EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 37–44

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Približne konstrukcije broja π

Šejla Jusić

Tehnički fakultet Bihać, Univerzitet u Bihaću

Sažetak: U ovom radu je prikazana teorijska osnova broja π, s naglaskom na njegovoj iracionalnosti i transcedentnosti. Prikazane su i približne konstrukcije broja π prilikom kojih se konstruišu odsječci čija se dužina poklapa s brojem π do određene decimale.

1. Uvod

Broj π, poznat još kao *Arhimedova* ili *Ludolfova* konstanta, jedna je od najpoznatijih matematičkih konstanti koja ima značajnu ulogu u geometriji.

Definicija 1.1. *Broj π je omjer obima kruga i dužine njegovog prečnika.*

Oznaku za ovu konstantu uveo je 1706. godine britanski matematičar William Jones, a dolazi od grčkog slova π kao prvog slova grčke riječi za obim $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$. Oznaku je popularizirao švicarski matematičar Leonard Euler u svojima djelima *Mechanica* (1736) i *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) [7]. Kako se broj π pojavljuje u mnogim računima vezanim za krugove, očekivano je veliko interesovanje koje od davnina vlada za taj broj. Ljudska radoznalost je uticala na želju za određivanjem što tačnije vrijednosti broja π. Prvi pokušaj izračunavanja se pojavio još u Egiptu prilikom rješavanja problema kvadrature kruga. Tako je Ahmes izračunao da omjer kruga i dužine njegovog prečnika iznosi $3,16049$, a Arhimed je 280. god. pr. n. e. upisivanjem pravilnih mnogouglova unutar i izvan jedinične kružnice dobio donju i gornju granicu broja π. Najprije je konstruisao pravilni šestougao, pa je u sljedećem koraku udvostručio broj stranica na 12, pa 24, 48 i sve do 96. Na taj način je svakim korakom dobijao sve preciznije rezultate i došao je do zaključka da je

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}, \quad \text{tj.} \quad 3,1408 < \pi < 3,1429.$$

Nedostatak ovog metoda je u tome što se za $n = 96$ dobije tačnost na samo dvije decimale, a tačnost na šest decimala se dobije tek za $n = 10000$. Otkrivanjem novih grana matematike, otkrivali su se novi i bolji načini izračuna broja π. Tako je francuski matematičar Viète 1593. godine došao do sljedećeg izraza za računanje broja π

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots .$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: broj π, približne konstrukcije
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: novembar, 2022.

Ludolph van Ceulen izračunao je vrijednost broja π bez tehničkih pomagala na 35 decimala. Godine 1706. je John Machin izračunao prvih 100 decimala koristeći formulu

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Z. Dachse je 1844. godine izračunao prvih 200 decimala. Godine 1735. Euler je došao do sljedeće formule koja omogućava računanje broja π

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots.$$

Kada su se otkrila i počela razvijati računala broj tačno izračunatih decimala je naglo porastao. Tako je danas poznato preko 50 trilijuna decimala.

1761. godine je J. H. Lambert pokazao iracionalnost broja π. To znači da je decimalan prikaz broja π beskonačan i neperiodičan. Međutim, broj π se na više načina može prikazati pomoću beskonačnog verižnog razlomka [8]. Tako vrijedi

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{293 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}, \qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \ddots}}}}}.$$

F. von Lindemann je 1882. godine pokazao transcedentnost broja π. To znači da se broj π ne može dobiti kao rješenje algebarske jednačine oblika $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ sa cjelobrojnim koeficijentima $a_n \neq 0$. Dokaz transcedentnosti broja π predstavlja jedan od značajnijih otkrića 19. stoljeća i konačno pokazuje da broj π nije konstruktibilan.

2. Približne konstrukcije broja π

Definicija 2.1. *Kažemo da je realan broj b* konstruktibilan *ako je moguće lenjirom i šestarom u konačno mnogo koraka konstruisati odsječak dužine b.*

Bitno je napomenuti da se lenjir koristi isključivo kao instrument pomoću kojeg se može konstruisati prava linija, ali kojim se ne mjere dužine.

