b\rangle, \quad t \in [0, 1]. \tag{13}$$

Funkcija φ je *strogo konveksna*, ako u nejednakosti (13) vrijedi stroga nejednakost za proizvoljne $x, y \in \langle a, b\rangle$, $x \neq y$ i $t \in \langle 0, 1\rangle$. Iz realne analize znamo da je neprekidno diferencijalna funkcija $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna, akko je funkcija φ' rastuća na intervalu $\langle a, b\rangle$, a strogo konveksna akko je φ' strogo rastuća.

Ako je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ svuda strogo pozitivna, onda možemo definirati funkciju $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ formulom

$$\varphi(x) = \ln f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Ukoliko je funkcija φ konveksna (strogo konveksna), onda za funkciju f kažemo da je *logaritamski konveksna* (*logaritamski strogo konveksna*). Svaka logaritamski (strogo) konveksna funkcija je ujedno i (strogo) konveksna, ali obrat ne vrijedi.

Funkcija Γ je strogo pozitivna na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Za $\varphi(x) = \ln\Gamma(x)$ imamo da je $\varphi'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, pa iz (12) slijedi:

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} > 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

Prema tome, funkcija φ' je strogo rastuća na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, a to znači da je funkcija φ strogo konveksna, odnosno funkcija Γ je logaritamski strogo konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$. Logaritamska konveksnost zajedno s funkcionalnom jednadžbom

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1,$$

potpuno karakteriše gama funkciju. Naime, vrijedi sljedeći važan teorem.

Teorem 3.1. ***(Bohr-Mollerup)*** *Neka je $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ funkcija sa svojstvima:*
(a) $f(1) = 1$;
(b) $f(x+1) = xf(x), \quad x > 0$;
(c) *funkcija f je logaritamski konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$.*

Tada je $f(x) = \Gamma(x)$ za svako $x \in \langle 0, +\infty\rangle$.

Dokaz: Na osnovu (b) imamo

$$\begin{aligned} f(x+n) &= f(x+n-1+1) = (x+n-1) f(x+n-1) \\ &= (x+n-1)\cdot(x+n-2) f(x+n-2), \end{aligned}$$

odnosno

$$f(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)\cdot xf(x), \quad x > 0, \ n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

pa kako ista jednakost vrijedi i za gama funkciju, dovoljno je dokazati da je $f(x) = \Gamma(x)$ za svako $x \in \langle 0, 1]$. Stavimo

$$\psi(x) = \ln f(x), \quad x > 0,$$

i fiksirajmo $x \in \langle 0, 1]$. Tada, na osnovu pretpostavke (c) imamo nejednakost

$$\psi((1-t)u + tv) \leqslant (1-t)\psi(u) + t\psi(v), \quad 0 < u < v, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{15}$$

Odavde za $u = n \in \mathbb{N}$, $v = x+n+1$ i $t = \dfrac{1}{x+1}$, dobijamo

$$\psi(n+1) \leqslant \frac{x}{x+1}\psi(n) + \frac{1}{x+1}\psi(x+n+1),$$

odakle slijedi

$$\psi(x+n+1) \geqslant (x+1)\psi(n+1) - x\psi(n).$$

Iz pretpostavke (a) i (14) slijedi $f(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, pa nalazimo da je

$$\psi(x+n+1) \geqslant (x+1)\ln n! - x\ln(n-1)! = \ln n! + x\ln n.$$

Funkcija $t \mapsto e^t$ je monotono rastuća na $\mathbb{R}$, pa iz gornje nejednakosti slijedi

$$e^{\psi(x+n+1)} \geqslant e^{\ln n! + x\ln n},$$

odnosno

$$f(x+n+1) \geqslant n^x n!.$$

Odavde i iz (14) (ako stavimo $n+1$ umjesto n) dobivamo nejednakost

$$f(x) \geqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

pa na osnovu jednakosti

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

imamo

$$f(x) \geqslant \Gamma_n(x), \quad 0 < x \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Ako u (15) stavimo $u = n \in \mathbb{N}$, $v = n+1$, $t = x$, onda dobivamo

$$\psi(x+n) \leqslant (1-x)\psi(n) + x\psi(n+1).$$

Vrijedi $f(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$\psi(x+n) \leqslant (1-x)\ln(n-1)! + x\ln n! = \ln(n-1)! + x\ln n,$$

odakle je

$$f(x+n) \leqslant n^x(n-1)!, \quad f(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Odavde slijedi

$$f(x) \leqslant \Gamma_n(x) \cdot \frac{x+n}{n}, \quad 0 < x \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Dakle, vrijedi

$$\Gamma_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \Gamma_n(x) \cdot \frac{x+n}{n}, \quad 0 < x \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

pa iz

$$\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x), \quad x > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x+n}{n} = 1$$

slijedi $f(x) = \Gamma(x)$, $x \in (0,1]$. $\square$

4. Dokaz jednakosti (5)

Vratimo se problemu za koji smo rekli na samom početku da ćemo se njime pozabaviti. Dakle, sada ćemo dokazati formulu (5).

