EVOLVENTA (JAMTK) 6(1) (2023), 2-9

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: `http://evolventa.ba`
`http://www.umtk.info`

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima

Mehmed Nurkanović[1], Mirsad Trumić[2]

[1] *Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*
[2] *JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

Sažetak: U radu se razmatra mogućnost primjene metoda snižavanja reda linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima kao analogona istoimenog metoda pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi. Metod je ilustriran na nekoliko odgovarajućih primjera.

1. Uvod

Pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi, bilo s konstantnim ili varijabilnim koeficijentima, uglavnom se koriste standardni metodi rješavanja: metod neodređenih koeficijenata, metod varijacije konstanti, metod generirajućih funkcija, metod stepena padajućih faktorijela, metod Z-transformacije. Međutim, osim tih metoda, moguće je koristiti metode diferencijalnih jednadžbi, kao što su: snižavanje reda jednadžbe, opći metod faktorizacije operatora, metod invarijanti ili Lieve simetrije [1, 2, 4, 5, 7, 8]. Tako je u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi poznato da se pogodnom smjenom linearna diferencijalna jednadžba k-tog reda može svesti na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k-1$, to jest moguće joj je sniziti red. Naime, ako je linearna diferencijalna jednadžba oblika

$$y^{(k)} + p_{k-1}(x)y^{(k-1)} + ... + p_k(x)y = b(x) \tag{1}$$

i ako nam je $f(x)$ rješenje njoj odgovarajuće homogene jednadžbe, onda se smjenom $y = f(x)z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, diferencijalna jednadžba (1) svede na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k-1$. Pokazat ćemo da se isti metod može primijeniti i na slučaj obične linearne diferentne jednadžbe s varijabilnim koeficijentima [1, 7]. Uzmimo jednostavan slučaj takve jednadžbe drugog reda

$$u_{n+2} + a_n u_{n+1} + b_n u_n = r_n, \quad b_n \neq 0. \tag{2}$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: diferentne jednadžbe, metod snižavanja reda, konvergencija
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: august, 2023.

Pretpostavimo da je f_n neko rješenje odgovarajuće homogene diferentne jednadžbe tako da f_n i f_{n+2} nisu nule za sve $n = 0, 1, ...$ Zamjenom $u_n = f_n v_n$ u (2) dobijamo

$$f_{n+2}v_{n+2} + a_n f_{n+1}v_{n+1} + b_n f_n v_n = r_n, \tag{3}$$

što nije jednostavnije od diferentne jednadžbe (2). Zato uvođenjem smjene $\omega_n = \Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ u (3) dobijamo

$$\begin{aligned}&f_{n+2}\left(\omega_{n+1} + v_{n+1}\right) + a_n f_{n+1}v_{n+1} + b_n f_n\left(v_{n+1} - \omega_n\right)\\ &= f_{n+2}\omega_{n+1} - b_n f_n \omega_n + \left(f_{n+2} + a_n f_{n+1} + b_n f_n\right)v_{n+1} = r_n.\end{aligned}$$

Zbog pretpostavke za f_n vrijedi

$$f_{n+2} + a_n f_{n+1} + b_n f_n = 0.$$

Time će se (3) svesti na diferentnu jednadžbu

$$f_{n+2}\omega_{n+1} - b_n f_n \omega_n = r_n,$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda (dakle, snizili smo red jednadžbe (2) za jedan), koju možemo riješiti na uobičajeni način.
Naravno da je ovdje jedan od ključnih problema pogoditi niz f_n.

2. Primjeri primjene metoda snižavanja reda

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima ilustrirat ćemo na par primjera koji su navedeni kao problemi za rješavanje u [1].

Primjer 2.1. *([1], Problem 1.12 (c)) Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$u_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right)u_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Rješenje: Uz malo truda moguće je uočiti da je jedno rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe za datu jednadžbu oblika $f_n = n+1$, budući da se homogena jednadžba može napisati u pogodnijem obliku

$$nu_{n+2} - (3n+1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 0$$

Uvođenjem smjene $u_n = (n+1)v_n$ u (4) se dobije jednadžba

$$(n+3)\,v_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right)(n+2)\,v_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)v_n = \frac{1}{n},$$

odnosno

$$(n+3)\left(v_{n+2} - v_{n+1}\right) - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)\left(v_{n+1} - v_n\right) = \frac{1}{n}.$$

Nakon smjene $\omega_n = v_{n+1} - v_n$, dobije se

$$(n+3)\omega_{n+1} - 2\frac{(n+1)(n+1)}{n}\omega_n = \frac{1}{n},$$

odakle je

$$\omega_{n+1} = \frac{2(n+1)^2}{(n+3)n}\omega_n + \frac{1}{n(n+3)}.$$

Posljednja jednadžba je linearna diferentna jednadžba prvog reda sa varijabilnim koeficijentima čije je opće rješenje oblika (v. [2–6])

$$\omega_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\frac{1}{k(k+3)}. \tag{5}$$

