EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 31 - 35

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Neke jednakosti u pravilnom petnaestouglu

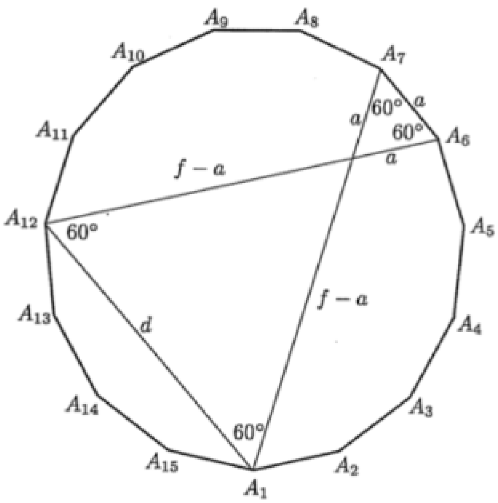
Dragoljub Milošević[1]

[1] *Profesor u penziji, Republika Srbija*

Sažetak: U radu će biti prikazano nekoliko jednakosti koje vrijede za pravilni petnaestougao, a potom generalizacije nekih od njih.

1. Uvod

Poznato je da se mnogougao kod koga su sve stranice jednake i svi uglovi jednaki naziva *pravilnim mnogouglom.* Na Slici 1. je dat pravilni petnaestougao $A_1A_2A_3...A_{15}$. Centralni ugao nad stranicom tog mnogougla iznosi $24°$, a periferijski $12°$. Unutrašnji ugao mu je $156°$.



Slika 1

U ovom radu ćemo razmatrati neke zanimljive jednakosti vezane za pravilni petnaestougao, kao i neke generalizacije dobijenih rezultata.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: mnogougao, pravilni petnaestougao, pravilni mnogougao s $3n$ stranica
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: maj 2022.

2. Jednakosti u pravilnom petnaestouglu

Prva grupa jednakosti vezana za pravilni petnaestougaougao sadržana je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.1. *U pravilnom* 15*-ouglu uvedimo oznake* $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_3| = b$, $|A_1A_4| = c$, $|A_1A_5| = d$, $|A_1A_6| = e$, $|A_1A_7| = f$, $|A_1A_8| = g$. *Tada vrijede jednakosti:*

$$f - d = a, \tag{1}$$

$$\frac{a}{g} + \frac{c}{d} = 1, \tag{2}$$

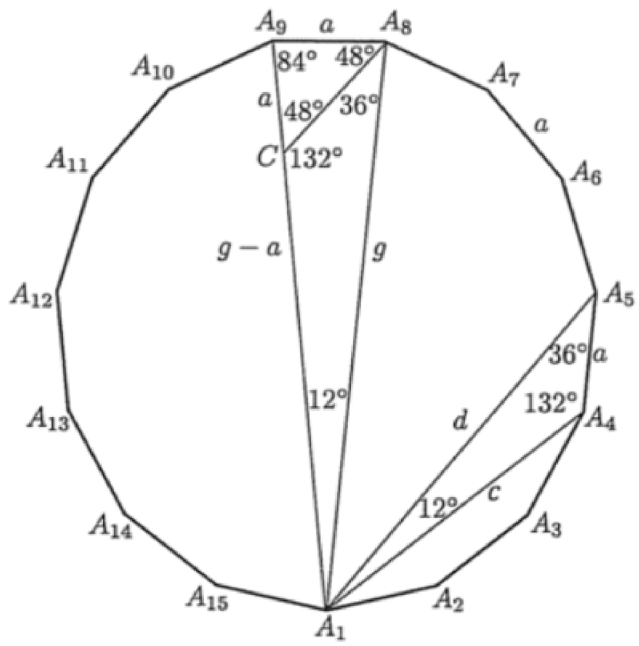
$$\frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{g} = \frac{1}{a}. \tag{4}$$

Dokaz:

