EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 26 - 30

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Louivilleov teorem

Risto Malčeski[1]

[1] *Profesor u penziji, Sjeverna Makedonija*

Sažetak: U ovom radu je dokazan teorem francuskog matematičara Josepha Liouvillea, koji je generalizacija formule za zbir trećih potencija prvih n prirodnih brojeva. Pri tome je korištena tzv. multiplikativna indukcija, za koju se pokazalo da su njome realizovani dokazi tačni.

1. Uvod

Matematika, posebno teorija brojeva, obiluje neočekivanim generalizacijama i zanimljivim rezultatima. Jedan od takvih rezultata je dobro poznata teorema francuskog matematičara Josepha Liouvillea, koja se na određeni način može smatrati generalizacijom formule za izračunavanje zbira trećih potencija prvih n prirodnih brojeva. Prije razmatranja Liouvilleovog teorema, koristit ćemo matematičku indukciju da bismo dokazali nekoliko formula za izračunavanje zbira potencija prirodnih brojeva.

Lema 1.1. *Za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Dokaz: Dokazat ćemo jednakost (3).
Za $n = 1$ imamo $1^3 = 1 = \left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2$, to jest jednadakost vrijedi.
Pretpostavimo da je jednakost (3) tačna za $n = k > 1$. Koristeći tu pretpostavku, za $n = k + 1$, imamo:

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: Matematička indukcija, multiplikativna indukcija, Liouvilleov teorem
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: juni 2023.

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 = &\left[\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\ =&(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}\\ =&\left[\frac{(k+1)\cdot(k+1+1)}{2}\right]^2,\end{aligned}$$

to jest za $n=k+1$ jednakost vrijedi.
Konačno, iz principa potpune matematičke indukcije slijedi da je jednakost (3) tačna za svako $n\in\mathbb{N}$.

Jednakosti (1) i (2) se dokazuju analogno. Detalje ostavljamo čitaocu za vježbu. □

Primjedba 1.2. *Ako koristimo jednakost (1), onda se jednakost (3) može zapisati u obliku*

$$1^3+2^3+3^3+..+n^3=(1+2+3+...+n)^2. \tag{4}$$

Korolar 1.1. *Za svako $n\in\mathbb{N}$ vrijede jednakosti*

$$2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2n^2\cdot(n+1)^2, \tag{5}$$

$$1^3+3^3+5^3+...+(2n-3)^3+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1) \tag{6}$$

Dokaz: Iz jednakosti (3) neposredno slijedi

$$\begin{aligned}2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3 =&2^3\cdot1^3+2^3\cdot2^3+2^3\cdot3^3+...+2^3\cdot n^3\\ =&2^3\cdot(1^3+2^3+3^3+...+n^3)\\ =&2^3\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{2^2}\\ =&2n^2\cdot(n+1)^2\end{aligned}$$

to jest jednakost (5) je tačna. Nadalje, iz (3) i (5) imamo

$$\begin{aligned}1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3 =&1^3+2^3+...+(2n-1)^3+(2n)^3-(2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3)\\ =&\frac{(2n)^2\cdot(2n+1)^2}{4}-2n^2(n+1)^2\\ =&n^2\left[(2n+1)^2-2(n+1)^2\right]\\ =&n^2\cdot(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2)\\ =&n^2\cdot(2n^2-1)\end{aligned}$$

to jest pokazali smo da vijedi jednakost (6). □

2. Multiplikativna indukcija

Napomenimo da ako smo nekako došli do formula (1), (2), (3) i (4), onda ih možemo dokazati uz pomoć matematičke indukcije. Međutim, matematička indukcija nije dovoljna za dokazivanje nekih tvrdnji, pa se koriste i druge metode. Jedna takva metoda je takozvana *multiplikativna indukcija*, pomoću koje se tvrdnja:

"Svaki prirodni broj n ima osobinu T "

dokazuje u sljedeća četiri koraka:

1. Dokazuje se da broj 1 i svi prosti brojevi imaju osobinu T.
2. Pretpostavlja se da prirodni broj m ima osobinu T.
3. Dokazuje se da za svaki prost broj p, broj mp ima osobinu T.
4. Zaključujemo da svaki prirodni broj n ima osobinu T.

Prije nego što pređemo na primjenu metode multiplikativne indukcije predstavljenu gore, pokazat ćemo da je ova vrsta zaključivanja ispravna.

