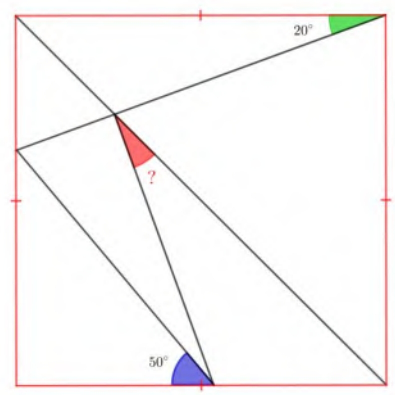
2

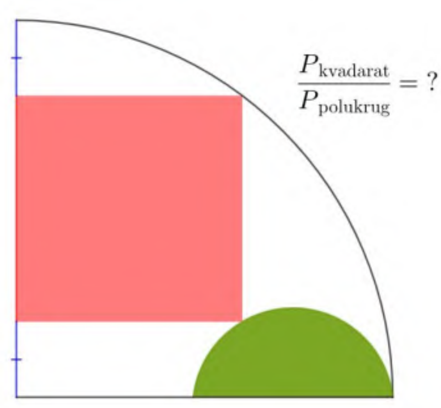
KUTAK ZA ZADATKE

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 37 - 38

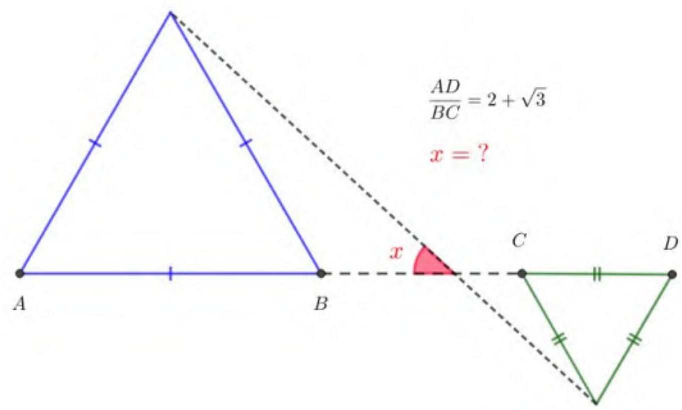
Zabavna matematika: Geometrija bez riječi

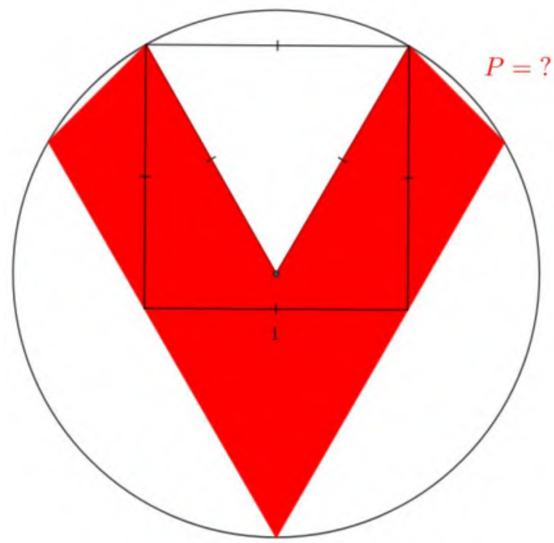
Naći nepoznate elemente naznačene na slikama, uz napomenu da su podudarne duži označene istom oznakom i u istoj su boji.

