EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 6 – 12

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Zadaci iz maksimuma i minimuma

Milorad Beljić[1]

[1] *Profesor u penziji, Republika Srbija*

Sažetak: Rad sadrži nekoliko zadataka iz maksimuma i minimuma sa više rješenja prigodnih za rad sa nadarenim učenicima različitih viših uzrasta.

1. Uvod

Zadaci u kojima se određuje najveće ili najmanje značenje promjenljivih veličina predstavlja izuzetno važan, ali i vrlo zahtjevan, materijal za rad sa nadarenim učenicima. Kada ih rješavamo elementarnim metodama povećavamo kod učenika interes i podstičemo razvoj funkcionalnog i estetskog vaspitanja. Njihovo rješavanje je prožeto primjenom različitih metoda koje svakako prate razni misaoni postupci. Pri tome se ispoljavaju zakonitosti koje se suptilnim prelazom uz logičke povezanosti „slivaju" uz funkcionalnu zavisnost u neku jednačinu, a ona onda "radi za nas".
Sa nadarenim učenicima se manje rješavaju tipski zadaci, a više oni zadaci u kojima se nešto istražuje. Rješavajući tipski zadatak proširivanjem, uopštavanjem ili uvođenjem dodatnih uslova, mnogo puta dobijamo nove zadatke koji su često i teži od početnih. Cijeli ovaj proces nas navodi na usredsređenost pažnje uz umno "dežurstvo" kako bismo uz veliku obazrivost donijeli adekvatan sud. Često su metode u rješavanju zadataka sa nadarenim učenicima nestandardne. Ta vrsta zadataka izlazi iz školskog programa jer su teški. Za njihovo rješavanje potrebno je, pored ličnog poznavanja školske matematike, izvjesna zrelost, dosjetljivost, logička spretnost u naslućivanju "puteva" za rješavanje (intuicija) i izuzetno poznavanje tehnike računanja i transformacija. Uz posjedovanje širokog logičkog znanja radi strogog matematičkog zaključivanja često se povezuju skoro nemoguće činjenice.
Iako je u ovom časopisu ranije bilo riječi o optimizaciji [3], ali korištenjem samo elementarnih metoda, u ovom radu ćemo uključiti i metode izračunavanja ekstremnih vrijednosti koristeći diferencijalni račun funkcija jedne i više varijabli [1, 2, 4, 5, 7].

U narednoj sekciji bit će predstavljeno rješenja nekih zadataka iz maksimuma i minimuma prigodnih za rad sa nadarenim učenicima različitih viših uzrasta.

2. Primjeri urađenih zadataka iz oblasti maksimuma i minimuma

Primjer 2.1. *Među svim pravougaonicima obima 20 naći onaj čija je površina najveća.*

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: maksimum, minimum, funkcija, trougao
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: decembar, 2024.

1. Rješenje: Obilježimo sa x i y stranice pravougaonika. Tada je

$$2x + 2y = 20, \quad P = xy.$$

Iz prve jednakosti dobijamo da je $y = 10 - x$, a uvrštavajući u drugu imamo

$$P = xy = x(10 - x) = -(x - 5)^2 + 25,$$

iz čega onda slijedi da je maksimalna površina $P_{\max} = 25$ za $x - 5 = 0$, to jest $x = 5, y = 5$, pa je traženi pravougaonik kvadrat.

2. Rješenje: Iz $O = 20$ dobijamo da je $x + y = 10$. Kako je

$$P = \frac{4xy}{4} = \frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2) = \frac{1}{4}(100 - (x - y)^2),$$

imamo $P_{\max} = \dfrac{1}{4} \cdot 100 = 25$ za $x - y = 0$, to jest za $x = y = 5$.

3. Rješenje: Iz $P = x(10 - x)$, na osnovu odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo

$$P = x(10 - x) \leq \left(\frac{x + (10 - x)}{2}\right)^2 = 25.$$

Jednakost vrijedi kada je $x = 10 - x$, pa je $x = 5$.