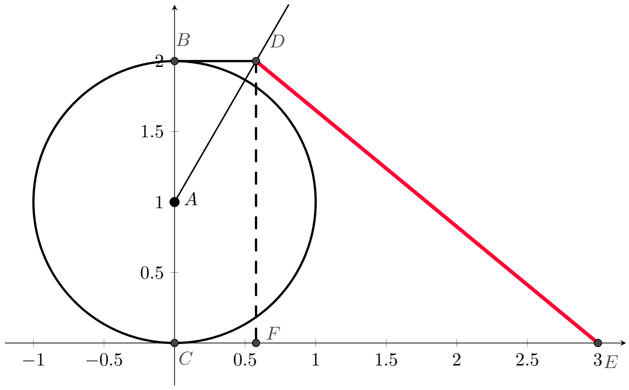
Teorem 2.2. *Svaki konstruktibilni broj je algebarski.*

Drugim riječima, svaki konstruktibilan broj je nula nekog polinoma s racionalnim koeficijentima. Dokaz ovog teorema se može pronaći u [2].

Kako je π transcendentan broj, to on nije algebarski, pa nije ni konstruktibilan. Međutim, postoje približne konstrukcije broja π, prilikom kojih se konstruišu odsječci čija se dužina poklapa s brojem π do određene decimale.

2.1. Konstrukcija Kochańskog

Poljski matematičar Adam Kochański (1631 − 1700) je dao konstruktivnu metodu za približnu konstrukciju broja π sa četiri tačne decimale. Kao što je prikazano u [1], on se koristio činjenicom da je $\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,14533$. Konstruiše se kružnica s centrom u tački A polupečnika 1, te poluprava Ap takva



Slika 1: Konstrukcija Kochańskog

da sa $\overline{AB}$ zaklapa ugao od $30°$. Odredi se tačka D kao presjek poluprave Ap i prave koja prolazi tačkom B a paralelna je s Ox–osom. Vrijedi

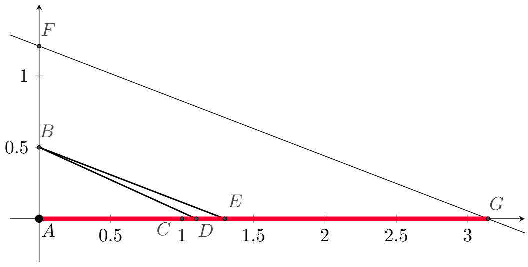
$$\tan 30° = \frac{|BD|}{|AB|} \quad \Longrightarrow \quad |BD| = |AB| \cdot \tan 30° = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Neka je E tačka na pozitivnom dijelu Ox–ose koja je od tačke C udaljena za 3 mjerne jedinice. Povucimo normalu iz tačke D na osu x, te njeno podnožje označimo sa F. Tada je $|DF| = |BC|$ i $|FE| = |EC| - |CF| = |EC| - |BD|$. Iz pravouglog trougla $\triangle DEF$ nalazimo dužinu duži $\overline{DE}$. Naime, vrijedi

$$|DE| = \sqrt{|CB|^2 + (|EC| - |BD|)^2} = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,141533.$$

2.2. Konstrukcija Spechta

Kao što je prikazano u [5], Specht je 1836. godine dao konstruktivnu metodu za približnu konstrukciju broja π, kojom se taj broj određuje na pet tačnih decimala.