Dokaz: Posmatrajmo funkciju

$$\varphi(z) = \Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) \cdot (\Gamma(mz))^{-1}, \quad z \in D.$$

Odavde imamo

$$\ln\varphi(z) = \ln\Gamma(z) + \ln\Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) + \cdots + \ln\Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) - \ln\Gamma(mz),$$

odnosno

$$\frac{d}{dz}[\ln\varphi(z)] = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\Gamma'\left(z + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right)} + \cdots + \frac{\Gamma'\left(z + \frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right)} - \frac{\Gamma'(mz)}{\Gamma(mz)} \cdot m.$$

Sada na osnovu jednakosti (12) vrijedi

$$\frac{\Gamma'(mz)}{\Gamma(mz)}\cdot m=\frac{\frac{d}{dz}\Gamma(mz)}{\Gamma(mz)}\cdot m=\left|\begin{array}{c} mz=t \\ mdz=dt \\ \frac{dt}{dz}=m \end{array}\right|=\frac{\frac{d}{dt}\Gamma(t)\cdot m}{\Gamma(t)}\cdot m=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2}\cdot m^2$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m^2}{(mz+k)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\dfrac{k}{m}\right)^2}.$$

Slijedi da je

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\ln\varphi(z)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(z+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\dfrac{1}{m}+k\right)^2}+\cdots+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\dfrac{m-1}{m}+k\right)^2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(z+\dfrac{k}{m}\right)^2}.$$

Neka je

$$f(z)=\frac{d^2}{dz^2}\left[\ln\varphi(z)\right],\quad z\in D.$$

Tada za proizvoljan realan broj $x>0$ vrijedi

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\dfrac{1}{m}+k\right)^2}+\cdots+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\dfrac{m-1}{m}+k\right)^2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\dfrac{k}{m}\right)^2}. \tag{18}$$

Uočimo da zadnju sumu u (18), tj. sumu $\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{l}{m}\right)^2}$, možemo napisati kao sumu m sabiraka A_n^k datih u Tabeli 1. Kako je to upravo zbir prvih m suma u (18) slijedi da je $f(x)=0$ za $x>0$.
Zaista, ako sve članove te sume napišemo u Tabelu 1, vidimo da je suma članova u koloni K_i jednaka $(i+1)$-voj sumi u (18) za $i=0,\ldots m-1$.

	Kolona K_0	Kolona K_1	$\cdots$	Kolona K_{m-1}
$l=0,...,m-1$	$\frac{1}{(x+0)^2}$	$\frac{1}{(x+0+\frac{1}{m})^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{(x+0+\frac{m-1}{m})^2}$
$l=m,...,2m-1$	$\frac{1}{(x+1)^2}$	$\frac{1}{(x+1+\frac{1}{m})^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{(x+1+\frac{m-1}{m})^2}$
$l=2m,...,3m-1$	$\frac{1}{(x+2)^2}$	$\frac{1}{(x+2+\frac{1}{m})^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{(x+2+\frac{m-1}{m})^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l=km,...,km-1$	$\frac{1}{(x+k)^2}$	$\frac{1}{(x+k+\frac{1}{m})^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{(x+k+\frac{m-1}{m})^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Suma kolona $K_i=A_i^k$, $i=0,...,m-1$	$A_0^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$	$A_1^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k+\frac{1}{m})^2}$	$\cdots$	$A_{m-1}^k=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k+\frac{m-1}{m})^2}$

Tabela 1

Dakle,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{k}{m}\right)^2}&=\sum_{n=0}^{m-1}A_n^k=A_0^k+A_1^k+\cdots+A_{m-1}^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{m}+k\right)^2}+\cdots+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{m-1}{m}+k\right)^2},\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. Kako je $f(x)=0$, to je i

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\ln\varphi(x)\right]=0,$$

pa postoje konstante A, B takve da vrijedi

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\varphi(x)\right]=A,\qquad \ln\varphi(x)=Ax+B.$$

