EVOLVENTA (JAMTK) 6(1) (2023), 33-46

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: `http://evolventa.ba`
`http://www.umtk.info`

O numeričkom rješavanju Cauchyjevog problema Runge-Kutta metodama na Shishkinovoj mreži

Vesna Divković[1], Laura Lukić[1], Elvir Memić[1], Samir Karasuljić[1]

[1] *Prirodno–matematički fakultet Univerziteta u Tuzli*

Sažetak: U ovom radu razmatrano je numeričko rješavanje singularno–perturbacionog Cauchyjevog problema Runge–Kutta metodama na Shishkinovoj mreži. Numerička rješenja posmatranog problema dobijena su korištenjem dvije eksplicitne i jedne implicitne Runge–Kutta metode na najjednostavnijoj slojno–adaptivnoj mreži. Na kraju su dobijeni rezultati upoređeni.

1. Uvod

Diferencijalne jednačine koriste se za modeliranje raznih problema u prirodnim, inžinjerskim pa čak i u društvenim naukama. U velikom broju ovih problema zahtijeva se da rješenje diferencijalne jednačine zadovoljava i jedan dodatni uslov, početni uslov ili početnu vrijednost.

U realnim problemima, diferencijalne jednačine koje srećemo u matematičkim modelima, su i suviše teške da bismo ih tačno riješili, a nekada je to i nemoguće. Postoje dva pristupa za prevazilaženje prethodne situacije. Prvi pristup je u pojednostavljivanju date diferencijalne jednačine ili matematičkog modela, tako da možemo izračunati tačno rješenje diferencijalne jednačine, zatim dobijeno rješenje koristimo kao aproksimaciju realnog rješenja, to jest originalnog problema. Drugi pristup je da odmah računamo aproksimativno rješenje ili preciznije numeričko rješenje. U najvećem broju slučajeva, drugi pristup je bolji. Dakle, koristimo bolji matematički model, koji je "bliži" realnom problemu, te računamo odgovarajuće numeričko rješenje jer se skoro po pravilu u ovakvim matematičkim modelima pojavljuju "komplikovanije" diferencijalne jednačine, čija tačna rješenje ili ne možemo izračunati ili je to veoma teško.

U nastavku ovog rada razmatraćemo sljedeći Cauchyjev problem,

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Postavljaju se pitanja kada Cauchyjev problem ima rješenje i ako ono postoji da li je to rješenje jedinstveno? Odgovori na ova pitanja dati su u sljedećem teoremu.

Teorem 1.1. [2, pp 447] *Ako su f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidni na pravougaoniku definisanom sa $|x - x_0| < \alpha$ i $|y-y_0| < \beta$, tada Cauchyjev problem (1) ima jedinstveno neprekidno rješenje na nekom intervalu $|x-x_0| < \gamma$.*

Ciljna skupina: fakultet
Ključne riječi: Cauchyjev problem, Runge–Kutta metode, slojno-adativne mreže,
Kategorizacija: *Stručno-istraživački rad*
Rad preuzet: –, 2023.

Vrijednost konstante γ je najmanje $\frac{\beta}{M}$, gdje je M gornja granica za $|f(x,y)|$ na pravougaoniku definisanom u upravo navedenom teoremu.

Kako je već pomenuto, vrlo je uska klasa diferencijalnih jednačina koje se mogu tačno riješiti, pa se stoga pribjegava računanju numeričkog rješenja. Iz standardnih kurseva numeričke matematike poznate su metode za računanje ovakvog rješenja, npr. Eulerova i njene modifikacije, Taylorova, Runge–Kutta, višekoračne i dr.

Osim Cauchyjevog problema (1) često srećemo i njegovu modifikaciju kod koje je prvi izvod pomnožen nekim pozitivnim malim parametrom ε, $(0 < \varepsilon \leqslant 1$).

$$\begin{cases} \varepsilon y' = \tilde{f}(x,y), \quad 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \\ y(x_0,\varepsilon) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

gdje je $f(x,y) \in C^{n,n}([0,a] \times \mathbb{R})$, $n \geqslant 1$. Poslije dijeljenja prethodne diferencijalne jednačine sa parametrom ε, dobijamo

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \\ y(x_0,\varepsilon) = y_0, \end{cases} \tag{3}$$

gdje je $f(x,y) = \frac{\tilde{f}(x,y)}{\varepsilon}$. Neka je $\tilde{f}$ linearna funkcija po y, to jest neka vrijedi $\tilde{f}(x,y) = \tilde{p}(x)y + \tilde{q}(x)$, u ovom slučaju Cauchyjev problem (2) poprima sljedeći oblik

$$\begin{cases} \varepsilon y' = \tilde{p}(x)y + \tilde{q}(x), \quad 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \\ y(x_0,\varepsilon) = y_0. \end{cases}$$

Ponovo podijelivši prethodnu diferencijalnu jednačinu sa ε, dobijamo

$$\begin{cases} y' = p(x)y + q(x), \quad 0 < x, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \\ y(x_0,\varepsilon) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

gdje su $p(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\varepsilon}$ i $q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{\varepsilon}$.

Prisustvo parametra ε dovodi do brzih promjena tačnog rješenja y Cachyjevog problema (3) odnosno (4) u nekim dijelovima domena, o čemu će biti više riječi u sljedećoj sekciji. Zbog ovih brzih promjena, klasične metode su neadekvatne za numeričko rješavanje navedenih problema u kojima se pojavljuje perturbacioni parametar ε, stoga je bilo potrebno razviti nove efikasnije metode u kojima se uzima u obzir postojanje pomenutih brzih promjena tačnog rješenja.

Jedna od najširenijih metoda za rješavanje ovakvih problema je metoda slojno–adaptivnih mreža. Procjena tačnog rješenja i njegovih izvoda je veoma važna komponenta u konstruisanju slojno–adaptivnih mreža. U sljedećem teoremu date su ove procjena za problema (3), odnosno za tačno rješenje ovog problema.

Teorem 1.2. [4, pp 66] *Neka je $y(x,\varepsilon)$ rješenje problema* (3). *Tada za $0 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant x \leqslant a$, vrijede sljedeće procjene*

$$\left| y^{(i)}(x,\varepsilon) \right| \leqslant C \left\{ 1 + \varepsilon^{-i} \exp(-c(0)x/\varepsilon) \right\}, \tag{5}$$

ako je $f_y(x,y) \geqslant c(x) > 0$ i $c(x) \in C[0,a]$;

$$\left| y^{(i)}(x,\varepsilon) \right| \leqslant C \left[1 + \varepsilon^{-i/(k+1)} \exp(-mx^{k+1}/\varepsilon) + (\varepsilon^{1/(k+1)} + x)^{1-i} \right], \tag{6}$$

ako je $f_y(x,y) = x^k g(x,y)$ i $g_y(x,y) \geqslant c(x) > 0$, gdje je $c(x) \in C[0,a]$, $0 < m < c \min_{x \in [0,a]} c(x)$, $k \geqslant 1$ je pozitivan cio broj.

