EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 15 - 25

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Kombinacije bez i sa ponavljanjem u nastavi matematike

Azra Hadžiomerović[1], Zenan Šabanac[2]

[1] *Gimnazija Mostar*
[2] *Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke, Univerzitet u Sarajevu - Prirodno-matematički fakultet*

Sažetak: U ovom radu izloženi su po dva dokaza teorema za kombinacije bez i sa ponavljanjem. Primjena ovih teorema je data kroz rješenja nekih kombinatornih zadataka namijenjenih za učenike srednje škole.

1. Općenito o kombinatorici

Kombinatorika je matematička disciplina koja uglavnom proučava konačne skupove i strukture. Od davnina su se matematičari bavili problematikom prebrojavanja elemenata konačnih skupova, što danas predstavlja samo jedan od vidova kombinatorike [4]. Riječ kombinatorika dolazi od riječi kombinacija, a ova od lat. riječi *combinare* što znači slagati.
Kombinatorika je nastajala postepeno, a svoje korijene vuče iz zabavne matematike, zagonetki, igara, a posebno sa počecima razvoja teorije vjerovatnoće u 17. vijeku (v. [1, 5]).
Danas je kombinatorika veoma važna grana matematike i njezin uticaj i na samu matematiku i na ostale nauke neprestano raste. U srednjoškolskoj matematici je koristimo najčešće pri prebrojavanju skupova, čiji elementi mogu biti različiti objekti, strukture ili pojave. Rezultati iz kombinatorike se danas primjenjuju i u mnogim drugim naukama koje na prvi pogled nemaju mnogo veze sa matematikom, kao što su genetika, hemija, ekonomija, medicina.
Važni i zanimljivi rezultati, moćne tehnike i metode rješavanja problema sa gotovo neiscrpnim mogućnostima primjena su neke oblasti kombinatorike (teorija grafova, algebarska kombinatorika, kombinatorna geometrija, diskretna geometrija,...) pretvorili u atraktivne i samostalne matematičke discipline [3].
Kombinatorika se pretežno bavi razmještanjima objekata zadanog konačnog skupa u izvjesne konfiguracije (šeme). Najčešće tu imamo tri tipa problema:

- Egzistencija razmještaja. Ako želimo razmjestiti objekte nekog skupa na način propisan nekim uslovima, prvo što se pitamo jeste da li uopće postoji takav razmještaj. Ako razmještaj nije uvijek moguć, pitamo se dalje, koji su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje razmještaja zadanog tipa.

- Prebrojavanje i klasifikacija razmještaja. Ako je određeni razmještaj moguć, pitanje je na koliko se načina on može postići ili kako to razmještanje klasificirati u određene tipove.

- Proučavanje poznatih razmještaja. Nakon što je dokazana egzistencija i izvedena konstrukcija razmještaja koji zadovoljava određene uslove, može se pristupiti prućavanju njegovih zakonitosti i strukture.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: kombinatorika, prebrojavanja, rasporedi
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: novembar 2023.

Učenici u srednjoj školi pod pojmom kombinatorika podrazumijevaju varijacije, permutacije i kombinacije. U ovom radu mi ćemo posebnu pažnju posvetiti kombinacijama bez i sa ponavljanjem, ali ćemo prethodno navesti neke definicije pojmova i rezultate koji će nam trebati u glavnom dijelu rada, a koji će upotpuniti izlaganje osnovne teme ovog rada.

2. Osnove prebrojavanja, varijacije i permutacije

Dva najjednostavnija principa prebrojavanja su princip zbira i princip proizvoda.
Princip zbira počiva na činjenici da ako imamo konačan skup koji je unija više disjunktnih podskupova, onda je broj njegovih elemenata jednak zbiru broja elemenata podskupova. Matematički zapisano, ako je $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$, onda je broj elemenata skupa A, u oznaci $|A|$, dat sa

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \ .$$

Princip proizvoda kaže da ako je neki skup jednak Dekartovom proizvodu nekoliko skupova, onda je broj njegovih elemenata jednak proizvodu broja elemenata skupova koji ulaze u taj Dekartov proizvod. Matematički, ako je $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, onda je

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} |A_k| \ .$$

Princip proizvoda se često zove i pravilo (teorem) o uzastopnom prebrojavanju.
U ovom poglavlju ćemo se još prisjetiti pojmova varijacija i permutacija sa i bez ponavljanja, i formula prema kojima se računa njihov broj.