Slika 2: Konstrukcija Spechta

Neka je $|AB| = 0,5$, $|AC| = 1$, $|CD| = 0,1$ i $|DE| = 0,2$. Stavi li se $|AF| = |BD|$, onda je

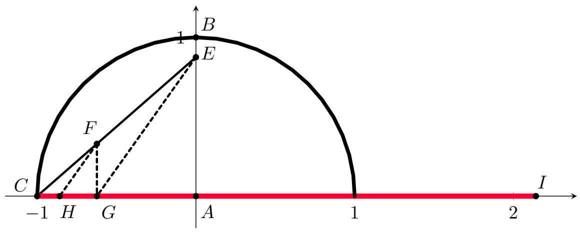
$$|AF| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} = \sqrt{(|AC| + |CD|)^2 + |AB|^2} = \sqrt{1,1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{146}}{10}.$$

Neka je G tačka na Ox–osi takva da je $\overline{FG} || \overline{BE}$. Duž $\overline{AG}$ je približne dužine π. Naime, na osnovu Talesovog teorema (ili na osnovu sličnosti $\triangle AEB \sim \triangle AGF$) vrijedi

$$|AG| = \frac{|AF| \cdot |AE|}{|AB|} = \frac{13\sqrt{146}}{50} \approx 3,1415919.$$

2.3. Konstrukcija Geldera

Jacob de Gelder je 1849. godine predstavio približnu konstrukciju broja π, kojom se taj broj određuje na šest tačnih decimala, što je prikazano u [6].



Slika 3: Konstrukcija Geldera

Neka je $|AB| = |AC| = 1$, $|AE| = \frac{7}{8}$ i tačka F na duži $\overline{CE}$ tako da $|CF| = \frac{1}{2}$. Neka je G podnožje normale iz tačke F na Ox–osu. Primjenom Talesovog teorema (ili primjenom sličnosti $\triangle CGF \sim \triangle CAE$) vrijedi

$$|CG| = \frac{|CA| \cdot |CF|}{|CE|} = \frac{|CF|}{|CE|}. \tag{1}$$

Konstruiše se prava kroz tačku F paralelna s $\overline{EG}$. Neka je H presjek Ox–ose i te prave. Ponovnom primjenom Talesovog teorema (ili primjenom sličnosti $\triangle CHF \sim \triangle CGE$) je

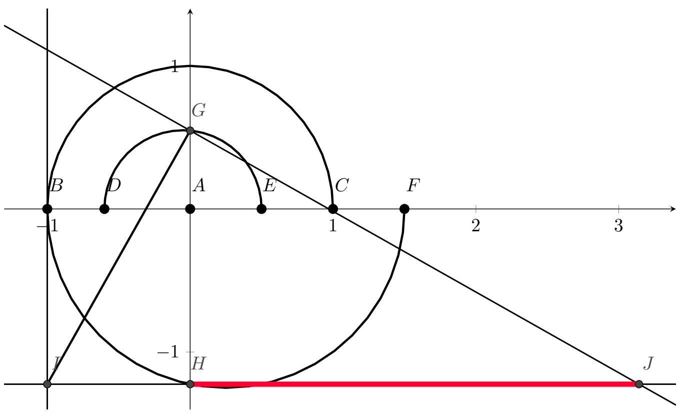
$$|CH| = \frac{|CG| \cdot |CF|}{|CE|}. \tag{2}$$

Uzimajući u obzir (2) i (1) dobijamo

$$|CH| = \frac{\frac{|CF|}{|CE|} \cdot |CF|}{|CE|} = \frac{|CF|^2}{|CE|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{16}{113}.$$

Neka je I tačka na Ox–osi takva da je $|HI| = 3$. Tada je $|CI| = |CH| + |HI| = \frac{16}{113} + 3 \approx 3.1415929$.