Primjedba 1.3. *Posmatrani Cauchyjev problem* (1) *je najjednostavniji, naime u ovom se problemu pojavljuje diferencijalna jednačina prvog reda. Umjesto diferencijalne jednačine prvog reda, može se pojaviti i diferencijalna jednačina višeg reda kao i sistem diferencijalnih jednačina. Svi ovi slučajevi su detaljno obrađeni u literaturi. Cilj ovog rada je da ukaže na probleme prilikom numeričkog rješavanja Cauchyjevih problema čija tačna rješenja imaju brze promjena, pa je sasvim dovoljno u ovoj nekoj početnoj fazi posmatrati samo Cauchyjeve problema sa diferencijalnom jednačinom prvog reda.*

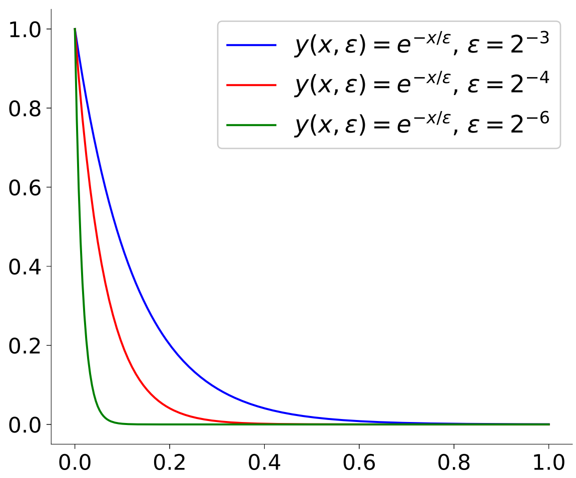
2. Slojno–adaptivne mreže

U ovoj sekciji dati su osnovni razlozi i ideje koje su dovele do konstruisanja slojno–adaptivnih mreža, kao i konstrukcija najjednostavnije slojno–adaptivne mreže. Analiziran je jednostavan Cauchyjev problem čije je tačno rješenje poznato. Numeričko rješenje, za različite vrijednosti perturbacionog parametra ε, izračunato je na ekvidistantnoj mreži i istaknuti su nedostaci u ovakvom pristupu. Upravo ovi nedostaci doveli su do razvoja slojno–adaptivnih mreža.

Posmatrajmo jednostavan testni Cauchyjev problem,

$$\begin{cases} \varepsilon y' = -y, \ x \in [0,1] \\ y(0,\varepsilon) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

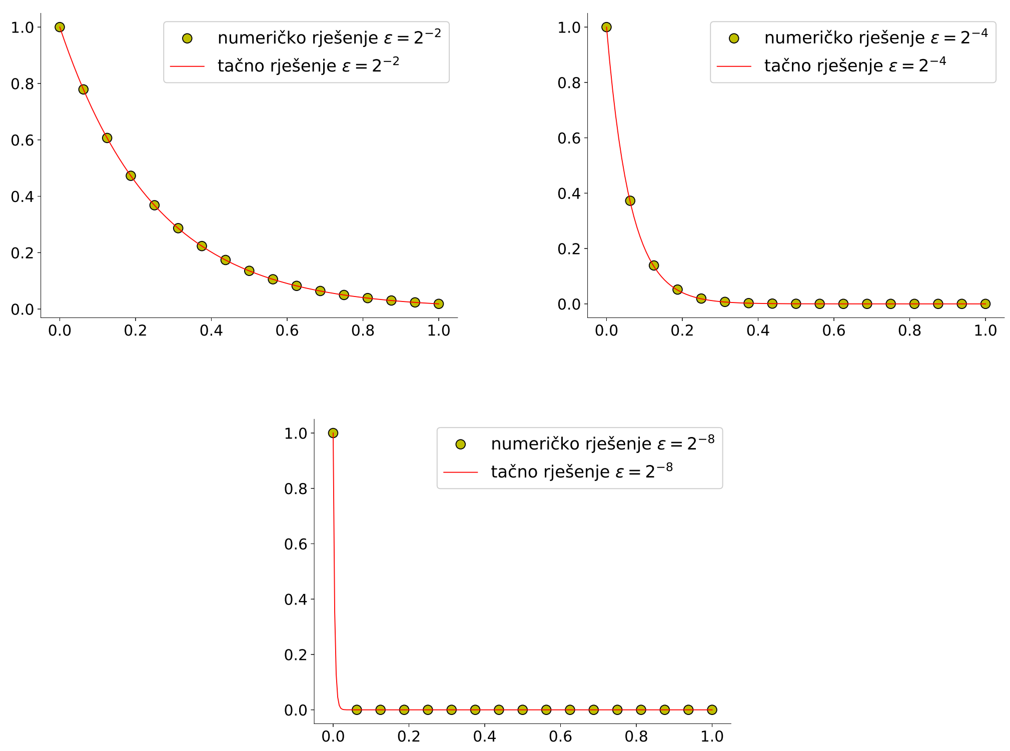
Tačno rješenje ovog problema je $y(x,\varepsilon) = e^{-x/\varepsilon}$. Grafici funkcije $y(x,\varepsilon)$ za $x \in [0,1]$ dati su na Slici 1, za tri različite vrijednosti parametra ε, $\varepsilon = 2^{-3}$, 2^{-4} i 2^{-6}. Sa grafika je jasno uočiti, a to se da zaključiti i na osnovu osobina funkcije $x \mapsto e^{-x}$, da funkcija ima brze promjene u nekoj okolini tačke $x = 0$.



Slika 1: Grafik funkcije $y(x,\varepsilon) = e^{-x/\varepsilon}$ za različite vrijednosti parametra ε

Ove promjene su brže što je manji parametar ε. Dio domena gdje se dešavaju ove brze promjene nazivamo sloj i ovo je sloj eksponencijalnog tipa.

Kao što je poznato, u opštem slučaju Cauchyjev problem ne možemo tačno riješiti, pa se pribjegava numeričkim metodama. U najvećem broju tih metoda podijelimo domen, na kojem je potrebno da odredimo rješenje, sa određenim brojem čvorova i primjenimo neku od metoda kojom ćemo izračunati numeričko rješenje. Isto tako u najvećem broju slučaju koristimo ravnomjernu ili uniformnu raspodjelu čvorova, to jest rastojanje između dva susjedna čvora je ekvidistantno. Skup čvorova kojim dijelimo neki segment nazivamo



Slika 2: Grafici tačnog i numeričkog rješenja na uniformnoj mreži

mreža. Ako npr. na segmentu $[0, 1]$ želimo izračunati numeričko rješenje nekog Cauchyjevog problema, podijelićemo ga čvorovima za koje vrijedi

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = 1.$$

Dakle, skup ovih čvorova $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, N$ je mreža.

Primjedba 2.1. *U savremenoj literaturi češće se koristi izraz tačka mreže umjesto čvor, pa ćemo u nastavku ovog rada koristi izraz tačka/tačke mreže.*

Ako su tačke mreže uniformno raspoređene onda je riječ je o uniformnoj ili ekvidistantnoj mreži, u suprotnom o neekvidistantnoj ili neuniformnoj mreži. Korak mreže ili parametar mreže je rastojanje između dvije susjedne tačke mreže. Kod uniformnih mreža korak mreže je konstantan, obično ga označavamo h i vrijedi $h = \frac{1}{N}$ ako je segment $[0, 1]$ na kojem se računa numeričko rješenje, u slučaju segmenta $[a, b]$ vrijedi $h = \frac{b-a}{N}$. Kod neuniformnih mreža korak mreže računamo $h_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Uniformne mreže su najjednostavnije pa je samim tim i analiza metoda, koje koriste ovakve mreže, jednostavnija od analize metoda koje koriste neuniformne mreže. Međutim, u mnogim slučajevima uniformne mreže nisu najbolje rješenje za primjenu.