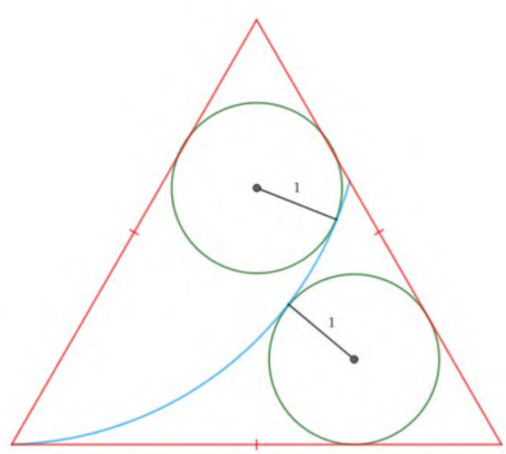




Ciljna skupina: svi uzrasti


$\frac{AD}{BC} = 2 + \sqrt{3}$
$x = ?$
x
A
B
C
D


$P = ?$
1


1
1
$x = ?$

EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 39 - 40

Nagradni zadatak: Bojenje

Jedna od velikih epizoda u istoriji matematike počela je 23. oktobra 1852. U pismu Vilijamu Rouanu Hamiltonu, Augustus De Morgan je napisao: "Jedan moj student me je danas zamolio da mu dam razlog za činjenicu za koju nisam znao da je činjenica - a još ne znam." Do danas, ta "činjenica" nastavlja da oduševljava i izaziva naučnike.
Učenik je bio Frederick Guthrie, a "činjenica" o kojoj je riječ izvorno je došla od njegovog brata Francisa. Nakon što je pogledao kartu britanskih okruga, zapitao se da li je uvijek moguće obojiti kartu korištenjem četiri ili manje boja, a istovremeno osigurati da regije koje dijele granicu (više od ugla) budu različite boje.
Činilo se kao da bi to uvijek trebalo biti moguće. "Što više razmišljam o tome, to mi se čini očiglednijim", napisao je De Morgan. Ipak, problem nije uzbudio Hamiltona, a De Morganovi napori da zainteresuje druge takođe su propali. Problem je uglavnom bio neaktivan sve do 1878. godine, kada je Arthur Cayley aktivirao pitanje dokaza te činjenice pred članove Londonskog matematičkog društva. Ubrzo nakon toga, dokazi su počeli da se pojavljuju. "Najboljim" se pokazao prvi, koga je napravio advokat Alfred Kempe 1879. godine. Dokaz je bio uvjerljiv i više od jedne decenije prihvaćan je kao tačan. Nažalost, Kempeov dokaz - kao i svi drugi koji će se pojaviti u sljedećem vijeku - bio je pogrešan. Ipak, bio je genijalan i sadržavao je ključne ideje koje će se pojaviti u konačnom dokazu.
Da bismo razumjeli kako su Kempe i većina matematičara gledali na ovaj problem, pomaže prepoznati da karta sadrži mnogo informacija koje nisu relevantne za problem bojenja, kao što su oblik, veličina i tačna lokacija svake regije. Bitno je samo koje regije dijele granice. Da se fokusiramo na informacije koje su važne, možemo kodirati ove odnose koristeći graf, poznat i kao mreža, gdje su tačke (vrhovi) povezane linijama (ivicama). Zamijenimo svaki region karte vrhom i povežemo vrhove susjednih regija ivicama. Ako to pomaže, možemo zamisliti da su vrhovi glavni gradovi, a ivice putevi koji ih spajaju.
Na ovaj način, problem bojenja mape postaje problem bojenja grafa: Obojite vrhove tako da susjedni (oni između kojih postoji direktan put) budu različitih boja. Minimalni broj boja naziva se hromatski broj grafa. Možemo se pitati o hromatskom broju bilo kojeg grafa, ali grafovi koji proizilaze iz mapa imaju posebna svojstva. Ovi grafovi su jednostavni, što znači da nema rubova koji počinju i završavaju na istom tjemenu (petlje), a dva vrha mogu biti spojena samo jednom linijom. Graf je također ravan, što znači da se može nacrtati tako da se ivice ne ukrštaju.
Sada možemo ponoviti problem Francisa Guthriea: dokazati da je hromatski broj svakog jednostavnog planarnog grafa najviše četiri.
Na matematičkoj konferenciji 1976., 124 godine nakon što je Guthrie postavio problem, Wolfgang Haken je objavio dokaz u saradnji s Kennethom Appelom i uz pomoć postdiplomca Johna Kocha. Reakcije su bile pomiješane. "Očekivao sam da će publika buknuti velikim ovacijama", napisao je Don Albers, koji je prisustvovao govoru. "Umjesto toga, odgovorili su pristojnim aplauzom!" To je bilo zato što se ekipa u velikoj mjeri oslanjala na kompjuter, umjesto da vodi argumentaciju olovkom i papirom.
Matematička zajednica samo je nevoljko prihvatila rezultate, vjerujući da dokaz treba da bude razumljiv i provjerljiv od strane ljudi. Iako je bilo prihvatljivo da kompjuteri izvode rutinsku aritmetiku, matematičari nisu bili spremni da prepuste logičko rasuđivanje računarskom uređaju. Ovaj konzervativizam i nevoljkost da se prihvati napredak koji štedi vrijeme nije bio novina. U 17. vijeku, bilo je sličnog negodovanja kada su neki matematičari koristili novonastale algebarske tehnike za rješavanje problema u geometriji. Slična problematika bi se mogla ponoviti sa usponom mašinskog učenja: hoće li matematičari prihvatiti teorem otkriven i dokazan kompjuterskim algoritmom?
Dokaz problema četiri boje bio je, naravno, samo početak kompjuterske revolucije u matematici. Godine 1998. Thomas Hales je koristio kompjuter da dokaže čuvenu pretpostavku Johannesa Keplera da je najefikasniji način slaganja kuglica onaj koji se rutinski koristi za slaganje narandži u trgovini. A nedavno su kompjuteri pomogli da se pronađe "božji broj" - maksimalni broj okreta koji je potreban za rješavanje Rubikove kocke (20 okreta licem ili 26 ako se pola okreta računa kao dva.)

Ciljna skupina: svi uzrasti

Iako je bojenje grafova započelo pitanjem u kartografiji, problemi koji nemaju nikakve veze s mapama ili bojama također se mogu uklopiti u okvir bojenja grafova. Na primjer, igra *sudoku* je prikriveni problem bojenja grafova. Posmatramo li svaku ćeliju sudoku tabele kao vrh i devet cifara kao boje, svaki vrh ima 20 ivica koje izlaze iz njega - po jednu za svaku ćeliju u svom redu, u svom stupcu i u svom podkvadratu 3×3. Ovaj graf od 81 vrha i 810 ivica počinje djelomičnim bojenjem (zadati brojevi). Cilj igre je obojiti ostatak vrhova tako da nikoja dva susjedna nisu iste boje.

Bez obzira na svu pažnju koju su ovi problemi bojenja dobili, još uvijek nemamo dokaz originalne teoreme o četiri boje koju je čovjek samostalno dokazao. Razlog za ovo nije zbog nedostatka pokušaja. Čak i danas se pojavljuju novi dokazi, izazivaju određeni entuzijazam i, kao i Kempeov dokaz, pokazuje se da sadrže greške.

Zadatak. *Igrajući se sa svojom šetogodišnjom kćerkom matematičar je primijetio da djevojčica redovito posloži lego kocke kao na slici. Naime, ona koristi lego kocke u tri boje (crvena, žuta i zelena) i u napravljenoj konstrukciji (piramida) nikoje dvije kocke sa istom bojom se ne dodiruju. Naravno, matematičar se zapitao (ne svoju kćer!) koliko je moguće napraviti različitih varijanti ovakvih piramida sa ovom osobinom o bojama?*