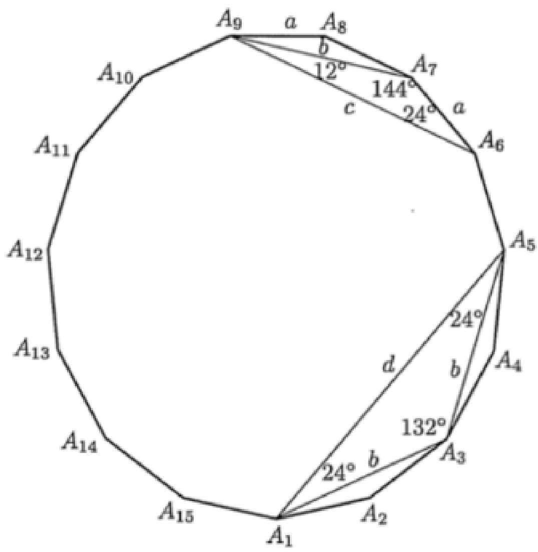
(a) Tačku presjeka dijagonala A_1A_7 i A_6A_{12} obilježimo sa B (Slika 1). Budući da je $\sphericalangle BA_6A_7 = \sphericalangle BA_7A_6 = 60^\circ$ (periferijski ugao nad trećinom kružnice opisane oko pravilnog petnaestougla); znači da je trougao $\triangle A_6A_7B$ jednakostranični. Kako je $|A_6B| = |A_7B| = a$, zaključujemo da je $|A_1B| = |A_{12}B| = f - a$ (jer je $|A_6A_{12}| = |A_1A_7|$, kao udaljenosti od šestog tjemena).
Trougao $\triangle A_1BA_{12}$ je također jednakostranični ($\measuredangle A_1BA_{12} = \measuredangle A_6BA_7$ i $|A_1B| = |A_{12}B|$), pa je $|A_1B| = |BA_{12}| = |A_{12}A_1|$. Kako je $|A_1B| = f - a$, $|A_1A_{12}| = d$ i $|A_1B| = |A_1A_{12}|$ slijedi da je $f - a = d$, odnosno $f - d = a$, to jest jednakost (1) je validna.

(b) Neka je tačka C na tetivi A_1A_9 tako da je $|A_9C| = |A_8A_9| = a$ (Slika 2). Kako je $|A_1A_8| = |A_1A_9|$, zbog osne simetrije pravilnog petnaestougla, tada je $|A_1A_9| = g$, pa otuda i $|A_1C| = g - a$.



Slika 2

S obzirom na to da je $\measuredangle A_8A_9A_1 = 12° \cdot 7 = 84°$ (periferijski ugao nad $\frac{7}{15}$ kružnice opisane oko pravilnog petnaestougla), u jednakokrakom trouglu $\triangle A_8A_9C$ je $\measuredangle A_9A_8C = \measuredangle A_8CA_9 = \frac{1}{2}(180° - 84°) = 48°$, pa je $\measuredangle A_1CA_8 = 180° - 48° = 132°$. U trouglu $\triangle A_1A_4A_5$ je $\measuredangle A_4A_1A_5 = 12°$ (periferijski ugao nad stranicom pravilnog petnaestougla) i $\measuredangle A_1A_5A_4 = 12° \cdot 3 = 36°$ (periferijski ugao nad petinom kružnice opisane oko pravilnog petnaestougla, Slika 2.), što znači da je u tom trouglu $\measuredangle A_1A_4A_5 = 180° - (12° + 36°) = 132°$.
Sad je jasno da trouglovi $\triangle A_1A_4A_5$ i $\triangle A_1A_8C$ imaju jednake uglove, pa su trouglovi $\triangle A_1A_4A_5$ i $\triangle A_1A_8C$ slični. Iz te sličnosti slijedi $d : c = g : (g - a)$, to jest $dg - ad = cg$. Odavde, poslije dijeljenja sa dg, dobijamo $1 - \frac{a}{g} = \frac{c}{d}$, ili $\frac{a}{g} + \frac{c}{d} = 1$.