Radi ilustracije zašto uniformne mreže nisu najbolji izbor za rješavanje Cauchyjevih problema, čija tačna rješenja imaju brze promjene, posmatrajmo Sliku 2. Na slici su predstavljeni grafici tri numerička i tri tačna rješenja Cauchyjevog problema (7).

Gore lijevo su grafici numeričkog i tačnog rješenja za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-2}$. Rubni sloj u okolini tačke $x = 0$ vrlo je slabo izražen, te je lako uočiti da su tačke koje predstavljaju numeričko rješenje dosta dobro raspoređene na čitavom grafiku. Doduše nešto rjeđe u sloju, ali i dalje zadovoljavajuće.

Na slici gore desno prikazani su grafici obje vrste rješenja ali sada za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-4}$. Već je bolje izražen sloj i odmah se uočava lošija raspodjela tačaka numeričkog rješenja.

Na Slici 2 dole su grafici numeričkog i tačnog rješenja ali za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-8}$. Sloj je sada u veoma uskom dijelu u odnosu na domen, što znači da su promjene tačnog rješenja veoma velike, to jest tačno rješenje se veoma brzo mijenja u sloju.

Treba napomenuti da je korišten isti broj tačaka za računanje numeričkog rješenja u sva tri slučaja, te da je rastojanje između dvije susjedne tačke mreže ekvidistantno. Sa posljednje slike vidimo da tačke koje predstavljaju numeričko rješenje nisu dobro raspoređene, u dijelu grafika koji odgovara sloju nema niti jedna tačka numeričkog rješenja, osim tačke koje odgovara početnom uslovu $y(x_0, \varepsilon) = y_0$. Ovo nije dobra opcija jer nemamo nikakvu informaciju o rješenju u sloju. Da bi se prevazišao ovaj problem možemo povećati broj tačaka, to jest smanjiti rastojanje između dvije susjedne tačke, te bi na taj način podijelili dio domena koji odgovara sloju sa dovoljnim brojem tačaka. Međutim, ovakav pristup je loš sa praktične/kompjutacione strane. Naime, sloj je za ovaj problem širine reda $\mathcal{O}(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$. Neka je greška metode reda $\mathcal{O}(h^3)$, što je uobičajeni red veličine za Runge–Kutta metode drugog reda i neka se zahtijeva da greška ne bude veća od 10^{-6}, ponovimo segment na kojem računamo numeričko rješenje je $[0, 1]$. Sada iz nejednakosti $h^3 \leqslant 10^{-6}$ dobijamo da je $h \leqslant 10^{-2}$, drugim riječima segment $[0, 1]$ potrebno je podijeliti na 100 podsegmenata odnosno broj tačaka je $N = 101$. Ovakavo rezonovanje vrijedi kada tačno rješenje nema sloja, ali naš Cauchyjev problem ima sloj i tu činjenicu moramo uzeti u obzir. Neka je $\varepsilon = 10^{-4}$ i sloj je u ovom slučaju širok $\varepsilon|\ln\varepsilon| = 10^{-4}|\ln 10^{-4}| \approx 9 \cdot 10^{-4}$. Da bi bar jedna tačka mreže bila u sloju mora biti ispunjen uslov $h < 0.0009$. Grubo govoreći, broj tačaka mreže mora biti veći od 1111, a to je više od deset puta u odnosu na $N = 101$ i to da bi samo jedna tačka mreže bila u sloju. Naravno, potrebno je mnogo više tačaka od jedne u sloju, pa bi i broj tačaka mreže bio mnogo veći od 1111, odnosno mnogo više od deset puta bi trebalo povećati broj tačaka mreže.

Prethodna diskusija je opisala samo jedan od razloga zašto uniformne mreže nisu pogodne za rješavanje Cauchyjevih problema koji imaju izražene slojeve. Metode koje se koriste za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačina, uobičajeno se poopštavaju (kada je to moguće) i konstruišu metode za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ovaj problem sa velikim povećanjem broja tačka postao bi i veći prelaskom na numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Da bi se izbjegao prethodno opisani problem potreban je drugačiji pristup numeričkom rješavanju Cauchyjevih problema (3), nego što je povećanje broja tačaka uniformne mreže. Jedno od mogućih rješenja u prevazilaženju ovog problema je upotreba mreža koje imaju neunifomnu raspodjelu tačaka. Ovaj pristup pokazao se veoma efikasnim u numeričkom rješavanju rubnih problem. Vratimo se ponovo na Sliku 2 dole. U slučaju korištenja uniformne mreže potrebno je enormno povećati broj tačaka da bi ih bilo dovoljno u sloju. Da bi se izbjeglo povećanje broja tačaka mreže, a samim tim i nepotrebno povećanje vremena računanja a i nepotrebno trošenje resursa računara, potrebno je izvršiti drugačiju raspodjelu tačaka mreže. Ovo radimo na sljedeći način: od ukupnog broja tačaka mreže N jedan dio tačaka koristimo za sloj, dok preostale tačke koristimo za dio mreže koji odgovara domenu van sloja. Rastojanje tačaka u sloju je po pravilu manje od rastojanja preostalih tačaka koje koristimo van sloja.

Jedan od načina generisanje ovakve neuniformne (neekvidistantne) mreže vrši se generativnom funkcijom ϕ, $\phi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$. Ovo je složena funkcija i sastavljena je najmanje od dvije druge funkcije, jedna služi za generisanje tačaka mreže u sloju, a druga za generisanje tačaka van sloja.

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} \phi_1(\xi, \varepsilon), & \xi \in [0, \alpha], \\ \phi_2(\xi, \varepsilon), & \xi \in (\alpha, 1]. \end{cases} \tag{8}$$

Vrijednost parametra α određuje koliko će tačaka mreže biti u sloju, a koliko van sloja. Kada je poznat analitički oblik funkcije ϕ neuniformnu mrežu nije teško generisati. Polazimo od uniformne mreže $\xi_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $h = 1/N$; i tačke neuniformne mreže dobijamo na sljedeći način

$$x_i = \phi(\xi_i, \varepsilon),\ i = 0, 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Postavlja se pitanje kako konstruisati generativnu funkciju ϕ? Polazna tačka za konstruisanje generativne funkcije su procjene izvoda tačnog rješenja. Iz Teorema 1.2 lako je uočiti da u procjeni izvoda tačnog rješenja figuriše eksponencijalna funkcija, stoga očekujemo da funkcija kojom generišemo tačke mreže u sloju bude neka logaritamska funkcija. Drugi dio generativne funkcije (druga funkcija) je obično neki polinom kojim generišemo tačke mreže van sloja. Ovaj drugi dio generativne funkcije se bira tako da generativna funkcija bude barem neprekidna na čitavom domenu.