2.4. Konstrukcija Hobsona



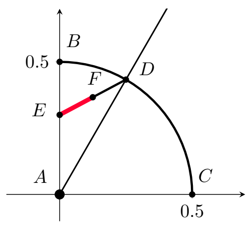
Slika 4: Konstrukcija Hobsona

Hobson je u [4] pokazao metodu približne konstrukcije broja π kojom se taj broj određuje na tri tačne decimale. Neka je $|AB| = |AC| = 1$, $|AD| = \frac{3}{5}$, $|AE| = \frac{1}{2}$ i $|AF| = \frac{3}{2}$. Konstruišu se dvije polukružnice. Jedna iznad Ox–ose s centrom u središtu duži $\overline{DE}$ prečnika dužine $|DE|$, a druga ispod Ox–ose sa centrom u središtu duži $\overline{BF}$ prečnika dužine $|BF|$. Neka je presječna tačka Oy–ose i prve polukružnice tačka G, a y–ose i druge polukružnice tačka H. Kako su $\measuredangle DGE$ i $\measuredangle BHF$ periferijski uglovi nad prečnikom kružnice, na osnovu Talesovog teorema su trouglovi $\triangle DGE$ i $\triangle BHF$ pravougli trouglovi. Konstruiše se prava p kroz tačku H paralelna s Ox–osom. Neka je I presječna tačka te prave s pravom $x = -1$. Kroz tačku G se konstruiše normala na $\overline{IG}$ i s J se označi presječna tačka te prave s pravom p. Dobija se duž $\overline{HJ}$ koja je približne dužine π. S obzirom da je trougao $\triangle GIJ$ pravougli i GH okomito na IJ, vrijedi da je $|GH|^2 = |IH| \cdot |HJ| = |HJ|$. Dalje je

$$|HJ| = (|GA| + |AH|)^2 = \left(\sqrt{|AD| \cdot |AE|} + \sqrt{|AB| \cdot |AF|}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{1 \cdot \frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} \approx 3,14164.$$

2.5. Konstrukcija Goodhue

Goodhue je 1974. godine dao konstruktivnu metodu za približno određivanje broja π kojom se taj broj određuje na pet tačnih decimala. Kao što je navedeno u [3], konstruiše se kružnica s centrom u koordinatnom ishodištu poluprečnika $\frac{1}{2}$ i s B i C se redom označe presječne tačke s y i Ox–osom. Konstruiše se poluprava Ap takva da sa pozitivnim smjerom Oy–ose zaklapa ugao od $30°$. Neka je D presječna tačka poluprave Ap i kružnice. Ako je $|AE| = \frac{3}{10}$ i ako je F središte duži $\overline{ED}$, onda je $\overline{EF}$ približne dužine $\pi - 3$.



Slika 5: Konstrukcija Goodhue

Primjenom Kosinusnog teorema na trougao $\triangle AED$ dobijamo

$$|ED|^2 = |EA|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |EA| \cdot |AD| \cdot \cos 30° = \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{34 - 15\sqrt{3}}{100},$$

odnosno

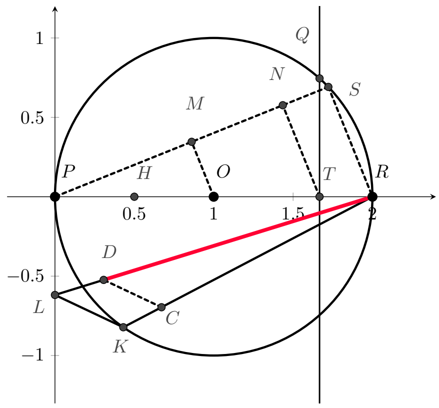
$$|ED| = \frac{\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}}{10}.$$

Sada je

$$|EF| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}}{20} \approx 0,1415913 \approx \pi - 3.$$

2.6. Konstrukcija Srinivase Ramanujana

Kao što je prikazano u [6], Srinivasa Ramanujan je došao do ideje za približnu konstrukciju broja $\sqrt{\pi}$. Neka je data kružnica s centrom u tački O poluprečnika $|PO| = |OR| = 1$ i neka je H središte duži $\overline{PO}$. Osim toga, neka je T tačka na Ox–osi takva da je $|TR| = \frac{1}{3}$, a p prava koja prolazi tačkom T i okomita na prečnik $\overline{PR}$ te neka je Q presječna tačka te prave i kružnice.