Sređivanjem prvog sumanda u posljednjoj jednadkosti dobijamo

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\omega_1 = \frac{2^{n-1}n!n!}{\frac{(n+2)!}{3!}(n-1)!}\omega_1 = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}3\omega_1.$$

S druge strane, za drugi sumand vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\frac{1}{k(k+3)} &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{n-k-1}(n!)^2k!(k+3)!}{((k+1)!)^2(n-1)!(n+2)!}\frac{1}{k(k+3)} \\
&= \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(n-1)!(n+2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{-k}k!(k+3)!}{((k+1)!)^2}\frac{1}{k(k+3)} \\
&= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Metodom parcijalnog sumiranja (v. [2, 4]) odredimo sumu u (6)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k(k+2) \Longrightarrow \Delta x_k = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(k+1) \\ \Delta y_k = \frac{1}{k(k+1)} = (k-1)^{(-2)} \Longrightarrow y_k = -\frac{1}{k} \end{array} \right\| \\
&= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1}\Delta x_k y_{k+1} = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{k+2}{k}\right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(k+1)\frac{1}{k+1} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n+2}{n} + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n+2}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}n} + 1.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\frac{(i+1)^2}{(i+3)i}\right)\frac{1}{k(k+3)} &= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)}\left(-\frac{1}{2^{n-1}n} + 1\right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)},
\end{aligned} \tag{7}$$

pa je

$$\omega_n = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}.$$

S obzirom da je $\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1} u_n$, dalje imamo

$$\begin{aligned}
&\Delta \frac{1}{n+1} u_n = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{n+1} u_n = 3\omega_1 \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{n+1} u_n = \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Koristeći činjenicu (v. [2, 4])

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) = a_n \Longrightarrow \Delta^{-1}(a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + C,$$

i uzimajući za $C = 0$, što je moguće jer je u (8) već uključena odgovarajuća konstanta, imamo

$$\Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)},$$

odakle primjenom metoda parcijalnog sumiranja dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = k2^k \Longrightarrow \Delta x_k = (k+2)2^k \\ \Delta y_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = k^{(-2)} \Longrightarrow y_k = -\frac{1}{k+1} \end{array} \right\| \\
&= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k y_{k+1} = \left[-\frac{k2^k}{k+1}\right]_1^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+2)2^k}{k+2} \\
&= -\frac{n2^n}{n+1} + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = -\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1.
\end{aligned}$$

S druge strane, prema definiciji padajućeg faktorijela s negativnim eksponentom (v. [2, 4]), imamo

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = n^{(-2)}$$

te koristeći osobinu inverznog delta operatora Δ^{-1}: $\Delta^{-1}\left(t^{(a)}\right) = \frac{t^{(a+1)}}{a+1}$, $a \neq -1$ i izostavljanjem dodatne konstante, dobije se da vrijedi

$$\Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left[-\frac{1}{k+1}\right]_1^n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}.$$

Uvrštavanjem dobijenih rezultata u (8) dobijamo

$$\frac{1}{n+1}u_n = \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2},$$

odnosno

$$\begin{aligned} u_n &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right)\left(2^n - (n+1)\right) + 1 - \frac{1}{2}(n+1) \\ &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right)2^n - (3\omega_1 - 1)(n+1) + 1. \end{aligned}$$

Zamjenom konstante $\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{u_2}{3} - \frac{u_1}{2}$ dobijamo konačnu formu rješenja date jednadžbe

$$u_n = \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}\right)2^n - \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 - 1\right)(n+1) + 1.$$

□

Primjer 2.2. *([1], Problem 1.12 (a)) Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$u_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2}u_{n+1} + \frac{n+1}{n+2}u_n = 1, \quad n \geq 0. \tag{9}$$

Rješenje: Pripadajuća homogena jednadžba ima jedno rješenje $f_n = 1$. Uvodeći smjene $u_n = v_n$ i $\omega_n = v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, onda (9) dobija sljedeći oblik

$$u_{n+2} - u_{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\left(u_{n+1} - u_n\right) = 1,$$

odnosno

$$\omega_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\omega_n + 1.$$

Dobili smo linearnu diferentnu jednadžbu prvog reda čije je opće rješenje oblika

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{i+2}\right)\omega_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}\frac{i+1}{i+2}\right)\cdot 1 \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+2) = \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1}\left(\frac{(n-1)n}{2} + 2n\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{n(n+3)}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smjene se dobija

$$\Delta u_n = \frac{1}{n+1}(u_1 - u_0) + \frac{n(n+3)}{2(n+1)},$$

odnosno

$$u_n = (u_1 - u_0)\Delta^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \Delta^{-1}\left(\frac{n(n+3)}{2(n+1)}\right) = (u_1 - u_0)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+3)}{(k+1)}. \tag{10}$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+3)}{(k+1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(k+2-\frac{2}{k+1}\right)=\frac{n(n-1)}{2}+2n-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{n(n+3)}{2}-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1},$$

iz (11) se dobija

$$u_n=(u_1-u_0)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+3)}{2}-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right),$$

odnosno

$$u_n=(u_1-u_0-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}+\frac{n(n+3)}{4}.$$