Prvu neuniformnu mrežu konstruisao je Bakhvalov ([1]) upravo koristeći logaritamsku funkciju za generisanje tačaka u sloju, dok je za generisanje tačaka mreže van sloja koristio linearnu funkciju. Nakon toga Vulanović ([10]) pojednostavljuje konstruisanje generativne funkcije, a važno je napomenuti i veliki doprinos Liseikina ([4, 5, 7]) u konstruisanju mnogih generativnih funkcija odnosno neuniformnih mreža.

U nastavku ovog rada koristimo najjednostavniju neuniformnu mrežu, koju je konstruisao Shishkin ([9]). Ova mreža je sastavljena iz dvije uniformne mreže, jedne sa finijom raspodjelom tačaka (manje rastojanje između tačaka) i drugom grubljom (veće rastojanje između tačaka). Shishkin je konstruisao mrežu koja služi za rješavanje rubnih problema koji imaju eksponencijalni sloj. Pokazao je da funkcija ϕ_1 (koja generiše tačke u sloju) ne mora biti logaritamskog tipa, nego mnogo jednostavnija linearna fukcija, Slika 3. Shishkinovu mrežu možemo shvatiti kao dvije uniformne mreže spojene na odgovarajući način. Dobijena mreža ima boljih i lošijih osobina u odnosu na mreže koje su konstruisali Bakhvalov i Liseikin. Jednostavnija je analiza metoda koje koriste Shishkinovu mrežu u odnosu na Bakhvalovu mrežu i Liseikinove mreže, međutim greška je veća kod upotrebe Shishkinove mreže. Važno je napomenuti da je broj problema koji se mogu efikasno riješiti upotrebom Shishkinove mreže mnogo manji od broja problema koji se mogu riješiti upotrebom veoma fleksibilnih Liseikinovih mreža. Generativna funkcija za Shishkinovu mrežu data je sljedećom formulom

$$\phi(\xi,\varepsilon)=\begin{cases}2\sigma\xi, & 0\leqslant\xi\leqslant\alpha,\\ \sigma+\dfrac{1-\sigma}{1-\alpha}\xi, & \alpha<\xi\leqslant 1,\end{cases} \tag{10}$$

gdje je $\alpha\in(0,1)$, $\sigma=\min\{0.5,(n/b)\varepsilon\ln N\}$, $b>0$ i $n\geqslant 1$. Veličina σ je tranziciona tačka mreže ili Shishkinova tranziciona tačka i ona određuje mjesto prelaska sa fine na grubu mrežu. Prilikom korištenja Shishkinove mreže za numeričko rješavanje rubnih problema, tipična vrijednost parametra n odgovara stepenu konvergencije metode, dok je parametar b određen Teoremom o procjeni izvoda i $\alpha=1/2$.

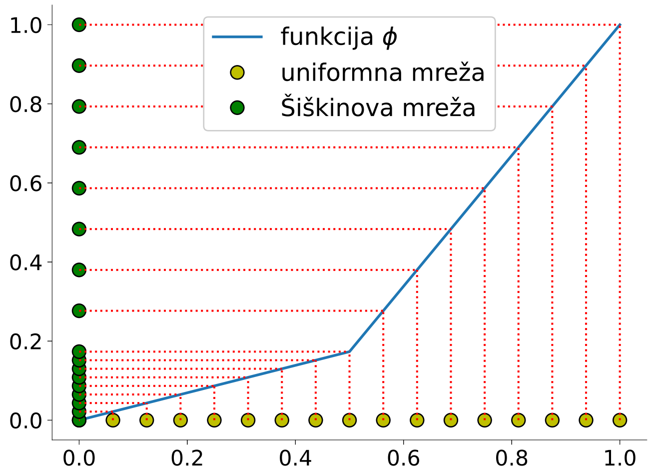
Polazeći sada od generativne funkcije ϕ date formulom (10), Shishkinovu mrežu generišemo koristeći formulu (9). Na Slici 3 dat je grafik funkcije ϕ (plava boja). U funkciju ϕ uvrštavamo vrijednosti $\xi_i=ih$, $i=0,1,\ldots,N$; koje odgovaraju tačkama uniformne mreže. Ove su tačke predstavljene na Slici 3 žutom bojom i nalaze se na x–osi. Odgovarajuće vrijednosti funkcije $\phi(ih)$ predstavljene su zelenom bojom i predstavljene su na y–osi, ovo su tačke Shishkinove mreže, to jest $x_i=\phi(ih)=\phi(\xi_i)$, $i=0,1,\ldots,N$.

Na Slici 4 predstavljene su tačke uniformne mreže i dobijene tačke Shishkinove mreže. Sa Slike 4 (desno) vidi se neuniformna raspodjela tačaka mreže, takođe nije teško primijetiti da su tačke mreže kondenzovane u okolini tačke $x=0$. Ponovimo, u okolini tačke $x=0$ je sloj i da bi se problem koji nastaje zbog brzih promjena tačnog rješenja u sloju riješio na odgovarajući način, potrebna je ovakva raspodjela tačaka.
Više detalja o slojno–adaptivnim mrežama i njihovoj konstrukciji, za razne probleme te različite vrste slojeva, može se naći u Liseikin i dr. ([6]).

Primjedba 2.2. *Prethodno opisani problem, koji je naveden kao razlog korištenja slojno–adaptivnih mreža pri numeričkom rješavanje Cauchyjevih problema* (3)*, u literaturi se naziva i ekonomičnost računanja. Osim prevazilaženja ovog problema uvođenjem slojno–adaptivnih mreža pri numeričkom rješavanju problema* (3) *i sličnih, rješava se i problem stabilnost. Ovo je vrlo ozbiljan problem i prevazilazi okvire ovog rada, stoga ćemo se stabilnosti samo dotaći u numeričkim eksperimentima na kraju rada.*

3. Runge–Kutta metode

Veoma uspješne, u numeričkom rješavanju Cauchyjevih problema, pokazale su se Runge–Kutta metode ([3, 8]). Ovo su jednokoračne metode, dakle u Runge–Kutta metodama za računanje numeričke vrijednosti u tački x_{i+1} to jest y_{i+1}, koristi se samo jedna prethodno izračunata vrijednost y_i, ona koja odgovara tački



Slika 3: Generisanje Shishkinove mreže iz uniformne mreže funkcijom ϕ

Slika 4: Uniformna (lijevo) i Shishkinova mreža (desno)

x_i. Ove dvije vrijednosti x_i i y_i koriste se za računanje aproksimativne jedne ili više vrijednosti funkcije f. Broj ovih aproksimativnih vrijednosti povezan je sa redom ili nivoom Runge–Kutta metoda.

Opšti oblik Runge–Kutta metoda s–tog reda (ili nivoa) je

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^{s} b_j k_j, \tag{11}$$

gdje je

$$k_j = f\left(x_i + c_j h_i, y_i + h_i \sum_{q=1}^{s} a_{j,q} k_q\right), \; j = 1, 2, \dots, s, \tag{12}$$

dok su y_i i y_{i+1} aproksimativne (ili numeričke) vrijednosti koje odgovaraju čvorovima x_i i x_{i+1}, respektivno.