Slika 6: Konstrukcija Ramanujana

Vrijedi

$$|TQ| = \sqrt{|PT| \cdot |TR|} = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Nacrta se tetiva $\overline{RS}$ takva da je $|RS| = |TQ|$. Trougao $\triangle PRS$ je, na osnovu Talesovog teorema, pravougli. Primjenom Pitagorinog teorema vrijedi

$$|PS| = \sqrt{|PR|^2 - |RS|^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Neka su N i M redom presječne tačke normala iz tačaka T i O na tetivu $\overline{SP}$. Dobijeni trouglovi $\triangle POM$, $\triangle PTN$ i $\triangle PRS$ su slični, odakle slijedi

$$|PM| : |PO| = |PS| : |PR| \quad \Longrightarrow \quad |PM| = \frac{|PO| \cdot |PS|}{|PR|} = \frac{\sqrt{31}}{6}$$

i

$$|PN| : |PT| = |PS| : |PR| \quad \Longrightarrow \quad |PN| = \frac{|PT| \cdot |PS|}{|PR|} = \frac{5\sqrt{31}}{18}.$$

Dalje je

$$|MN| = |PN| - |PM| = \frac{5\sqrt{31}}{18} - \frac{\sqrt{31}}{6} = \frac{5\sqrt{31} - 3\sqrt{31}}{18} = \frac{\sqrt{31}}{9}.$$

Na donjoj polukružnici se odredi tačka K takva da je $|PK| = |PM|$ i tangenta t na datu kružnicu u tački P. Na tangenti t se označi tačka L takva da je $|PL| = |MN|$, a zatim se konstruišu duži $\overline{RL}$, $\overline{RK}$ i $\overline{LK}$. Primjenom Pitagorinog teorema na pravougle trouglove $\triangle PKR$ i $\triangle PLR$ dobijamo

$$|RK|^2 = |PR|^2 - |PK|^2 = |PR|^2 - |PM|^2 = 2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2 = \frac{113}{36}$$

i

$$|RL|^2 = |PR|^2 + |PL|^2 = |PR|^2 + |MN|^2 = 2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2 = \frac{355}{81}.$$

Na duži $\overline{RK}$ se odredi tačka C takva da je $|RC| = |RH|$, a onda se kroz tačku C konstruiše paralela u odnosu na duž $\overline{RL}$. Neka je presječna tačka te paralele i duži $\overline{RL}$ tačka D. Dužina duži $\overline{RD}$ je jednaka približnoj vrijednosti $\sqrt{\pi}$. Naime, zbog sličnosti trouglova $\triangle RKL$ i $\triangle RCD$ vrijedi

$$|RD| = \frac{|RL| \cdot |RC|}{|RK|} = \sqrt{\frac{355}{113}}.$$

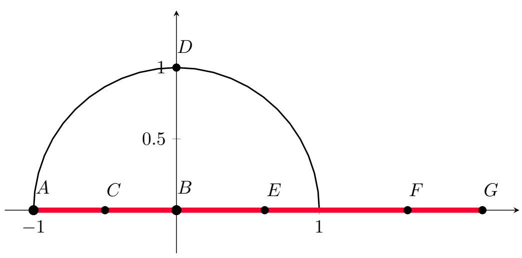
Kako je $|RD|^2 = \frac{355}{113} \approx 3.14159292$, to imamo da je dužina duži $\overline{RD}$ jednaka približnoj vrijednosti $\sqrt{\pi}$. Ako se može konstruisati $\sqrt{\pi}$ onda se može konstruisati i π.

2.7. Konstrukcija pomoću zlatnog presjeka

Pomoću zlatnog presjeka se može približno konstruisati broj π. Neka je $|AB| = |BD| = 1$ i C središte duži $\overline{AB}$. Neka je E tačka na Ox–osi takva da je $|CE| = |CD|$. Tada je $|AE| = \varphi$, gdje je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zlatni broj. Neka je F tačka na Ox–osi takva da je $|EF| = 1$ i tačka G takva da je $|FG| = \frac{1}{5}|AF|$. Kako je

$$|AG| = |AE| + 1 + \frac{1}{5}\left(1 + |AE|\right) = \frac{6}{5}(1 + |AE|) = \frac{6}{5}\left(1 + \varphi\right) \approx 3,1416,$$

to primjećujemo da se dužina duži $\overline{AG}$ podudara sa brojem π u tri decimale.