Slika 3

Naime, periferijski ugao nad dvije stranice pravilnog petnaestougla je $12° \cdot 2 = 24°$, nad tri stranice je $12° \cdot 3 = 36°$, itd. Kako je $|A_1A_2| = a$, imamo $|A_kA_{k+1}| = a$ za $k = 1, 2, ..., 14$. Također je $|A_1A_3| = b = |A_kA_{k+2}|$ za $k = 1, 2, ..., 13$ (za $k = 7$ je $|A_7A_9| = b$) i $|A_1A_4| = |A_kA_{k+3}| = c$.

(c) Na osnovu sinusne teoreme primijenjene na trougao $\triangle A_1A_3A_5$ (Slika 3), imamo

$$\frac{b}{\sin 24°} = \frac{d}{\sin 132°}.$$

Kako je $\sin 132° = \sin(180° - 48°) = \sin 48°$ i $\sin 48° = 2\sin 24° \cos 24°$, dobijamo $\cos 24° = \frac{d}{2b}$.
Primjenom kosinusne teoreme na trougao $\triangle A_6A_7A_9$ slijedi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 24°,$$

odnosno

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{acd}{b}. \tag{5}$$

Sada ćemo koristiti sljedeću lemu.

Lema 2.2. *Ako u trouglu $\triangle ABC$ vrijedi $\alpha = 2\beta$, onda je $a^2 = b(b + c)$.*

Jedan njen dokaz nalazi se u [2], str. 133. Na osnovu ove leme primijenjene na trougao $\triangle A_6A_7A_9$, imamo

$$b^2 = a(a+c). \tag{6}$$

Iz jednakosti (5) i (6) slijedi $a^2 + c^2 - \frac{acd}{b} = a(a+c)$, odnosno

$$c - \frac{ad}{b} = a \Rightarrow bc - ad = ab \Rightarrow \frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1.$$

(d) Jednakost $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{g} = \frac{1}{a}$, zbog (prema sinusnom teoremu) $a = 2R\sin 12°$, $b = 2R\sin 24°$, $d = 2R\sin 48°$ i $g = 2R\sin 84°$, gdje je R poluprečnik opisane kružnice oko pravilnog petnaestougla (Slika 4), ekvivalentna je sa:

$$\frac{1}{\sin 24°} + \frac{1}{\sin 48°} + \frac{1}{\sin 84°} = \frac{1}{\sin 12°},$$

odnosno sa

$$\frac{\sin 48° + \sin 24°}{\sin 24° \sin 48°} = \frac{\sin 84° - \sin 12°}{\sin 12° \sin 84°}.$$

Transformacijom zbira i razlike sinusa u proizvod dobijamo:

$$\begin{aligned} &\frac{2\sin\frac{48°+24°}{2}\cos\frac{48°-24°}{2}}{\sin 24° \sin 48°} = \frac{2\sin\frac{84°-12°}{2}\cos\frac{84°+12°}{2}}{\sin 12° \sin 84°} \\ \iff &\frac{\cos 12°}{\sin 24° \sin 48°} = \frac{\cos 48°}{\sin 12° \sin 84°} \\ \iff &\cos 12° \cdot \sin 12° \cdot \sin 84° = \cos 48° \cdot \sin 24° \cdot \sin 48° \\ \iff &\sin 84° = \sin 96° (\text{jer je} \sin 2x = 2\sin x \cos x). \end{aligned}$$

Posljednja jednakost je tačna jer je $\sin 84° = \sin(180° - 96°) = \sin 96°$. Ovim je dokaz jednakosti (4) okončan.

□

3. Uopštenje jednakosti (1)

Sada ćemo dokazati sljedeći teorem, s malo izmijenjenom indeksacijom u odnosu na prethodni.