4. Rješenje: Primjenom diferencijalnog računa jedne varijable na funkciju $P(x) = x(10 - x)$, pri čemu je $y = 10 - x$, imamo

$$P'(x) = 0 \Longleftrightarrow 10 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 5,$$
$$P''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow P''(5) = -2 < 0.$$

Vidimo da, za $x = 5$ (što implicira i $y = 5$), funkcija $P(x) = x(10 - x)$ dostiže maksimum $P_{\max} = 25$.

5. Rješenje: Razmatrajmo funkciju dviju varijabli $P(x, y) = xy$ i potražimo njenu maksimalnu vrijednost uz uslov $x + y = 10$. Uzimajući da je $\phi(x, y) = x + y - 10$, razmatrat ćemo ustvari sljedeću funkciju

$$F(x, y) = P(x, y) + \lambda\phi(x, y)xy + \lambda(x + y - 10),$$

za koju vrijedi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + \lambda = 0 \Longrightarrow y = -\lambda,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0 \Longrightarrow x = -\lambda,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -5, \ x = y = 5.$$

Kako je $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 1$, imamo

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = dy + dy = 0 \Longrightarrow dy = -dx,$$

pa je

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2dx(-dx) = -2dx^2 < 0,$$

što implicira da funkcija F, odnosno funkcija P dostiže maksimum $P_{\max} = 25$, za $x = 5$ i $y = 5$.

Primjedba 2.2. *Rješenja u prva tri načina mogu se raditi sa nadarenim učenicima osnovne škole ili sa redovnim učenicima drugog razreda srednje škole. Četvrto rješenje se može raditi sa maturantima, a peto rješenje sa studentima. Naravno da se svi načini rješavanja mogu raditi s učenicima srednih škola koji se pripremaju za različite nivoe takmičenja.*

Primjer 2.3. *Iz proizvoljne tačke M unutar datog trougla ΔABC spuštene su normale MA_1, MB_1 i MC_1 redom na stranice BC,CA i AB.* [1)] *Naći položaj tačke M unutar trougla ΔABC da zbir*

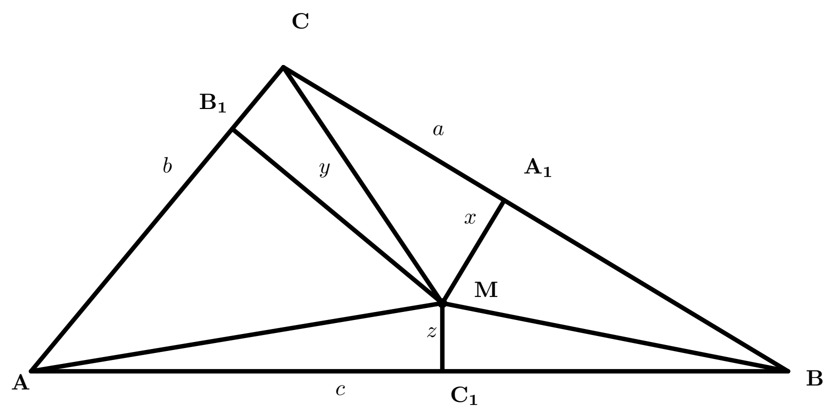
$$\frac{|BC|}{|MA_1|}+\frac{|CA|}{|MB_1|}+\frac{|AB|}{|MC_1|} \tag{1}$$

bude minimalan.

1. Rješenje: Koristeći oznake: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|MA_1| = x$, $|MB_1| = y$, $|MC_1| = z$, dobijamo (v. Sliku 1)

$$ax + by + cz = 2P = \text{const}, \tag{2}$$

pri čemu je P površina trougla ΔABC.