Definicija 2.1 (varijacije r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ima n različitih elemenata. Uređena r-torka $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, $r \leq n$, različitih elemenata skupa S zove se varijacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata.*

Teorem 2.2 (broj varijacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Broj svih varijacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata dat je sa*

$$V_n^{(r)} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \ ,$$

pri čemu je $n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ (čitaj n faktorijel) proizvod prvih n prirodnih brojeva i $0! := 1$.

Dokaz: Prvi element a_{i_1} u uređenoj r-torci $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, $r \leq n$, možemo izabrati na n načina, drugi element a_{i_2} možemo izabrati na $(n-1)$ načina, ..., r-ti element a_{i_r} možemo izabrati na $(n-r+1)$ načina. Sada na osnovu principa proizvoda slijedi da je:

$$V_n^{(r)} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1)\,(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \ ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Definicija 2.3 (varijacije r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ima n različitih elemenata. Uredena r-torka $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ elemenata skupa S, pri čemu se elementi mogu ponavljati, zove se varijacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata.*

Teorem 2.4 (broj varijacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Broj svih varijacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata dat je sa*

$$\overline{V}_n^{(r)} = n^r \ .$$

Dokaz: Prvi element a_{i_1} u uređenoj r-torci $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ možemo izabrati na n načina, drugi element a_{i_2} možemo izabrati opet na n načina, itd., r-ti element a_{i_r} možemo izabrati također na n načina (jer je dozvoljeno ponavljanje elemenata). Primjenom principa proizvoda zaključujemo da je broj varijacija sa ponavljanjem dat sa

$$\overline{V}_n^{(r)} = n \cdot n \cdots n = n^r \ .$$

□

Definicija 2.5 (permutacije bez ponavljanja). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ima n različitih elemenata. Svaka uređena n-torka elemenata skupa S bez ponavljanja elemenata zove se permutacija skupa S bez ponavljanja.*

Teorem 2.6 (broj permutacija bez ponavljanja). *Broj svih permutacija skupa S od n elemenata dat je sa*

$$P_n = n! \ .$$

Dokaz: Prvi element možemo izabrati na n načina, drugi element možemo izabrati na $(n-1)$ načina, treći element možemo izabrati na $(n-2)$ načina, itd., n-ti element možemo izabrati na $(n-(n-1)) = 1$ način. Na osnovu principa proizvoda je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \ .$$

□

Primjedba 2.7. *Primijetimo da se permutacije bez ponavljanja mogu smatrati varijacijama n-te klase bez ponavljanja od n elemenata.*

Definicija 2.8 (permutacije sa ponavljanjem). *Neka skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ima m različitih elemenata. Svaka uređena n-torka elemenata skupa S, pri čemu se element a_1 ponavlja k_1 puta, element a_2 ponavlja k_2 puta,..., element a_m ponavlja k_m puta, i $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, zove se permutacija skupa S sa ponavljanjem.*

Teorem 2.9 (broj permutacija sa ponavljanjem). *Broj svih permutacija skupa S sa ponavljanjem dat je sa*

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \ .$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da su svi elementi u permutaciji sa ponavljanjem međusobno različiti; tada bismo imali permutaciju bez ponavljanja od n elemenata. Ukupan broj tih permutacija, kako smo ranije vidjeli, bi iznosio $n!$. U permutaciji sa ponavljanjem možemo zamijeniti mjesta na kojima su elementi a_1 na $k_1!$ načina i pri tom se permutacija neće promijeniti. Slično zaključujemo i za elemente a_2, itd., a_m. Koristeći pravilo proizvoda, za svaku permutaciju sa ponavljanjem postoji $k_1!k_2!\cdots k_m!$ permutacija bez ponavljanja u kojima se ne mijenja poredak različitih elemenata skupa S. Ukupan broj permutacija bez ponavljanja od n elemenata stoga je dat sa

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \ .$$

□

3. Kombinacije bez ponavljanja

U ovom poglavlju ćemo dati definiciju kombinacija bez ponavljanja, te na dva načina dokazati formulu za broj kombinacija bez ponavljanja.

Definicija 3.1 (kombinacije r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Kombinacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata je svaki r-člani podskup sastavljen od elemenata n-članog skupa $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, pri čemu mora biti $r \leq n$.*

Uočimo da ako bismo uzeli u obzir i kombinaciju klase $r = n$ dobili bismo trivijalan slučaj samo jedne moguće kombinacije, a to je sam skup S.

Teorem 3.2 (broj kombinacija r-te klase bez ponavljanja od n elemenata). *Broj kombinacija r-te klase bez ponavljanja skupa od n elemenata jednak je*

$$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} := \frac{n\,(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ .$$

Simbol $\binom{n}{r}$ se čita kao "en povrh er", ili "en iznad er".

