EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 2 – 5

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Grafičko određivanje izvoda funkcije

Amar Bapić[1], Amra Lušničkić[2]

[1] *Landesschulamt Sachsen-Anhalt*
[2] *Katolički školski Centar "Sv.Franjo" Tuzla*

Sažetak: U radu je prikazano kako grafički odrediti izvod funkcije jedne realne promjenljive, ukoliko funkcija nije zadana analitički niti tabelarno. Metod je ilustriran pomoću nekoliko odgovarajućih primjera.

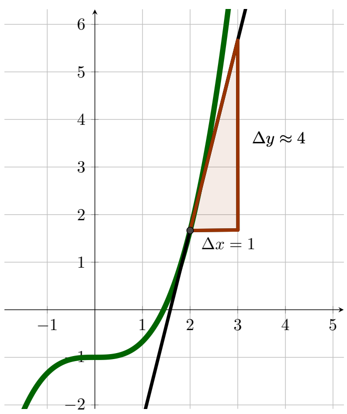
1. Nagibni trougao

Prije nego što objasnimo spomenuti metod, razmotrit ćemo *nagib* ili koeficijent smjera tangente na krivu u zadanoj tački. Koeficijent smjera k prave p definira se kao količnik

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

pri čemu su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) tačke na pravoj p. Poznato je da je vrijednost prvog izvoda u nekoj tački jednaka koeficijentu smjera tangente na krivu u toj tački.

Nagibni trougao ABC pomaže nam ocijeniti vrijednost k, pri čemu su A i B redom tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2), a C je tačka u ravni koja čini trougao ABC pravouglim. Cilj je odabrati tačke A, B i C tako da se priraštaji $\Delta y = y_2 - y_1$ i $\Delta x = x_2 - x_1$ jednostavno ocijene.



Slika 1: Nagibni trougao tangente na graf funcije f u tački $(2, f(2))$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: izvod, grafičko određivanje izvoda, nagibni trougao
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: juli 2024.

Primjer 1.1. *Neka je dat graf funkcije f kao na Slici 1. Konstruišimo tangentu u tački s apscisom $x = 2$ na graf funkcije f i nagibni trougao s katetom dužine $\Delta x = 1$. Sa grafa funkcije primijetimo da je $\Delta y \approx 4$. Otuda slijedi da je*

$$f'(2) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1} = 4.$$

2. Grafičko određivanje izvoda funkcije

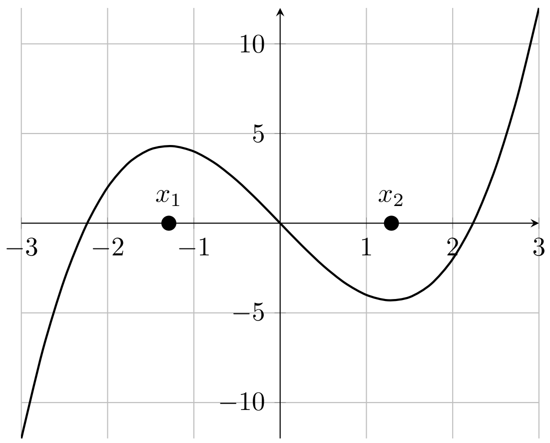
Pretpostavimo da je dat graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koja nije zadana analitički. Da bismo grafički odredili izvod funkcije $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ potrebno je razmotriti monotonost funkcije f, tačke lokalnih ekstrema (eventualno sedlaste tačke) i prevojne tačke [1–3]. Sljedeća tabela prikazuje povezanost pomenutih pojmova s funkcijama f i f':

Osobina funkcije f	Značaj osobine za f'
monotono rastuća na datom intervalu	graf iznad x-ose na datom intervalu
monotono opadajuća na datom intervalu	graf ispod x-ose na datom intervalu
stacionarne tačke	nultačke
prevojna tačka (prelaz iz konveksnog u konkavno stanje)	tačka lokalnog maksimuma
prevojna tačka (prelaz iz konkavnog u konveksno stanje)	tačka lokalnog minimuma