Slika 1

Ako uvedemo oznaku $F = \frac{|BC|}{|MA_1|}+\frac{|CA|}{|MB_1|}+\frac{|AB|}{|MC_1|} = \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$, množenjem sa (2) dobijamo

$$\begin{aligned} F\cdot 2P &= \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz) \\ &= a^2+b^2+c^2+\frac{aby}{x}+\frac{acz}{x}+\frac{abx}{y}+\frac{bcz}{y}+\frac{acx}{z}+\frac{bcy}{z} \\ &= a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ac\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

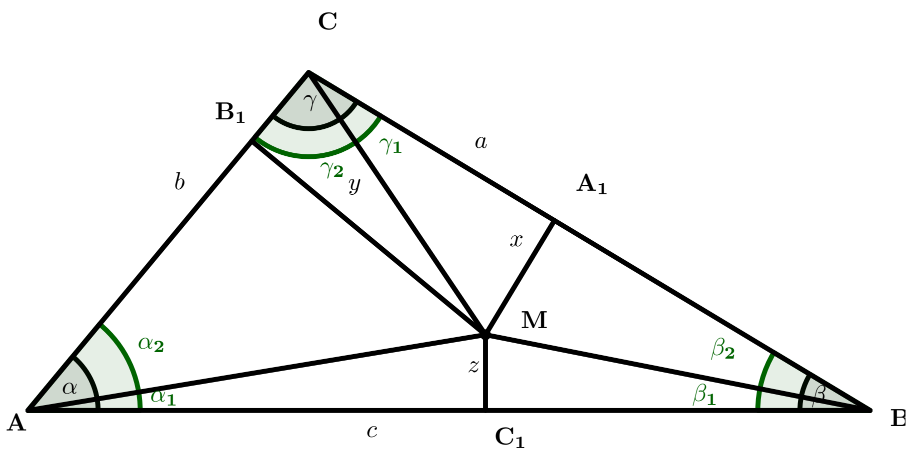
Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine brojeva m i n oblika $\frac{m}{n}+\frac{n}{m} \geq 2$, $m>0, n>0$, gdje znak jednakosti važi za $m=n$, iz (3) dobijamo

$$F\cdot 2P \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = (a+b+c)^2 = 4s^2.$$

[1)]Ovaj zadatak je bio (1981. godine) na XXII internacionalnoj matematičkoj olimpijadi srednjoškolaca.

Jednakost vrijedi ako je $x = y = z$, a to znači da je tačka M centar upisanog kruga u dati trougao.

2. Rješenje: Neka su α, β i γ unutrašnji uglovi trougla $\triangle ABC$ i neka je (vidi Sliku 2) $\angle BAM = \alpha_1$, $\angle MAB_1 = \alpha_2$, $\angle ABM = \beta_1$, $\angle MBA_1 = \beta_2$, $\angle BCM = \gamma_1$, $\angle MCB_1 = \gamma_2$.



Slika 2

Iz trougla ΔA_1MB i trougla ΔA_1MC slijedi

$$\operatorname{ctg}\beta_2 = \frac{BA_1}{x}, \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg}\gamma_1 = \frac{CA_1}{x}, \tag{5}$$

odakle se sabiranjem dobije

$$\frac{a}{x} = \operatorname{ctg}\gamma_1 + \operatorname{ctg}\beta_2. \tag{6}$$

Analogno je

$$\frac{b}{y} = \operatorname{ctg}\gamma_2 + \operatorname{ctg}\alpha_2, \tag{7}$$

$$\frac{c}{z} = \operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_1. \tag{8}$$

Sabiranjem (6), (7) i (8) imamo

$$F = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2 + \operatorname{ctg}\gamma_1 + \operatorname{ctg}\gamma_2,$$

a odavde jednostavnim transformacijama dobijamo

$$F = \frac{2\sin\alpha}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos\alpha} + \frac{2\sin\beta}{\cos(\beta_1 - \beta_2) - \cos\beta} + \frac{2\sin\gamma}{\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos\gamma}. \tag{9}$$

Veličina F je minimalna ako je svaki sabirak u (9) minimalan, odnosno ako su nazivnici maksimalni, što se postiže za

$$\cos(\alpha_1-\alpha_2)=1,\ \cos(\beta_1-\beta_2)=1,\ \cos(\gamma_1-\gamma_2)=1,$$

to jest

$$\alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2,\ \gamma_1=\gamma_2,$$

pa je tražena tačka M centar upisanog kruga u trougao ΔABC.