Dokaz:

Prvi način (v. [2]). Skup svih kombinacija bez ponavljanja možemo napisati u obliku

$$K = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\} :\ a_{i_1}\ ,\ a_{i_2}, \dots a_{i_r} \in S\}\ .$$

Kada bi nam bio bitan poredak elemenata, onda bismo imali varijacije r-te klase bez ponavljanja od n elemenata, kojih ima $\frac{n!}{(n-r)!}$. Međutim, sve permutacije skupa $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ čine različite varijacije r-te klase bez ponavljanja od r elemenata, i ima ih $r!$, a svi ti elementi čine istu kombinaciju $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$. Stoga je broj različitih kombinacija dat sa

$$C_n^{(r)} = \frac{V_n^{(r)}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}\ .$$

Drugi način. U ovom dokazu ćemo koristiti princip matematičke indukcije. Neka je $n = 1$. Kako je $1 \leq r \leq n$, to može jedino biti $r = 1$, pa je broj jednočlanih podskupova skupa koji ima samo 1 element jednak $C_1^1 = 1$. Prema formuli za $n = 1$ je $\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{1!}{(1-1)!1!} = 1$, pa imamo da formula vrijedi u slučaju kada je $n = 1$.

Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj n i svaki $1 \leq r \leq n$ vrijedi formula $C_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Pokažimo da formula vrijedi i za $n+1$. Razmotrit ćemo tri slučaja: $r = 1$, $2 \leq r < n+1$ i $r = n+1$.

Za $r = 1$ je očito broj svih jednočlanih podskupova skupa koji ima $n+1$ elemenata jednak $C_{n+1}^1 = n+1$. Prema formuli za $r = 1$ je $\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!1!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, pa formula vrijedi u ovom slučaju.

Ako je $2 \leq r < n+1$ treba pokazati da vrijedi $C_{n+1}^{(r)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!}$. Za fiksno r možemo podijeliti skup svih kombinacija na dva podskupa: jedan u kojem su kombinacije bez ponavljanja koje sadrže fiksni element, npr. a_1, i drugi u kojem su kombinacije bez ponavljanja koje ne sadrže fiksni element a_1. Tada je

$$C_{n+1}^{(r)} = C_n^{(r-1)} + C_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!}\ ,$$

pa formula vrijedi i u ovom slučaju.

Konačno, ako je $r = n+1$ onda je očito broj svih $n+1$-članih podskupova skupa koji ima $n+1$ element jednak $C_{n+1}^{(n+1)} = 1$. Prema formuli je $\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(n+1))!(n+1)!} = 1$. Dakle, formula vrijedi i u slučaju $r = n+1$.

Sada na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da formula vrijedi za sve prirodne brojeve n i $1 \leq r \leq n$. $\square$

U sljedećim primjerima ćemo pokazati kako se mogu koristiti kombinacije bez ponavljanja.

Primjer 3.3. *Na koliko se načina od 25 učenika može formirati grupa od 3 učenika koji će predstavljati odjeljenje na školskom takmičenju iz informatike? Ako je u tom odjeljenju 10 djevojčica, koliko se može formirati različitih grupa ako u svakoj grupi mora biti bar jedna djevojčica i bar jedan dječak? Koliko ima grupa u koje su sastavljene isključivo od djevojčica ili isključivo od dječaka?*

Rješenje: Označimo sa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{25}\}$ skup čiji su elementi učenici $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ od kojih treba formirati grupu veličine $r = 3$. Pošto nam nije bitan redosljed učenika u grupi, broj tih grupa, tj. broj različitih podskupova $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$ skupa S, jednak je broju kombinacija 3. klase bez ponavljanja od 25 elemenata, koji iznosi

$$C_{25}^{(3)} = \binom{25}{3} = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300 \ .$$

Ako je u odjeljenju 10 djevojčica, onda je u tom odjeljenju 15 dječaka. Iz uslova da u svakoj grupi mora biti bar jedna djevojčica i bar jedan dječak slijedi da su moguće kombinacije u kojima su 2 djevojčice i 1 dječak ili 1 djevojčica i 2 dječaka. Korištenjem pravila proizvoda, broj grupa u kojima su 2 djevojčice i 1 dječak iznosi

$$C_{10}^{(2)} \cdot C_{15}^{(1)} = \binom{10}{2} \cdot \binom{15}{1} = \frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{15!}{14!1!} = 45 \cdot 15 = 675 \ ,$$

dok broj grupa u kojima su 1 djevojčica i 2 dječaka iznosi

$$C_{10}^{(1)} \cdot C_{15}^{(2)} = \binom{10}{1} \cdot \binom{15}{2} = \frac{10!}{9!1!} \cdot \frac{15!}{13!2!} = 10 \cdot 105 = 1050 \ .$$