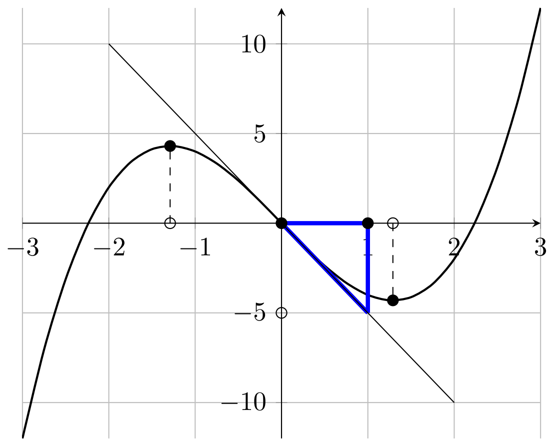
Tablica 1: Povezanost između osobina funkcija f i f'

Postupak grafičkog određivanja izvoda funkcije prikazat ćemo pomoću sljedećeg primjera.

Primjer 2.1. *Na Slici 2 je prikazan graf neke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kako bismo skicirali graf njenog izvoda f', koristit ćemo Tabelu 1.*



Slika 2: Graf funkcije f



Slika 3: Značajne tačke funkcija f i f'

- *Primijetimo da funkcija f ima dva lokalna ekstrema. Maksimum u tački x_1, neposredno lijevo od $x = -1$, te minimum u tački x_2, neposredno desno od $x = 1$. Prema tome:*

  $(x_1, 0)$ *i* $(x_2, 0)$ *su nultačke funkcije* f'.

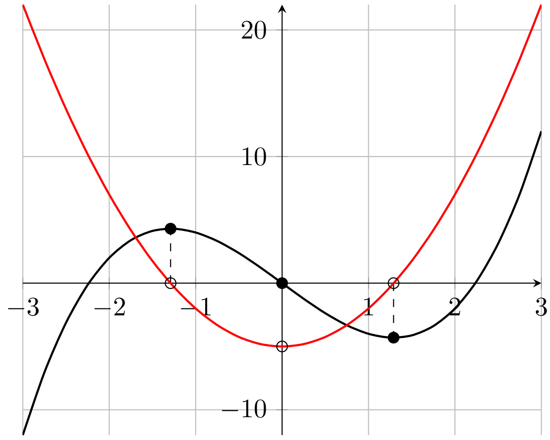
- *U tački $x = 0$ funkcija f prelazi iz konkavnog u konveksno stanje. Prema tome, f' ima u $x = 0$ minimum. Ocijenimo $f'(0)$ pomoću nagibnog trougla. Neka je t tangenta na graf f u tački $x = 0$. Sa Slike 3 primijećujemo da je $t(0) = 0$, $t(1) = -5$ i posljedično $f'(0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5-0}{1-0} = -5$. Dakle,*

  $(0, -5)$ *je minimum funkcije* f'.

- *Funkcija je strogo monotono rastuća na $I_1 = (-\infty, x_1)$ i $I_2 = (x_2, +\infty)$, a strogo monotono opadajuća na $I_3 = (x_1, x_2)$. Prema tome:*

  graf funkcije f' je na intervalu $I_1 \cup I_2$ iznad x-ose i na intervalu I_3 ispod x-ose.

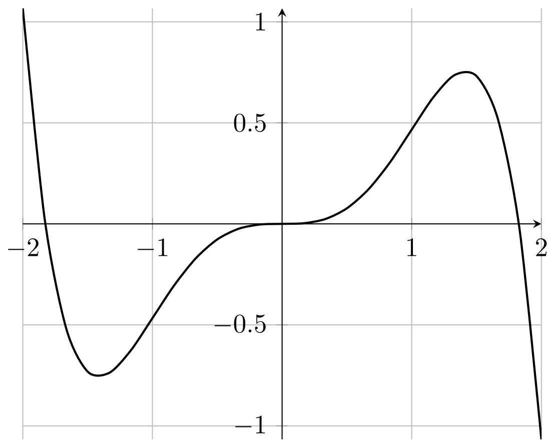
S datim podacima možemo skicirati graf funkcije f', koji je prikazan crvenom bojom na Slici 4.