Koeficijenti, koji se pojavljuju u formulama (11) i (12), predstavljeni su u Tabeli 1, a ona predstavlja punu ili implicitnu Runge–Kutta metodu s–tog reda. Osim implicitnih postoje i eksplicitne Runge–Kutta metode. Između ove dvije vrste metoda razlika je u sljedećem: kod eksplicitnih metoda veličine k_j, $j = 1, \dots, s$, računamo koristeći samo prethodno izračunate vrijednosti $k_1, \dots, k_{j-1}$, za razliku od implicitnih gdje se za računanje veličine k_j mogu koristiti sve veličine $k_1, \dots, k_s$. Razlika između eksplicitnih i implicitnih metoda dobro je objašnjena u literaturi. Uobičajeno, implicitne metode su komplikovanije, samim tim su teže za korištenje. U slučaju kada je f nelinearna funkcija potrebno je u svakom koraku riješiti nelinearni sistem jednačina. Ali isto tako poznato je da su bolje od eksplicitnih metoda po pitanju stabilnosti.

U Tabeli 2 dati su koeficijenti eksplicitne Runge–Kutta metode s–tog reda.

Isto tako u literaturi pokazano je kako se računaju koeficijenti iz Tabele 1 ili 2 na više načina.

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,s} \\ c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$$

Tabela 1: Butcherov niz za punu (implicitnu) Runge–Kutta metodu

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s-1} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

Tabela 2: Butcherov niz za eksplicitnu Runge–Kutta metodu

Eksplicitne Runge–Kutta metode drugog reda. Sada ćemo izračunati koeficijente za eksplicitne Runge–Kutta metode drugog reda. Odgovarajući koeficijenti dati su Tabeli 3.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{2,1} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Tabela 3: Butcherov niz za eksplicitnu Runge–Kutta metodu reda $s = 2$

Numeričku vrijednost y_{i+1} koja odgovara tački mreže x_{i+1} tačnog rješenja y računamo po formuli

$$y_{i+1} = y_i + h_i(b_1k_1 + b_2k_2), \tag{13}$$

gdje su

$$k_1 = f(x_i + c_1h_i, y_i + h_ia_{1,1}k_1)$$

i

$$k_2 = f(x_i + c_2h_i, y_i + h_ia_{2,1}k_1).$$

Kako je iz tabele 3, $c_1 = 0$ i $a_{1,1} = 0$, to dobijamo

$$y_{i+1} = y_i + h_i\left[b_1f(x_i, y_i) + b_2f(x_i + c_2h_i, y_i + h_ia_{2,1}f(x_i, y_i))\right]. \tag{14}$$

Koeficijente b_1, b_2, c_2 i $a_{2,1}$ određujemo upoređujući Taylorove razvoje za y_{i+1} i $y(x_{i+1})$. Vrijedi

$$y_{i+1} = y_i + h_ib_1f(x_i, y_i) + h_ib_2\left[f(x_i, y_i) + f_x(x_i, y_i)c_2h_i + f_y(x_i, y_i)h_ia_{2,1}f(x_iy_i) + \mathcal{O}(h_i^2)\right] \tag{15}$$

i

$$\begin{aligned} y(x+1) &= y(x_i) + y'(x_i)h_i + \frac{y''(x_i)}{2}h_i^2 + \mathcal{O}(h_i^3) \\ &= y(x_i) + f(x_i, y_(x_i))h_i + \frac{1}{2}\left[f_x(x_i, y(x_i)) + f_y(x_i, y(x_i))f(x_i, y(x_i))\right]h_i^2 + \mathcal{O}(h_i^3). \end{aligned} \tag{16}$$

Upoređujući sada izraze iz (15) koji su uz h_i sa izrazima iz (16) takođe uz h_i, te ovaj postupak ponovimo i za h_i^2, dobijamo sistem

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = \dfrac{1}{2} \\ b_2 a_{2,1} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{17}$$

Sistem (17) je nelineran sa 3 jednačine i 4 nepoznate i ne možemo ga jednoznačno riješiti. Sljedeća rješenja, odnosno metode se najčešće koriste:

1)

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = \dfrac{1}{2},\ c_2 = a_{2,1} = 1, \\ k_1 = f(x_i, y_i),\ k_2 = f(x_i + h_i, y_i + k_1), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{2} h_i (k_1 + k_2), \end{cases} \tag{18}$$

2)

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{4},\ b_2 = \dfrac{3}{4},\ c_2 = a_{2,1} = \dfrac{2}{3}, \\ k_1 = f(x_i, y_i),\ k_2 = f(x_i + \frac{2}{3} h_i, y_i + \frac{2}{3} k_1), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{4} h_i (k_1 + 3k_2), \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ c_2 = a_{2,1} = \dfrac{1}{2}, \\ k_1 = f(x_i, y_i),\ k_2 = f(x_i + \frac{1}{2} h_i, y_i + \frac{1}{2} k_1), \\ y_{i+1} = y_i + h_i k_2. \end{cases}$$

Eksplicitne Runge–Kutta metode trećeg reda. Navedeni postupak možemo iskoristiti i za dobijanje Runge–Kuta metoda višeg reda od dva. Za dobijanje metoda trećeg reda, potrebno je samo u formulama (15) i (16) u razvoj uključiti i druge izvode i iskoristiti izraze uz h_i^3. Na taj način neke od formula koje dobijamo su

1)

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i),\ k_2 = f(x_i + \frac{1}{2} h_i, y_i + \frac{1}{2} k_1),\ k_3 = f(x_i + \frac{3}{4} h_i, y_i + \frac{3}{4} k_2), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{9} h_i (2k_1 + 3k_2 + 4k_3), \end{cases} \tag{19}$$

2)

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i),\ k_2 = f(x_i + \frac{1}{2} h_i, y_i + \frac{1}{2} k_1),\ k_3 = f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6} h_i (k_1 + 4k_2 + k_3). \end{cases}$$

Ostale eksplicitne sheme višeg reda dobijaju se na analogan način.

Implicitna Runge–Kutta metoda drugog reda. Nije teško primijetiti da kod eksplicitnih Runge-Kutta metoda, koeficijente sa većim indeksom računamo koristeći koeficijente sa manjim indeksom, npr. kod eksplicitne Runge–Kutta metode trećeg reda, k_2 računamo koristeći k_1, dok k_3 računamo preko k_1 i k_2. Dakle, za računanje nekog koeficijenta koristimo već izračunate vrijednosti drugih koeficijenata. Ovo nije slučaj sa implicitnim metodama, kao što ćemo vidjeti na sljedećem primjeru. Sljedeću implicitnu metodu,

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i + (\frac{1}{2} - \gamma)h_i, y_i + \frac{1}{4}h_i k_1 + (\frac{1}{4} - \gamma)h_i k_2) \\ k_2 = f(x_i + (\frac{1}{2} + \gamma)h_i, y_i + (\frac{1}{4} + \gamma)h_i k_1 + \frac{1}{4}h_i k_2) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h_i(k_1 + k_2), \end{cases} \tag{20}$$

gdje je $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6}$, koristimo u numeričkim eksperimentima. Iz formule (20) vidimo da se u izrazu za računanje koeficijenta k_1 pojavljuje koeficijent k_2 i obrnuto. Ovo je razlog zašto se ovakve metode nazivaju implicitnim.