Prema pravilu zbira, ukupan broj grupa u kojima mora biti bar jedna djevojčica i bar jedan dječak iznosi

$$675 + 1050 = 1725.$$

Prema pravilu zbira, homogenih grupa (tj. grupa koje su sastavljene isključivo od djevojčica ili isključivo od dječaka) imamo

$$C_{10}^{(3)} + C_{15}^{(3)} = \binom{10}{3} + \binom{15}{3} = \frac{10!}{7!3!} + \frac{15!}{12!3!} = 120 + 455 = 575 \ .$$

Primijetimo da smo do posljednjeg broja mogli doći tako što od ukupnog broja grupa oduzmemo broj grupa u kojim se nalaze 1 ili 2 djevojčice (ili što je isto 1 ili 2 dječaka). Naime,

$$2300 - (675 + 1050) = 2300 - 1725 = 575 \ .$$

□

Primjer 3.4. *U ravni je dato 7 tačaka od kojih nikoje 3 ne leže na istoj pravoj, tj. nisu kolinearne.*

a) Koliko pravih određuju te tačke?

b) Koliko trouglova određuju te tačke?

Rješenje: Skup tačaka označimo sa $S = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$, $n = 7$.
a) Kao što znamo iz geometrije, prava je određena sa dvije tačke, tj. sa dva elementa iz skupa S. Kako među datim tačkama ne postoje 3 kolinearne tačke, to svaki par tačaka t_{i_1} i t_{i_2} iz skupa datih tačaka određuje različite prave. Dakle, broj različitih pravih je jednak broju kombinacija 2. klase ($r = 2$) od 7 elemenata i iznosi

$$C_7^{(2)} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21 \ .$$

Dakle, date tačke određuju 21 pravu.
b) Rezonujući kao u a), svake tri tačke t_{i_1}, t_{i_2} i t_{i_3} iz skupa S određuju različite trouglove, pa je ukupan broj trouglova jednak broju kombinacija 3. klase ($r = 3$) od 7 elemenata. Broj tih kombinacija je

$$C_7^{(3)} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \ .$$

Dakle, date tačke određuju 35 trouglova. □

4. Kombinacije sa ponavljanjem

Sada ćemo izložiti kombinacije sa ponavljanjem koje su, prema mišljenju autora, nepravedno zanemarene u redovnoj nastavi u srednjoj školi, te se učenici sa njima rjeđe susreću tokom svog školovanja.

Definicija 4.1 (kombinacije r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaki r-člani podskup ($r \in \mathbb{N}$) n-članog skupa S pri čemu se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u r-torci nije bitan) zove se kombinacija sa ponavljanjem r-te klase od n elemenata.*

Teorem 4.2 (broj kombinacija r-te klase sa ponavljanjem od n elemenata). *Broj kombinacija sa ponavljanjem r-te klase od n različitih elemenata jednak je*

$$\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} \ .$$

Dokaz:
Prvi način (v. [2]). Prikažimo kombinaciju sa ponavljanjem u obliku niza oznaka r članova skupa S i kvadratića na sljedeći način

$$a_1 \ a_1 \blacksquare\blacksquare a_3 \ a_3 \ a_3 \blacksquare a_4 \blacksquare\blacksquare\blacksquare a_7 a_7 a_7 \ldots$$

pri čemu jedan kvadratić dolazi između dva uzastopna člana niza bez obzira pojavljuju li se ti članovi u nizu ili ne. Ako neki član nije odabran u niz, dobijaju se dva uzastopna kvadratića između kojih taj član nedostaje, a ako nedostaju dva susjedna člana, u našem zapisu će se pojaviti tri uzastopna kvadratića, itd. Vidimo da su indeksi članova niza koji se pojavljuju u kombinaciji sa ponavljanjem ustvari suvišni, jer nije bitno koji su to članovi. S druge strane, važno je uočiti da je broj tih članova uvijek r, a broj kvadratića $n-1$. Zbog toga je ukupan broj svih oznaka a i $\blacksquare$ jednak $n-1+r$, a niz možemo prikazati u obliku

$$aa\blacksquare\blacksquare aaa\blacksquare a\blacksquare\blacksquare\blacksquare aaa \ldots$$