Naime, u koraku 1) neka je dokazano da svi prosti brojevi imaju osobinu T. Neka je p prost broj i neka je za neki prirodni broj k, broj m iz koraka 2) oblika $m = p^k$. Tada iz koraka 3) slijedi da broj $mp = p^{k+1}$ također ima osobinu T. Iz ovog i principa matematičke indukcije slijedi da sve potencije prostog broja p imaju osobinu T.

Neka je $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot ... \cdot p_{t-1}^{k_{t-1}} \cdot p_t^{k_t}$ proizvoljan prirodni broj predstavljen njegovom kanonskom notacijom. Iz prethodnog razmatranja proizlazi da broj $p_1^{k_1}$ ima osobinu T. Stavimo da je $m = m_1 = p_1^{k_1}$ i $p = p_2$, pa prema 3) slijedi da $mp = p_1^{k_1} p_2$ ima osobinu T. Sada opet iz 3) i principa matematičke indukcije, dobijamo da broj $m_2 = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ ima osobinu T. Neka je $m = m_2$ i $p = p_3$, pa iz 3) slijedi da broj $mp = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3$ ima osobinu T. Ponovo primjenom koraka 3) i principa matematičke indukcije, dobijamo da broj $m_3 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ ima osobinu T. Ponavljanjem prethodnog postupka $t-3$ puta, dobijamo da broj $n = m_t = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_{t-1}^{k_{t-1}} p_t^{k_t}$ ima osobinu T.
Konačno, iz prethodnog razmatranja proizlazi da su dokazi izvedeni pravilnom primjenom multiplikativne indukcije korektni.

3. Louivilleov teorem

U ovoj sekciji, koristeći multiplikativnu indukciju, dokazat ćemo Louivilleov teorem, koji se odnosi na broj djelitelja od djelitelja proizvoljnog prirodnog broja n.
Prije nego pređemo na naredna razmatranja, navedimo da je broj djelitelja prirodnog broja n, čiji je kanonski rastav $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, određen funkcijom

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1).$$

Funkcija τ je multiplikativna, što znači da ako su m i n međusobno prosti brojevi, onda vrijedi $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$. Višestruka svojstva, identiteti i nejednakosti u vezi s ovom funkcijom, kao i s drugim osnovnim multiplikativnim funkcijama dokazane su u [2] i [3].

Teorem 3.1. ***(Louiville, [1])*** *Ako su $d_1 = 1$, $d_2, ..., d_k = n$ svi pozitivni prirodni djelitelji broja n, a a_i, respektivno, brojevi djelitelja brojeva d_i, $i = 1, 2, ...k$, tada je*

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_k^3 = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k)^2. \tag{7}$$

Dokaz: Za $n = 1$ imamo $d_1 = 1$ i $a_1 = 1$, pa je $a_1^3 = 1 = a_1^2$, to jest jednadakost (7) je tačna.
Neka je p proizvoljan prost broj. Tada su jedinstveni djelitelji broja p: $d_1 = 1$ i $d_2 = p$. Zbog toga je $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Sada, ako koristimo jednakost (4), dobijamo

$$a_1^3 + a_2^3 = 1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (a_1 + a_2)^2,$$

tako da je teorem dokazan za sve proste brojeve.
Pretpostavimo da teorem vrijedi za neki prirodni broj m. Neka je p proizvoljan prost broj. Moguća su dva slučaja:

- $NZD(m, p) = 1$ i
- $NZD(m, p) = p$,

koje ćemo posebno razmotriti.

Neka je $NZD(m,p)=1$. Ako su $d_1=1$ i $d_2,...,d_s=m$ svi prirodni djelitelji broja m, a a_i, respektivno, su brojevi djelitelja brojeva d_i, $i=1,2,...,s$, tada je

$$a_1^3+a_2^3+...+a_s^3=(a_1+a_2+...+a_s)^2, \tag{8}$$

a svi prirodni djelitelji broja mp su:

$$d_1=1,\ d_2,...,d_s=m,\ pd_1=p,\ pd_2,\ ...\ ,pd_s=pm. \tag{9}$$

Budući da je $NZD(d_i,p)=1$, za $i=1,2,...,s$, iz osobina funkcije $\tau(u)$, slijedi da je $\tau(d_ip)=\tau(d_i)\tau(p)=2a_i$, za $i=1,2,...,s$. Prema tome, odgovarajući brojevi djelitelja od djelitelja (9) broja $m\cdot p$ su:

$$a_1=1,a_2,...,a_s,2a_2,...,2a_s.$$

Sada, ako koristimo jednakost (8), dobijamo

$$\begin{aligned}a_1^3+...+a_s^3+(2a_1)^3+...+(2a_s)^3 =&9(a_1^3+a_2^3+...+a_s^3)=9(a_1+a_2+...+a_s)^2\\ =&(3a_1+3a_2+...+3a_s)^2\\ =&(a_1+a_2+...+a_s+2a_1+2a_2+...+2a_s)^2,\end{aligned}$$

što znači da je u ovom slučaju jednakost (7) tačna.