□

Primjer 2.3. *([1], Problem 1.12 (b)) Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$u_{n+2}-\frac{2n+3}{n+2}u_{n+1}+\frac{n}{n+1}u_n=3(n+3),\quad n\geq 0. \tag{11}$$

Rješenje: Nije teško zaključiti da je $f_n=n+1$ rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe za datu jednadžbu. Uvođenjem smjene $u_n=f_nv_n=(n+1)v_n$ dobija se jednadžba

$$(n+3)v_{n+2}-\frac{2n+3}{n+2}(n+2)v_{n+1}+\frac{n}{n+1}(n+1)v_n=3(n+3),$$

odnosno

$$(n+3)v_{n+2}-(2n+3)v_{n+1}+nv_n=3(n+3).$$

To se može pisati i u obliku jednadžbe po Δv_n

$$(n+3)(v_{n+2}-v_{n+1})-n(v_{n+1}-v_n)=3(n+3),$$

odnosno u obliku linearne diferentne jednadžbe po ω_n

$$(n+3)\omega_{n+1}-n\omega_n=3(n+3)$$

ili

$$\omega_{n+1}=\frac{n}{n+3}\omega_n+3.$$

Njeno opće rješenje je

$$\begin{aligned}\omega_n&=\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i}{i+3}\right)\omega_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}\frac{i}{i+3}\right)\cdot 3\\&=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}\right)\omega_1+3\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k+4}\cdot\frac{k+2}{k+5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}\right)\\&=\frac{6(n-1)!}{(n+2)!}\omega_1+3\frac{(n-1)!}{(n+2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+3)!}{k!}\\&=\frac{6}{(n+2)(n+1)n}\omega_1+\frac{3}{(n+2)(n+1)n}\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)(k+2)(k+1).\end{aligned}$$

Kako je koristeći osobinu djelovanja inverznog delta operatora na stepen padajućeg faktorijela (v. [2, 4])

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)(k+2)(k+1) = \Delta^{-1}(k+3)^{(3)}\Big|_1^n = \frac{1}{4}(k+3)^{(4)}\Big|_1^n = \frac{1}{4}(n+3)^{(4)} - 6,$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{6}{(n+2)(n+1)n}\omega_1 + \frac{3}{(n+2)(n+1)n}\left[\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} - 6\right] \\ &= \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3).\end{aligned}$$

Zamjenom

$$\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1}u_n$$

iz posljednje jednakosti slijedi

$$\Delta \frac{1}{n+1}u_n = \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3),$$

odakle je

$$\frac{1}{n+1}u_n = (6\omega_1 - 18)\Delta^{-1}\frac{1}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}\Delta^{-1}n + \frac{9}{4}\Delta^{-1}1. \tag{12}$$

Kako je (v. [2, 4])

$$\Delta^{-1}\frac{1}{(n+2)(n+1)n} = -\frac{1}{2}(k-1)^{(-2)}\Big|_1^n = -\frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{4},$$

$$\Delta^{-1}n = \frac{1}{2}n(n-1),$$

$$\Delta^{-1}1 = n-1,$$

zamjenom u (12) dobije se

$$\frac{1}{n+1}u_n = -(6\omega_1 - 18)\left(\frac{1}{2(n+1)n} - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{9}{4}(n-1),$$

odnosno

$$u_n = -(6\omega_1 - 18)\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}(n+1)\right) + \frac{3}{8}(n+1)n(n-1) + \frac{9}{4}(n+1)(n-1).$$

Imajući na umu da je

$$\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{1}{3}u_2 - \frac{1}{2}u_1,$$

konačno dobijamo traženo rješenje

$$u_n = (2u_2 - 3u_1 - 18)\frac{(n-1)(n+2)}{4n} + \frac{3}{8}(n+1)n(n-1) + \frac{9}{4}(n+1)(n-1).$$

□

Primjedba 2.4. *Uočimo da za nizove koji su rješenja jednadžbi u prethodnim primjerima možemo zaključiti da divergiraju ka* $+\infty$.

Literatura

[1] P.E. Hydon, *Difference Equations by Differential Equation Methods,* Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[2] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.

[3] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, vol. 1, no. 1 (2018), 2-5.

[4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.

[5] M. Nurkanović, M. Trumić: Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentim formulama, *Evolventa*, vol. 4, no. 1 (2021), 25-37.

[6] M. Nurkanović, M. Trumić: Computing indefinite integrals by difference equations. *The Mathematical Gazette*, vol. 107, no. 570 (2023), 474-487. https://doi.org/10.1017/mag.2023.99

[7] M. Trumić: *Primjena diferentnih jednadžbi u nastavi matematike*, Doktorska disertacija, PMF Sarajevo, 2023.

[8] M. Trumić: Uloga invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima, *Evolventa*, vol. 4, no.2 (2021), 2-11.