pri čemu je u posljednjem zapisu r oznaka a i $n-1$ oznaka $\blacksquare$. Uočimo da je broj načina na koji biramo r elemenata jednak broju načina na koje možemo odabrati r mjesta u nizu gdje će doći oznaka a. Taj broj odgovara broju kombinacija r-te klase bez ponavljanja $(n-1+r)$-članog skupa, te iznosi

$$C_{n-1+r}^{(r)} = \binom{n-1+r}{r} \ .$$

Dakle, $\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$.
Drugi način. U ovom dokazu ćemo koristiti princip matematičke indukcije po $m = n+r-1$.
Neka je $m = 1$. Kako su n i r prirodni brojevi i $n+r-1 = 1$, to jedino može biti $n = r = 1$, pa je broj jednočlanih podskupova skupa koji imaju samo 1 element jednak $\overline{C}_1^1 = 1$. Prema formuli za $n = r = 1$ je $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{1!}{1!0!} = 1$, pa imamo da formula vrijedi u slučaju kada je $m = 1$.
Pretpostavimo sada da formula vrijedi za neki prirodan broj $m = n+r-1$, tj. da vrijedi formula $\overline{C}_n^r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$.

Pokažimo da formula vrijedi i za $m+1=(n+r-1)+1=n+r$.
Za $r=1$ je očito broj svih jednočlanih podskupova skupa koji ima $n+1$ elemenata jednak $\overline{C}_{n+1}^{1}=n+1$.
Prema formuli za $r=1$ je $\frac{(n+1)!}{1!n!}=\frac{n!(n+1)}{n!}=n+1$, pa formula vrijedi u ovom slučaju.
Ako je $n=1$, onda je broj svih $r+1$-članih skupova sa ponavljanjem iz skupa koji ima 1 element jednak $\overline{C}_{1}^{(r+1)}=r+1$. Prema formuli za $n=1$ je $\frac{(n+r)!}{r!n!}=\frac{(r+1)!}{r!1!}=r+1$, pa formula vrijedi i u ovom slučaju.
U ostalim slučajevima skup svih kombinacija sa ponavljanjem možemo podijeliti na dva podskupa: jedan u kojem su kombinacije sa ponavljanjem koje sadrže fiksni element, npr. a_1, i drugi u kojem su kombinacije sa ponavljanjem koje ne sadrže fiksni element a_1. Tada je

$$\overline{C}_{n}^{(r)}=\overline{C}_{n}^{(r-1)}+\overline{C}_{n-1}^{(r)}=\frac{(n+r-2)!}{(r-1)!\,(n-1)!}+\frac{(n+r-2)!}{r!\,(n-2)!}=\frac{(n+r-2)!}{r!\,(n-1)!}(r+n-1)=\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}\ ,$$

pa formula vrijedi i u ovom slučaju.
Sada na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da formula vrijedi za sve prirodne brojeve n i r. □

Primjenu kombinacija sa ponavljanjem ćemo demonstrirat kroz nekoliko pažljivo odabranih primjera.

Primjer 4.3. *U nekom dijelu skladišta pohranjuju se* 3 *različite vrste robe. Na koliko načina se može odabrati roba za skladištenje ako u taj dio skladišta treba pohraniti tačno* 5 *komada robe uz pretpostavku da je od svih vrsta robe raspoloživo minimalno po* 5 *komada?*

Rješenje: Primijetimo da je potpuno svejedno jesu li brojnosti raspoložive robe po svakoj vrsti 5, koliko iznosi broj komada robe koju treba pohraniti u skladište, ili su te brojnosti veće od 5. Potrebno je formirati neuređene trojke $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ veličine $r=3$, tj. skup kombinacija 5. klase sa ponavljanjem od 3 elementa. Ukupan broj takvih kombinacija iznosi

$$\overline{C}_{3}^{(5)}=\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!2!}=21\ .$$

□

Primjer 4.4. *Farma uzgaja mačke, zečeve, pse, patke i guske. Na koliko različitih načina možemo izabrati tri životinje sa te farme?*

Rješenje: U zadatku imamo da je ukupan broj vrsta životinja 5, te da biramo 3 životinje. Ako biramo r stavki od mogućih n, pri čemu je dozvoljeno ponavljanje, onda se radi o kombinacijama sa ponavljanjem r-te klase od n elemanata. Ukupan broj načina na koje možemo odabrati 3 životinje sa farme iznosi

$$\overline{C}_{5}^{(3)}=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=35\ .$$

□

Primjer 4.5. *Data je jednadžba*

$$x_1+x_2+x_3+x_4=11\ .$$

a) Koliko nenegativnih cjelobrojnih rješenja ima data jednadžba?

b) Koliko pozitivnih cjelobrojnih rješenja ima data jednadžba?