Da bi izračunali numeričku vrijednost y_{i+1} potrebno je da znamo y_i, k_1 i k_2, zbog toga moramo u svakom koraku riješiti sistem

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i + (\frac{1}{2} - \gamma)h_i, y_i + \frac{1}{4}h_i k_1 + (\frac{1}{4} - \gamma)h_i k_2) \\ k_2 = f(x_i + (\frac{1}{2} + \gamma)h_i, y_i + (\frac{1}{4} + \gamma)h_i k_1 + \frac{1}{4}h_i k_2), \end{cases} \tag{21}$$

po nepoznatim k_1 i k_2. U zavisnosti od funkcije f ovo je linearni ili nelinearni sistem od dvije jednačine. U slučaju kada je funkcija f linearna, kao što je slučaj u (4), ovaj sistem (koji postaje sistem dvije linearne algebarske jednačine) možemo simbolički riješiti po k_1 i k_2, te ova rješenja uvrstiti u izraz $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Kada je f nelinearna funkcija situacija je dosta komplikovanija, tada je potrebno u svakom koraku rješavati nelinearni sistem.

Ograničićemo se samo na linearni slučaj (4), sada sistem (21) poprima novi oblik

$$\begin{cases} k_1 = p_i^{(1)}\left[y_i + \frac{1}{4}h_i k_1 + \left(\frac{1}{4} - \gamma\right)h_i k_2\right] + q_i^{(1)} \\ k_2 = p_i^{(2)}\left[y_i + \left(\frac{1}{4} + \gamma\right)h_i k_1 + \frac{1}{4}h_i k_2\right] + q_i^{(2)}, \end{cases} \tag{22}$$

odnosno

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(1)}h_i\right)k_1 - p_i^{(i)}\left(\frac{1}{4} - \gamma\right)h_i k_2 = p_i^{(1)}y_i + q_i^{(i)} \\ -p_i^{(2)}\left(\frac{1}{4} + \gamma\right)h_i k_1 + \left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(2)}h_i\right)k_2 = p_i^{(2)}y_i + q_i^{(2)}, \end{cases} \tag{23}$$

gdje su $p_i^{(1)} = p(x_i + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)h_i)$, $p_i^{(2)} = p(x_i + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)h_i)$, analogno vrijedi i za $q_i^{(1)}$ i $q_i^{(2)}$. Rješavajući prethodni sistem po k_1 i k_2, te uvrštavajući dobijene izraze u treći izraz iz (20) dobijamo

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h_i \frac{\left(p_i^{(1)}y_i + q_i^{(1)}\right)\left(1 + p_i^{(2)}\gamma h_i\right) + \left(p_i^{(2)}y_i + q_i^{(2)}\right)\left(1 - p_i^{(1)}\gamma h_i\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(1)}h_i\right)\left(1 - \frac{1}{4}p_i^{(2)}h_i\right) - p_i^{(1)}p_2^{(2)}\left(\frac{1}{16} - \gamma^2\right)h_i^2}, \; i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{24}$$

Prethodna formula predstavlja implicitnu metodu (20) u slučaju kada je f linearna funkcija ($f(x, y) = p(x)y + q(x)$), to jest kada je diferencijalna jednačina linearna.

4. Numerički ekperimenti

U ovoj sekciji biće testirane metode date u prethodnom dijelu rada na Shishkinovoj mreži koja je generisana funkcijom (10). Veličine koje ćemo računati u ovim numeričkim ekperimentima su vrijednost greške E_N i brzina konvergencije Ord. Računamo ih po formulama

$$E_N = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \left| y(x_i) - y_i^N \right|, \tag{25}$$

$$\mathrm{Ord} = \frac{\ln E_N - \ln E_{2N}}{\ln(2k/(k+1))}, \tag{26}$$

gdje je $N = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, dok $y(x_i)$ predstavlja vrijednost tačnog rješenja Cauchyjevog problema u tački mreže x_i, a y_i^N je vrijednost odgovarajućeg numeričkog rješenja, takođe u tački mreže x_i, ali koje je izračunato na mreži sa $N + 1$ tačkom.

Primjer 1. *Dat je Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} \varepsilon y' = -xy + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon} + x\left(x - e^{-x/\varepsilon} + 1\right), & 0 \leqslant x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tačno rješenje ovog Cauchyjevog problema je $y(x) = x - e^{-x/\varepsilon} + 1$.

Mrežu za računanje numeričkog rješenja generišemo koristeći generativnu funkciju (3). *Vrijednosti parametara, koji su korišteni u numeričkim eksperimentima, su* $n = 2$, $b = 1$ *i* $\alpha = 1/2$. *Vrijednosti perturbacionog parametra* ε *i broja tačaka* N *dati su u tabelama.*

U Tabelama (4), (5), (6), *predstavljene su vrijednosti* E_n *i* Ord, *za Runge–Kutta metode* (18), (19) *i* (24), *respektivno.*

	$\varepsilon = 2^{-2}$		$\varepsilon = 2^{-4}$		$\varepsilon = 2^{-6}$		$\varepsilon = 2^{-8}$		$\varepsilon = 2^{-10}$	
N	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord
2^{10}	1.49e-06	2.00	1.03e-05	2.00	1.31e-05	2.00	2.78e-05	2.68	3.00e-04	3.30
2^{11}	4.51e-07	2.00	3.13e-06	2.00	3.96e-06	2.00	5.61e-06	2.38	4.09e-05	3.20
2^{12}	1.34e-07	2.00	9.32e-07	2.00	1.81e-06	2.00	1.33e-06	2.04	5.88e-06	2.98
2^{13}	3.94e-08	2.00	2.74e-07	2.00	3.46e-07	2.00	3.81e-07	2.00	9.45e-07	2.69
2^{14}	1.14e-08	2.00	7.93e-08	2.00	1.00e-07	2.00	1.10e-07	2.00	1.78e-07	2.42
2^{15}	3.28e-09	2.00	2.28e-08	2.00	2.88e-08	2.00	3.17e-08	2.00	3.94e-08	2.22
2^{16}	9.34e-10	2.00	6.48e-09	2.00	8.20e-09	2.00	9.01e-09	2.00	9.76e-09	2.07
2^{17}	2.64e-10	-	1.83e-09	-	2.31e-09	-	2.54e-09	-	2.64e-09	-

Tabela 4: Vrijednosti greške E_N i brzine konvergencije Ord za različite vrijednosti N i ε