Neka je sada $NZD(m,p)=p$. Onda je $m=m_1p^t$, za neko $t\geq 1$, $NZD(m_1,p)=1$, a $mp=m_1p^{t+1}$. Ako su $d_1=1$ $d_2,...,d_s=m_1$ djelitelji od m_1, gdje su a_i, respektivno, brojevi djelitelja brojeva d_i, $i=1,2,...,s$, budući da je $NZD(d_i,p)=1$, za $i=1,2,...s$, tada su djelitelji broja $m=m_1\cdot p^t$:

$$\begin{aligned}d_1=1,d_2,...,d_s\\ p\cdot d_1,p\cdot d_2,...,p\cdot d_s,\\ p^2\cdot d_1,p^2\cdot d_s,...,p^2\cdot d_s,\\ ....,\\ p^t\cdot d_1,p^t\cdot d_2,...,p^t\cdot d_s\end{aligned} \tag{10}$$

pa iz osobina funkcije $\tau(u)$ slijedi da su odgovarajući brojevi djelitelji djelitelja broja m:

$$\begin{aligned}&a_1,a_2,...,a_s,\\ &2a_1,2a_2,...,2a_s,\\ &3a_1,3a_2,...,3a_s,\\ &.................,\\ &(t+1)a_1,(t+1)a_2,...,(t+1)a_s.\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}a_i^3+\sum_{i=1}^{s}(2a_i)^3+...+\sum_{i=1}^{s}((t+1)a_i)^3 &=\left(\sum_{i=1}^{s}a_i+\sum_{i=1}^{s}2a_i+...+\sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i\right)^2\\ &=(1+2+...+(t+1))^2\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\right)^2\end{aligned} \tag{11}$$

Šta više, jednakost (11) je ekvivalentna jednakosti

$$(1^3+2^3+...+(t+1)^3)\sum_{i=1}^{s}a_i^3=(1+2+...+(t+1))^2\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\right)^2$$

pa ako za $n = t + 1$ iskoristimo jednakost (4), dobijemo

$$\sum_{i=1}^{s} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2. \tag{12}$$

Nadalje, kao i gore zaključujemo da se djelitelji broja $mp = m_1 p^{t+1}$ dobijaju ako brojevima (10) dodamo brojeve

$$p^{t+1}d_1, p^{t+1}d_2, ..., p^{t+1}d_s$$

za koje su, zbog osobina funkcije $\tau(u)$, odgovarajući brojevi djelitelji

$$(t+2)a_1, (t+2)a_2, ..., (t+2)a_s$$

Ako sada iskoristimo jednakosti (1), (11) i (12), dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} a_i^3 + ... + \sum_{i=1}^{s}((t+1)a_i)^3 + &\sum_{i=1}^{s}((t+2)a_i)^3 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + ... + \sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{s}((t+2)a_i)^3 \\
&= \left(\frac{(t+1)(t+2)}{2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 + (t+2)^3 \sum_{i=1}^{s} a_i^3 \\
&= \frac{(t+1)^2(t+2)^2 + 4(t+2)^3}{4} \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\
&= \left(\frac{(t+2)(t+3)}{2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\
&= (1 + 2 + ... + (t+1) + (t+2))^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + ... + \sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i + \sum_{i=1}^{s}(t+2)a_i\right)^2,
\end{aligned}$$

što znači da je i u ovom slučaju tačna jednakost (7).

Konačano, po principu multipilkativne indukcije slijedi da jednakost (7) vrijedi za svaki prirodni broj n. $\square$

Literatura

[1] R. Malčeski: *Teorija na broevi*, Matematički talent, Skopje, 2022.
[2] T. Nagel: *Uvod na teorijata na čislata*, Nauka i izkustvo, Sofija, 1971.
[3] I. Niven and H.S. Zuckerman: *An introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.