Rješenje: Podsjetimo se da nenegativan znači da je $x_i \geq 0$ za sve $i=1,2,3,4$, dok pozitivan znači da je $x_i>0$ za sve $i=1,2,3,4$.
a) Primijetimo, npr., da rješenje date jednadžbe $x_1=2,\ x_2=5,\ x_3=0,\ x_4=4$ možemo prikazati u sljedećem obliku

x_1	x_2	x_3	x_4
$\times\times$	$\times\times\times\times\times$		$\times\times\times\times$

Odavde vidimo da je broj svih nenegativnih cjelobrojnih rješenja određen sa rasporedom simbola $\times$ i pregrada $|$. Kako imamo 11 simbola $\times$ i 3 pregrade koje određuju 4 ćelije u tabeli ($r = 11$ i $n = 4$), to je broj svih nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednak broju kombinacija sa ponavljanjem 11. klase od 4 elementa i iznosi

$$\overline{C}_4^{(11)} = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = \frac{14!}{11!3!} = 364 \,.$$

Do istog smo rezultata mogli doći koristeći permutacije sa ponavljanjem. Naime, 11 simbola $\times$ i 3 pregrade možemo permutirati na

$$\frac{(11+3)!}{11!3!} = \frac{14!}{11!3!} = 364$$

načina, a taj broj je upravo jednak broju $\overline{C}_4^{(11)}$.
b) Kako rješenja moraju biti pozitivna, počnimo tako da u svaku ćeliju u tabeli stavimo po jedan simbol $\times$. Ostaje nam sada da raspodijelimo $11-4=7$ simbola $\times$ u 4 ćelije, a to možemo prema prethodnom uraditi na

$$\overline{C}_7^{(4+7-1)} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

načina. Dakle, imamo 120 pozitivnih cjelobrojnih rješenja date jednadžbe. □

5. Neki izazovniji kombinatorni zadaci

U ovom poglavlju ćemo uraditi nekoliko, prema našem mišljenju, lakših, ali izazovnijih zadataka vezanih za prebrojavanja koja u sebi uključuju kombinacije, a koji su se pojavili na različitim matematičkim takmičenjima. Naime, poznato je da zadaci iz kombinatorike obavezno dolaze na matematičkim takmičenjima različitih nivoa, počevši od kantonalnog takmičenja, pa sve do međunarodnih matematičkih regionalnih i svjetskih olimpijada, kao i matematičkih turnira koje organiziraju različita društva, organizacije, škole i fakulteti, kako za učenike osnovnih i srednjih škola, tako i za studente na univerzitetima.

Primjer 5.1 (Američko pozivno matematičko takmičenje 1985. godine). *U turniru je svaki igrač odigrao tačno jednu partiju protiv svakog drugog igrača. U svakoj partiji pobjednik je dobio* 1 *bod, gubitnik je dobio* 0 *bodova, a oba igrača su dobila po* $\frac{1}{2}$ *boda ako je partija završila neriješeno. Nakon završetka turnira utvrđeno je da je tačno polovina bodova svakog igrača osvojena protiv deset igrača sa najmanje bodova. Posebno, svaki od deset igrača sa najmanjim brojem bodova osvojio je polovinu svojih bodova protiv drugih devetorice od deset. Koliki je ukupan broj igrača na turniru?*

Rješenje: Jednostavnosti radi, pretpostavimo da je na turniru ukupno bilo $n+10$ igrača. Među n igrača koji nisu među najslabijih 10 odigrano je ukupno $\binom{n}{2}$ partija i time su osvojena $\binom{n}{2}$ boda. Prema pretpostavkama zadataka, to znači da su ovih n igrača također osvojili $\binom{n}{2}$ bodova protiv najslabijih 10 igrača. Dalje, najslabijih 10 igrača su međusobno odigrali $\binom{10}{2} = 45$ partija i osvojili su ukupno 45 bodova igrajući jedni protiv drugih. Oni su također osvojili 45 bodova igrajući protiv snažnijih n igrača. S obzirom da svaki osvojeni bod pripada jednoj od ovih kategorija, slijedi da je ukupan broj osvojenih bodova jednak $2\binom{n}{2} + 90 = n^2 - n + 90$. Međutim, osvojen je po jedan bod po svakoj odigranoj partiji, a ovih $n+10$ igrača ukupno je odigralo $\binom{n+10}{2} = \frac{(n+10)(n+9)}{2}$ partija, tj. u svim odigranim partijama osvojeno je ukupno $\frac{(n+10)(n+9)}{2}$ bodova. Dakle, imamo da vrijedi da je $n^2 - n + 90 = \frac{(n+10)(n+9)}{2}$, odakle slijedi $2n^2 - 2n + 180 = n^2 + 19n + 90$. Posljednja jednadžba se svodi na $n^2 - 21n + 90 = 0$, čija rješenja su $n = 6$ ili $n = 15$. Primijetimo da su najboljih n igrača ukupno osvojili $n(n-1)$ bodova (prema prethodnom izrčunu) što predstavlja prosjek od $n-1$ bodova po igraču, dok su najslabijih 10 igrača osvojili ukupno 90 bodova, što je prosjek od 9 bodova po igraču. Stoga mora biti $n-1>9$, tj. $n>10$, pa je $n=15$. Sada imamo da je ukupan broj igrača na turniru jednak $15+10=25$. Dakle, na turniru je učestvovalo ukupno 25 igrača. □