	$\varepsilon = 2^{-2}$		$\varepsilon = 2^{-4}$		$\varepsilon = 2^{-6}$		$\varepsilon = 2^{-8}$		$\varepsilon = 2^{-10}$	
N	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord
2^{10}	2.34e-09	3.00	5.40e-09	3.00	2.23e-09	3.68	3.30e-09	3.04	2.01e-09	3.18
2^{11}	3.86e-10	3.00	8.97e-10	3.00	2.46e-10	3.00	5.34e-10	3.02	3.00e-10	3.10
2^{12}	6.27e-11	3.00	1.45e-10	3.00	3.99e-11	3.00	8.54e-11	3.01	4.56e-11	3.06
2^{13}	9.96e-12	3.00	2.30e-11	3.00	6.33e-12	3.00	1.34e-11	3.00	6.98e-12	3.03
2^{14}	1.55e-12	3.00	3.60e-12	2.99	9.88e-13	2.96	2.09e-12	2.99	1.06e-12	3.01
2^{15}	2.38e-13	3.03	5.55e-13	2.90	1.55e-13	2.61	3.23e-13	3.06	1.62e-13	2.62
2^{16}	3.53e-14	-3.22	8.94e-14	2.53	2.99e-14	-0.65	4.70e-14	-0.21	3.13e-14	-0.59
2^{17}	2.70e-13	-	1.79e-14	-	4.52e-14	-	5.39e-14	-	4.55e-14	-

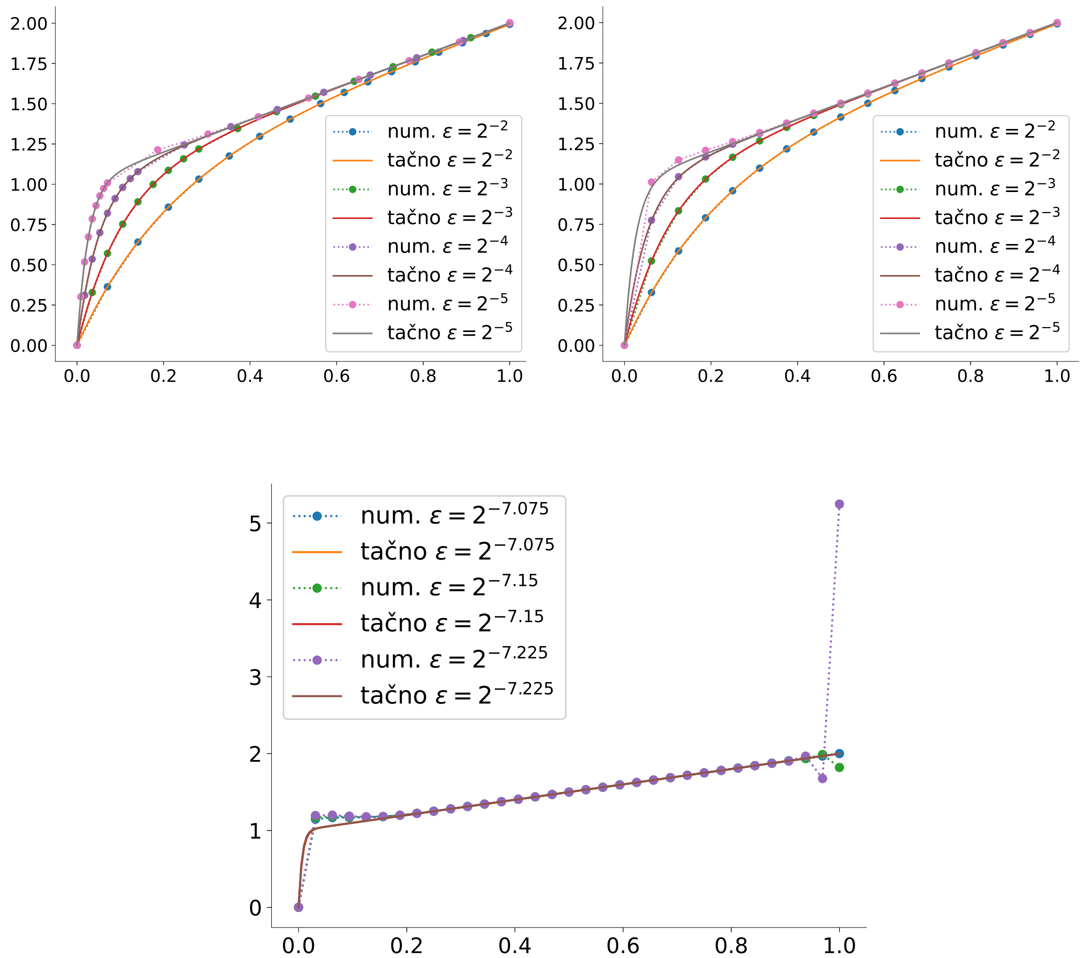
Tabela 5: Vrijednosti greške E_N i brzine konvergencije Ord za različite vrijednosti N i ε

5. Diskusija i zaključak

U ovom radu razmatrano je numeričko rješavanje Cauchyjevog problema, čije rješenje ima izražen sloj. Navedeni su razlozi korištenja slojno–adaptivnih mreža pri numeričkom rješavanju diferencijalnih jednačina, čija tačna rješenja imaju brze promjene. Ova teorija je dobro razvijena za rješavanje rubnih problema i u ovom radu ista metodologija je primjenjena za rješavanje Cauchyjevog problema.

	$\varepsilon = 2^{-2}$		$\varepsilon = 2^{-4}$		$\varepsilon = 2^{-6}$		$\varepsilon = 2^{-8}$		$\varepsilon = 2^{-10}$	
N	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord	E_N	Ord
2^{10}	5.84e-5	5.15	5.19e-5	5.17	4.58e-5	5.19	4.01e-5	5.21	3.48e-5	5.23
2^{11}	2.68e-6	5.19	2.35e-6	5.21	2.05e-6	5.23	1.77e-6	5.25	1.52e-6	5.28
2^{12}	1.15e-7	5.16	9.98e-8	5.18	8.59e-8	5.20	7.32e-8	5.22	6.18e-8	5.25
2^{13}	4.84e-9	5.12	4.15e-9	5.14	3.53e-9	5.16	2.97e-13	5.18	2.47e-9	5.20
2^{14}	2.03e-10	5.08	1.72e-10	5.10	1.44e-10	5.12	1.19e-10	5.14	9.84e-11	5.16
2^{15}	8.50e-13	5.08	7.13e-12	5.10	5.91e-12	5.13	4.83e-12	5.12	3.90e-12	5.23
2^{16}	3.48e-13	3.73	2.88e-13	2.31	2.34e-13	2.01	1.93e-13	2.36	1.45e-13	1.19
2^{17}	4.10e-14	-	6.68e-14	-	6.55e-14	-	4.32e-14	-	6.38e-14	-

Tabela 6: Vrijednosti greške E_N i brzine konvergencije Ord za različite vrijednosti N i ε



Slika 5: Grafici tačnog i numeričkog rješenja na Shishkinovoj (lijevo–gore), uniformnoj mreži (desno–gore) za $N = 32$ i vrijednosti perturbacionog parametra $\varepsilon = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-6}$; grafici tačnog i numeričkog rješenja na uniformnoj mreži za $N = 32$ i $\varepsilon = 2^{-7.075}, 2^{-7.15}, 2^{-7.225}$

Prvo je korištena Runge–Kutta metoda (18) na mreži generisanoj sa (10). U Tabeli 4 su odgovarajuće vrijednosti E_n i Ord. Ova Runge–Kutta metoda je drugog reda, u klasičnoj teoriji (uniformna mreža, tačna rješenja nemaju izražene brze promjene) greška metode je $\mathcal{O}(h^3)$, odnosno brzina konvergencije je

3. Izračunata vrijednost parametra Ord je 2 ili je bliska ovoj vrijednosti, osim u posljednjoj koloni za vrijednost parametra $\varepsilon = 2^{-10}$, gdje vrijednost Ord počinje sa 3.22 za $N = 2^{10}$ i blago se smanjuje do 2.07 za $N = 2^{17}$. Ove vrijednosti nagovještavaju ε–uniformnu konvergenciju, osobinu koja se zahtijeva od metoda koje se koriste za rješavanje Cauchyjevih i rubnih problema čija rješenja imaju izražene brze promjene. Grubo govoreći, metoda ima osobinu ε–uniformne konvergencije, ako vrijednost greške (dobijena u odgovarajućoj normi–uobičajeno maksimum vektorska norma) ne izlazi iz dobijenih teorijskih okvira pri smanjenju perturbacionog parametra ε. Treba napomenuti da se računanje vrijednost parametra Ord blago razlikuje u slučaju korištenja uniformne i Shishkinove mreže.