Teorem 3.1. *Ako je $A_0A_1A_2...A_{3n-1}$ pravilni mnogougao sa $3n$ stranica, onda je*

$$|A_0A_{n+1}| - |A_0A_{n-1}| = |A_0A_1| \quad \textit{([1], str. 32)}. \tag{7}$$

Dokaz: Neka je R dužina poluprečnika opisane kružnice oko pravilnog mnogougla s $3n$ stranica i α veličina periferijskog ugla s vrhom u proizvoljnom vrhu tog mnogougla $A_0...A_{n-1}A_nA_{n+1}...A_{3n-1}$, izuzev krajnjih tačaka, nad tetivama: A_0A_1, A_0A_{n-1} i A_0A_{n+1}, redom. Tada je

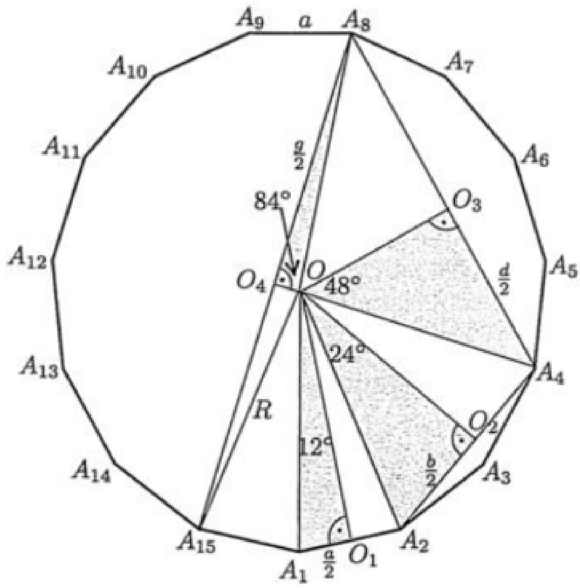
$$|A_0A_1| = 2R\sin\alpha, |A_0A_{n-1}| = 2R\sin(n-1)\alpha, |A_0A_{n+1}| = 2R\sin(n+1)\alpha,$$

pa je nejednakost (7) ekvivalentna sa

$$\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha = \sin\alpha. \tag{8}$$

Centralnih uglova veličine 2α ima ukupno $3n$, pa je $3n \cdot 2\alpha = 2\pi$, odakle je $n\alpha = \frac{\pi}{3}$. Zbog toga je

$$\cos n\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$



Slika 4

Korištenjem adicionih formula za sinus zbira i razlike dobijamo

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha =& \sin n\alpha \cdot \cos\alpha + \cos n\alpha \cdot \sin\alpha - (\sin n\alpha \cdot \cos\alpha - \cos n\alpha \cdot \sin\alpha)\\ =& 2\cos n\alpha \cdot \sin\alpha\\ =& 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha\\ =& \sin\alpha,\end{aligned}$$

što znači da jednakost (8) važi, a samim tim i jednakost (7). □

Primjedba 3.2. *Za $n = 5$ iz jednakosti (7) slijedi $|A_0A_6| - |A_0A_4| = |A_0A_1|$, odnosno $|A_1A_7| - |A_1A_5| = |A_1A_2|$ (po prethodnoj indeksaciji) ili $f - d = a$, to jest (1).*

Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati da za pravilni petnaestougao vrijedi jednakost $b + c = g$.
2. Dokazati jednakosti (1) i (2) korištenjem:
   a) trigonometrije, b) metode koordinata, c) Ptolomejevog teorema.
3. Dokazati jednakost (4) primjenom kompleksnih brojeva.

Literatura

[1] D. Milošević: *Uopštenja dvije teoreme za pravilne mnogouglove,* MAT-KOL XIX 3(2013), 31-33.
[2] S. Ognjanović i dr.: *Zbirka zadataka iz matematike,* Stručna knjiga, Beograd, 1984.