Primjer 5.2 (Kinesko matematičko takmičenje 2000. godine). *Odrediti koliko ima četverocifrenih brojeva $\overline{abcd}$ koji zadovoljavaju sljedeće uslove:*

(1) $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$;

(2) $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq d$, $d \neq a$;

(3) a je najmanji broj među brojevima a, b, c, d.

Rješenje: Kada postoje tačno dvije različite cifre u $\overline{abcd}$, broj načina uzimanja dvije različite cifre od četiri različite cifre je jednak $\binom{4}{2}$, a manja cifra mora biti na prvom i trećem mjestu, dok veća cifra mora biti na drugom i četvrtom mjestu, tj. četverocifreni broj je jedinstveno određen sa te dvije cifre. Stoga, u ovom slučaju, broj različitih četverocifrenih brojeva je jednak $\binom{4}{2}=6$.
Kada postoje tačno tri različite cifre u $\overline{abcd}$, broj načina uzimanja tri različite cifre iz skupa od četiri različite cifre jednak je $\binom{4}{3}$, a najmanja cifra mora biti prva cifra u $\overline{abcd}$. Ako su prva i treća cifra iste, tada imamo $P_2 = 2!$ četverocifrenih brojeva sa tri različite cifre. Ako su druga i četvrta cifra iste, tada opet imamo $P_2 = 2!$ četverocifrenih brojeva sa tri različite cifre. Stoga, u ovom slučaju, broj različitih četverocifrenih brojeva je $\binom{4}{3}(P_2+P_2)=16$.
Kada postoje tačno četiri različite cifre u $\overline{abcd}$, najmanja cifra mora biti prva cifra, a ostale tri cifre mogu se rasporediti na $P_3 = 3!$ načina. Stoga, u ovom slučaju, broj različitih četverocifrenih brojeva je $P_3 = 6$.
Saberimo sada navedene brojeve načina i dobijemo da je ukupan broj traženih različitih četverocifrenih brojeva jednak $6+16+6=28$. □

Primjer 5.3. (Županijsko takmičenje iz matematike u Hrvatskoj 2020. godine za IV razred srednje škole)
Date su tri paralelne prave a, b i c. Na pravoj a istaknute su tačke A, B i C, na pravoj b tačke D, E, F i G, a na pravoj c tačke H, I, J, K i L. Koliko je najviše trouglova određeno tačkama iz skupa $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$?

Rješenje: Ukupno je dato 12 tačaka. Tri tačke od njih 12 možemo izabrati na $\binom{12}{3}$ načina. Međutim, neće sve ove kombinacije davati vrhove trougla. Naime, ako su tri odabrane tačke kolinearne, onda nemamo trougao. Kako se u zadatku traži najveći mogući broj trouglova, možemo pretpostaviti da ako su sve tri tačke odabrane na različitim pravim, onda one nisu kolinearne. Dakle, slučaj kada smo uzeli tri kolinearne tačke je slučaj kada sve tri tačke uzmemo sa iste prave. Broj načina na koje možemo uzeti sve tri tačke sa prave a jednak je $\binom{3}{3}$, sve tri tačke sa prave b jednak je $\binom{4}{3}$, a sve tri tačke sa prave c jednak je $\binom{5}{3}$. Ti svi slučajevi su međusobno disjunktni, pa prema principu zbira, najveći traženi broj trouglova iznosi

$$\binom{12}{3} - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}\right) = 220 - (1+4+10) = 205.$$

□

Primjer 5.4 (Harvard i MIT turnir iz matematike 2022. godine). *Izračunajte broj nepraznih podskupova S skupa $\{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$ koji zadovoljavaju uslov $|S| + \min(S) \cdot \max(S) = 0$, pri čemu nam $|S|$ označava broj elemenata skupa S, $\min(S)$ najmanji element, a $\max(S)$ najveći element skupa S.*