Odavde je

$$\varphi(x)=a^x b,$$

gdje je $a=e^A$, $b=e^B$. Funkcije φ i $a^z b$ su analitičke na D, pa kako su identične na $\mathbb{R}$ za $x>0$, na osnovu Teorema 1.3 (teorem o jedinstvenosti analitičke funkcije) imamo

$$\varphi(z)=a^z b,$$

odakle za $m\in\mathbb{N}$ i $z\in D$ slijedi

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)=a^z b\cdot\Gamma(mz). \tag{19}$$

Još je potrebno odrediti konstante a i b. Koristit ćemo jednakost dokazanu u Primjeru 3 na str. 173 u [2]:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\;\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=n^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

Sada na osnovu jednakosti (19), za $z=1$, imamo:

$$\begin{aligned}ab\Gamma(m)&=\Gamma(1)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdots\;\Gamma\left(1+\frac{m-1}{m}\right)=1\cdot\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{2}{m}\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\cdots\;\frac{m-1}{m}\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\\&=\frac{(m-1)!}{m^{m-1}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\cdots\;\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right),\end{aligned}$$

a prema (20) slijedi

$$ab\Gamma(m)=\frac{(m-1)!}{m^{m-1}}\cdot m^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}.$$

S druge strane imamo da je

$$ab\Gamma(m)\overset{(8)}{=}ab\,(m-1)!.$$

Iz posljednje dvije nejednakosti dobijamo da je

$$ab = m^{-m+\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,. \tag{21}$$

Ako u (19) stavimo da je $z = 2$, dobijamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
a^2 b\Gamma(2m) &= \Gamma(2) \cdot \Gamma\left(2 + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(2 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= \Gamma(1+1) \cdot \Gamma\left(1 + 1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(1 + 1 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= 1 \cdot \Gamma(1) \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 + \frac{m-1}{m}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= \frac{m+1}{m} \cdot \frac{m+2}{m} \cdots \frac{2m-1}{m} \cdot \Gamma(1) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(1 + \frac{m-1}{m}\right) \\
&= \frac{(m+1)\cdots(2m-1)}{m^{m-1}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdots \frac{m-1}{m}\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) \\
&= \frac{m(m+1)\cdots(2m-1)}{m^m} \cdot \frac{1\cdots(m-1)}{m^{m-1}}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right),
\end{aligned}$$

odnosno

$$a^2 b\Gamma(2m) = \frac{(2m-1)!}{m^{2m-1}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,.$$

Kako je

$$a^2 b\Gamma(2m) = a^2 b\,(2m-1)!,$$

to zadnje dvije jednakosti daju

$$a^2 b = m^{-2m+\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,. \tag{22}$$

Sada iz (21) i (22) slijedi

$$a = m^{-m}, \qquad b = m^{\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,,$$

pa je time dokazana jednakost (5). $\square$

Literatura

[1] S. Kalabušić i M. Malenica: *Uvod u Gama funkciju*, Zbornik radova PMF Svezak Matematika, Vol 3, PMF Tuzla, Tuzla, 2007., 87-102.

[2] H. Kraljević, S. Kurepa: *Matematička ananliza 4/1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[3] A. M. Legegdre: *Memoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France*, Pariz, 1809.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Laplaceova transformacija i primjena*, PrintCom, Tuzla, 2010.

[5] M. Šmigalović: *Cijele funkcije (Diplomski rad)*, PMF Tuzla, Tuzla, 2007.

[6] https://www.google.com/search?q=euler+and+Goldbach&tbm=isch&ved=2ahUKEwiFlPD3hvP9AhVCP-wKHfvoDNgQ2-cCegQIABAA&oq=euler+and+Goldbach&gs_lcp=CgNpbWcQA1AAWABgvgZoAHAAeACAAV2IAV2SAQExmAEAggELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=eMwcZIX4J8L-sAf70bPADQ&bih=568&biw=1366&client=avast-a-2

[7] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Letter_Goldbach-Euler.jpg

[8] https://www.google.com/search?q=Adrien+Marie+Legegendre&tbm=isch&ved=2ahUKEwjnuc_rh_P9AhVExKQKHfNPBVIQ2-cCegQIABAA&oq=Adrien+Marie+Legegendre&gs_lcp=CgNpbWcQA1D1LljZhgFg-okBaABwAHgAgAGLAYgByQqSAQQxMS4zmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=a80cZKfYF8SIkwXzn5WQBQ&bih=568&biw=1366&client=avast-a-2&hl=en-GB#imgrc=fpOhgVY5XTXVHM