Slika 7: Približna konstrukcija broja π koristeći zlatni presjek

2.8. Konstrukcija Sokolowskog

Još jedna zanimljiva približna konstrukcija broja π je konstrukcija koju je dao Alex Sokolowski. Konstruiše se kružnica s centrom u koordinatnom ishodištu poluprečnika dužine 1, te četiri polukružnice poluprečnika dužine 1 ispod Ox–ose i četiri polukružnice poluprečnika dužine 1 s lijeve strane Oy–ose. Neka su tačke A, B, C, H i E označene kao na slici. Neka je D tačka na x–osi takva da je $|AD| = |AC|$. Tada je

$$|AD| = |AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Također je

$$|OD| = |OA| + |AD| = 3 + \sqrt{5}.$$

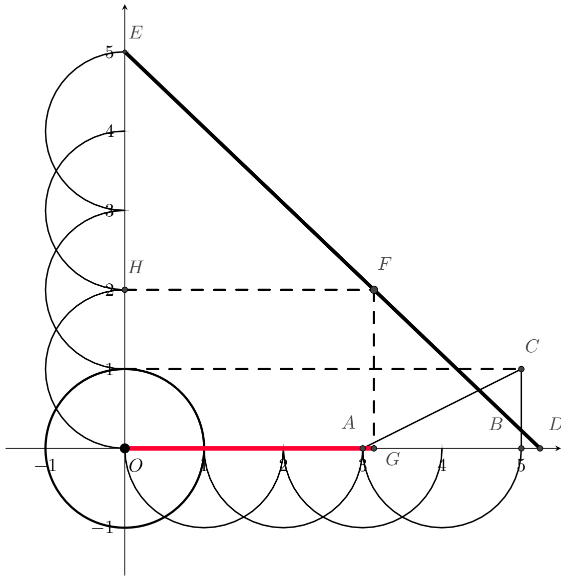
Neka je F tačka na duži $\overline{ED}$ takva da je tačka H njena ortogonalna projekcija na Oy–osu. Sa G označimo ortogonalnu projekciju tačke F na Ox–osu. Zbog sličnosti trouglova $\triangle ODE$ i $\triangle HFE$, te zbog činjenice da je $|HF| = |OG|$ vrijedi

$$|OD| : |OG| = |OE| : |HE|,$$

odnosno

$$|OG| = \frac{|OD| \cdot |HE|}{|OE|} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot 3}{5} \approx 3.14164.$$

Zaključujemo da se dužina duži $\overline{OG}$ podudara sa brojem π na tri decimale.



Slika 8: Konstrukcija Sokolowskog

Literatura

[1] B. Čekrlija: *Vremeplovom kroz matematiku*, GrafoMark, Banjaluka, 2001.

[2] R. Courant, H. Robbins: *What is Mathematics? : An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[3] J. P. Delahaye: π – *Die Story*, Birkhäuser Basel, 1999.

[4] E. W. Hobson: *Squaring the Circle: A History of the Problem*, Andesite Press, Cambridge, 2017.

[5] Z. Kurnik: *Geometrijske aproksimacije*, Matematičko fizički list, Izvanredni broj(J), 3–9

[6] A. Muminagić, J. Carstensen: *Kvadratura kruga*, Matka 25, br.100, 2016./2017.

[7] A. S. Posamentier, I. Lehmann: π*: A biography of the world's most mysterious number*, Prometheus Books, New York, 2004.

[8] T. Strmecki, B. Kovačić: *Matematičke konstante*, I. dio, Poučak 58, 73–77