Rješenje: Iz uslova $|S| + \min(S) \cdot \max(S) = 0$ slijedi da mora biti $\min(S) \cdot \max(S) < 0$. To znači da mora vrijediti $\min(S) = -a$ i $\max(S) = b$ za neke pozitivne cijele brojeve a i b. Ako su dati a i b, preostalo je odabrati $|S| - 2 = ab - 2$ elementa, koji moraju biti iz skupa $\{-a+1, -a+2, \ldots, b-2, b-1\}$, koji ima $a+b-1$ elemenata. Stoga je broj mogućnosti za određene a i b jednak $\binom{a+b-1}{ab-2}$. U većini slučajeva, ovaj binomni koeficijent je jednak nuli. Zapravo, moramo imati $ab - 2 \leq a + b - 1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) \leq 2$.

Ovo sužava mogućnosti za (a, b) na $(1, n)$ i $(n, 1)$ za pozitivne cijele brojeve $2 \leq n \leq 10$ (slučaj $n = 1$ je nemoguć), te tri dodatne mogućnosti: $(2, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, 2)$. U prvom slučaju, broj mogućih skupova je

$$2\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{10}{8}\right)=2\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{10}{2}\right)=2\binom{11}{3}=330 .$$

Prvi dio gornje jednakosti slijedi na osnovu osobine binomnih koeficijenata $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, a drugi iz činjenice da je $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$ i uzastopne primjene osobine $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Navedene osobine binomnih koeficijenata se lako dokazuju, te ih prepuštamo čitaocu za vježbu.
U drugom slučaju, broj mogućih skupova je

$$\binom{3}{2}+\binom{4}{4}+\binom{4}{4}=5 .$$

Dakle, ukupno postoji $330 + 5 = 335$ skupova koji zadovoljavaju uslove zadatka. □

6. Zadaci za samostalan rad

Nadamo se da vas je ovaj rad zainteresirao kako za kombinacije bez i sa ponavljanjem, tako i za prebrojavanja različitog tipa. Čitaocu za vježbu ostavljamo da riješi sljedeće zadatke.

Zadatak 6.1. *Na koliko načina možemo obojiti pet vrhova pravilne četverostrane piramide sa* 5 *boja, tako da svaki vrh bude obojen tačno jednom od tih* 5 *boja, i da vrhovi koji dijele zajedničku ivicu moraju biti obojeni različitim bojama? Pri tome dva bojenja smatramo istim ako se jedan iz drugog mogu dobiti rotacijom piramide.*

Zadatak 6.2. *Neka su n i r prirodni brojevi. Dokazati da postoji $\binom{n+r-1}{r-1}$ nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.*

Zadatak 6.3. *Neka su n i r prirodni brojevi i $r \leq n$. Dokazati da postoji $\binom{n-1}{r-1}$ pozitivnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.*

Zadatak 6.4. *Odrediti broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

takvih da je $3 \leq x_i \leq 10$ za sve $i = 1, 2, 3, 4$.

Zadatak 6.5. *Koliko postoji trocifrenih brojeva takvih da je zbir cifara svakog od njih jednak* 11*?*

Zadatak 6.6. *Neka su n i r prirodni brojevi. Odrediti broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r \leq n .$$

Zadatak 6.7. *Odrediti broj pozitivnih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 30$.*

Zadatak 6.8. *Prirodan broj a zovemo* ***sretnim*** *ako je zbir njegovih cifara jednak* 7*. Ako poredamo sve* ***sretne*** *brojeve u niz u rastućem poretku, dobijemo niz $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$. Ako je $a_n = 2023$, odrediti a_{5n}.*

Zahvala

Autori se žele zahvaliti anonimnom recenzentu na komentarima koji su doprinijeli preciznosti izlaganja u radu. Autori se također žele zahvaliti i uredniku časopisa čije sugestije za proširenje rada su rezultirale dodavanjem novog poglavlja 5. Neki izazovniji kombinatorni zadaci. a koje je namijenjeno prvenstveno učenicima koji učestvuju na matematičkim takmičenjima.

Literatura

[1] N. L. Biggs: *The roots of combinatorics*, Historia Math. **6** (1979), 109-136.
[2] K. Iličić: *Matematičke osnove statistike*, Element, Zagreb, 2017.
[3] D. Jojić: *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.
[4] D. Jojić: *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
[5] W. D. Wallis, J. C. George: *Introduction to combinatorics*, 2nd ed., Chapman and Hall/CRC, New York, 2016.