U Tabeli 5 su vrijednosti E_n i Ord, ali sada je korištena Runge–Kutta metoda (19) na mreži generisanoj sa (10). U klasičnoj teoriji vrijednost greške za ovu metodu je reda $\mathcal{O}(h^4)$, i brzine konvergencije je 4. Iz priložene tabele vidimo da je vrijednost parametra Ord 3 ili je bliska ovoj vrijednosti za broj tačaka mreže $N = 2^{10}$ do $N = 2^{15}$. Povećanjem broja tačaka $N = 2^{16}$ i dalje, dolazi do smanjenja vrijednosti parametra Ord, te čak njegova vrijednost postaje i negativna. Ovakvo ponašanje metode nije poželjno i može se objasniti akumulacijom vrijednosti greške, koja je prisutna pri numeričkom rješavanju Cachyjevih problema tipa (3) i sličnih.

U posljednjoj, Tabeli 6, su vrijednosti dobijene korištenjem (24) i mreže generisane sa (10). Ovo je Runge–Kutta implicitna metoda drugog reda, vrijednost greške je $\mathcal{O}(h^3)$, odnosno brzina konvergencije je 3. Dobijene vrijednosti su veće od 5 za broj tačaka mreže $N = 2^{10}$ do $N = 2^{15}$, povećanje broja tačaka vrijednost parametra Ord naglo se smanjuje. Ovako velika odstupanja izračunatih vrijednosti od teorijskih nisu ni u ovom slučaju poželjna.

Na Slici 5 gore lijevo, su grafici tačnih i numeričkih rješenja za različite vrijednosti perturbacionog parametra ε. Sva numerička rješenja su dobijena korištenjem $N = 33$ tačke. Sa grafika lako je uočiti da se smanjivanjem parametra ε sloj sužava, odnosno da je promjena tačnog rješenja koji odgovara tom dijelu domena sve brža. Evidentno, tačke numeričkog rješanja su dobro raspoređene i u sloju, a to se postiže fleksibilnom konstrukcijom mreže. Sa druge strane na Slici 5 gore desno, predstavljeni su grafici tačnih i numeričkih rješenja. Ovaj put za računanje numeričkih rješenja korištena je uniformna mreža. Nije teško uočiti lošu osobinu korištenja uniformnih mreža za numeričko rješavanje problema (3) i njemu sličnih. Naime, smanjivanjem parametra ε, uz korištenje istog broja tačaka mreže, sve je manji broj tačaka mreže u sloju, odnosno rastojanje između dvije tačke numeričkog rješenja postaje neprihvatljivo veliko.

I na kraju, na posljednjoj Slici 5 dole, predstavljeni su grafici tačnih i numeričkih rješenja za različite vrijednosti parametra ε i broj tačka $N = 33$. Promjena parametra ε je veoma mala i na grafiku se ne mogu uočiti razlike između tačnih rješenja. Međutim razlika između numeričkih rješenja je velika. Na lijevoj strani grafika, vidi se da nema dovoljno tačaka mreže u sloju i da su tačke numeričkog rješenja previše udaljene jedna od druge, te da je vrijednost greške velika (rastojanje tačaka numeričkog rješenja od grafika tačnog rješenja). Sa desne strane grafika, situacija je lošija, pošto se pojavljuju oscilatorna rješenja. Plavim tačkama predstavljeno je numeričko rješenje za $\varepsilon = 2^{-7.075}$, i ne moše se uočiti sa grafika, da ovo rješenje odstupa od tačnog u okolini $x = 1$. Zelenim tačkama predstavljeno je numeričko rješenje za $\varepsilon = 2^{-7.15}$, sa grafika je lako uočiti da se posljednja izračunata vrijednost numeričkog rješenja (za $x = 1$) razlikuje od vrijednosti tačnog rješenja–posljednja zelena tačka. I na kraju, posebno je kritična situacija sa numeričkim rješenjem za $\varepsilon = 2^{-7.225}$, koje je predstavljeno ljubičastim tačkama. Ovo numeričko rješenje ima veoma izraženo oscilatorno ponašanje. Vrijednost greške je veoma velika i ovakvo numeričko rješenje je potpuno neupotrebljivo, a samim tim njegovo ponašanje je potpuno neprihvatljivo. Eliminisanje ovakvih oscilatornih rješenja je blisko povezano sa ispitivanjem stabilnosti metode.

Na osnovu testiranih primjera, možemo zaključiti da je uvođenje slojno–adaptivnih mreža dobra polazna tačka za numeričko rješavanje Cauchyjevih problema tipa (3) i sličnih. Danas je ovo područje predmet intezivnog istraživanja i ono se odvija u nekoliko smjerova, aproksimacija izvoda prilagođena ovim problemima, razvoj specifičnih metoda kao i modifikacija slojno–adaptivnih mreža.

Literatura

[1] N.S. Bakhvalov, *Towards optimization of methods for solving boundary value problems in the presence of boundary layers*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., Vol 9, pp 841–859, 1969.

[2] W. Cheney, and D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole-Thompson Learning, Belmont, USA, 2004.
[3] W. Kutta, *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen*, Zeit. Math. Phys., Vol.46, pp 435-453, 1901.
[4] V. D. Liseikin, *Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems*, VSP BV, AH Zeist, The Netherlands, 2001.
[5] V. D. Liseikin, *Grid Generation for Problems with Boundary and Interior Layers*, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2018.
[6] V. D. Liseikin, S. Karasuljić, and V. I. Paasonen, *Numerical Grids and High-Order Schemes for Problems with Boundary and Interior Layers*, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2021.
[7] V.D. Lisejkin and V. E. Petrenko, *The adaptive-invariant method for the numerical solution of problems with boundary and interior layers*, Novosibirsk: Vychislitel'nyj Tsentr SO AN SSSR, 1989.
[8] C. Runge, *Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*, Zenodo, 1895.
[9] G. I. Shishkin, *Grid approximation of singularly perturbed parabolic equations with internal layers*, Sov. J. Numer. Anal. M.Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Vol 3(5), pp 393-408, 1988.
[10] R. Vulanović, *Mesh construction for discretization of singularly perturbed boundary value problems*, Univerzitet u Novom Sadu, 1986.