Slika 4: Grafovi funkcija f i f'

Razmotrimo primjer kada funkcija ima sedlastu tačku, tj. tačku u kojoj je prvi izvod jednak nuli i monotonost ostaje nepromijenjena. U ovom slučaju, graf funkcije f' dodiruje apscisnu osu u posmatranoj tački. Pogledajmo sljedeći primjer koji ilustruje ovaj slučaj.

Primjer 2.2. *Na Slici 5 je prikazan graf neke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*



Slika 5: Graf funkcije f

- *Primijetimo da funkcija f ima dva lokalna ekstrema. Minimum u tački x_1, neposredno lijevo od $x = -1$, i maksimum u tački x_2, neposredno desno od $x = 1$. Prema tome:*

  $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$ su nultačke funkcije f'.

  Tačka $x = 0$ je sedlasta tačka za graf f. Prema tome,

  f' dodiruje $x - osu$ u tački $x = 0$.

- *U tački $x = -1$ funkcija f prelazi iz konveksnog u konkavno stanje. Prema tome, f' ima u $x = -1$ maksimum. Odredimo $f'(-1)$ pomoću nagibnog trougla. Neka je t_1 tangenta na graf f u tački $x = -1$. Sa Slike 6 vidimo da je $t(0) = 0.5$, $t(-1) = -0.5$ i posljedično $f'(-1) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.5-0.5}{-1-0} = 1$. Dakle,*

  $(-1, 1)$ *je maksimum funkcije* f'.

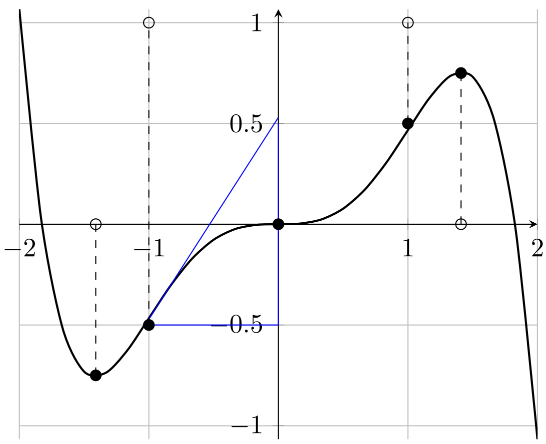
  Sličnim postupkom zaključujemo:

  $(1, 1)$ *je maksimum funkcije* f'.

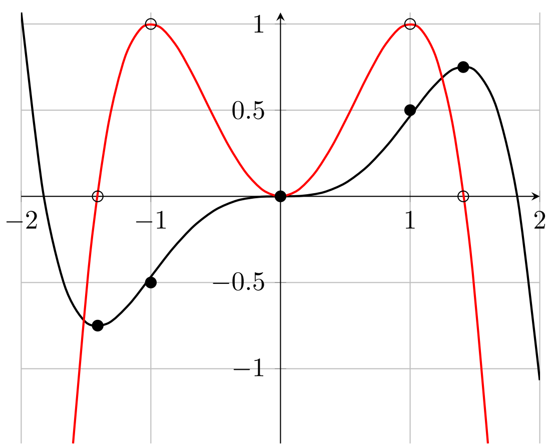
- *Funkcija f je strogo monotono rastuća na $I_1 = (x_1, x_2)$, a na intervalima $I_2 = (-\infty, x_1)$ i $I_3 = (x_2, +\infty)$ strogo monotono opadajuća. Prema tome:*

  graf funkcije f' je na intervalu I_1 iznad x-ose i na intervalu $I_2 \cup I_3$ ispod x-ose.

S datim podacima možemo skicirati graf funkcije f', koji je prikazan crvenom bojom na Slici 7.



Slika 6: Značajne tačke funkcija f i f'



Slika 7: Grafovi funkcija f i f'

Literatura

[1] A. Bigalke, W. Eid, H. Kuschnerow, N. Köhler, G. Ledworuski: *Mathematik - Sachsen-Anhalt: Qualifikationsphase, Band 11*, Cornelsen, 2015

[2] F. Dedagić: *Matematička analiza – prvi dio*, Univerzitet u Tuzli, Tuzla, 2005.

[3] F. Dedagić: *Matematička analiza – drugi dio*, Univerzitet u Tuzli, Tuzla, 2005.