3. Rješenje: Posmatrajmo funkciju $U(x,y,z)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}$ i odredimo vezani (uslovni) ekstremum ove funkcije, uz uslov $ax+by+cz=2P$, pri čemu je P površina datog trougla $\triangle ABC$. Neka je

$$\phi(x,y,z)=ax+by+cz=2P.$$

Tada je $F(x,y,z,\lambda)=U(x,y,z)+\lambda\cdot P(x,y,z)$ oblika

$$F(x,y,z,\lambda)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+\lambda(ax+by+cz-2P). \tag{10}$$

Budući da je

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{a}{x^2}+\lambda a=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{b}{y^2}+\lambda b=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{c}{z^2}+\lambda c=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda}=ax+by+cz-2P=0,
\end{aligned}$$

pri čemu je $x,y,z>0$, dobijemo da je $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ i

$$\frac{a}{\sqrt{\lambda}}+\frac{b}{\sqrt{\lambda}}+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}=2P.$$

Odavde je $\sqrt{\lambda}=\dfrac{a+b+c}{2P}=\dfrac{2s}{2rs}=\dfrac{1}{r}$. Tada je $x=y=z=r$, pa je stacionarna tačka $M(r,r,r)$. Dalje imamo da je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{2a}{x^3},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=\ldots=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{2b}{y^3},\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=\frac{2c}{z^3}.$$

Označimo $a_{ij}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(M), i,j=1,2,3$. Tada je $a_{11}=\dfrac{2a}{r^3}$, $a_{12}=a_{21}=a_{13}=a_{31}=0$, $a_{23}=a_{32}=0$, $a_{22}=\dfrac{2b}{r^3}$, $a_{33}=\dfrac{2c}{r^3}$, pa prema tome glavni minori D_1,D_2,D_3 postaju

$$D_1=a_{11}=\frac{2a}{r^3}>0,\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\frac{4ab}{r^6}>0,\ D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\frac{8abc}{r^9}>0,$$

Iz toga slijedi da funkcija U u tački $M(r,r,r)$ ima lokalni minimum $U_{\min}=\dfrac{a}{r}+\dfrac{b}{r}+\dfrac{c}{r}=\dfrac{a+b+c}{r}=\dfrac{2s}{r}$, a tačka M je centar upisanog kruga u dati trougao.

Primjer 2.4. *Od svih trouglova datog obima najveću površinu ima jednakostranični trougao. Dokazati.*

1. Rješenje: Neka su a, b i c dužine stranica trougla datog obima $2s$. Na osnovu odnosa aritmetičke i geometrijske sredine brojeva $s-a$, $s-b$ i $s-c$ imamo

$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Odavde je

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

Sada je $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^4}{27}$, jer je $P \leq \frac{s^2\sqrt{3}}{9}$, pri čemu znak jednakosti važi za $s-a=s-b=s-c$, odnosno $a=b=c$, a to znači da je trougao jednakostraničan.

2. Rješenje: ([6], str. 232-233) Poznato je da se površina trougla, čije su dužine stranica a, b i c, a R dužina poluprečnika oko njega opisane kružnice, može izraziti u obliku $P = \frac{abc}{4R}$. Prema sinusnoj teoremi je $a = 2Rsin\alpha$, $b = 2Rsin\beta$, $a = 2Rsin\gamma$, pa je

$$P = 2R^2 sin\alpha sin\beta sin\gamma. \tag{11}$$

U nastavku ćemo koristiti Jensenovu [2)] nejednakost u slučaju kad je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ konveksna na A:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right),$$

uzimajući da je $f(x) = \ln sinx$ (koja je konveksna na $A = (0,\pi)$ jer je $f''(x) = -\frac{1}{sin^2x} < 0$ za sve $x \in (0,\pi)$), $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ i $x_3 = \gamma$. Tako dobijemo

$$\ln sin\alpha + \ln sin\beta + \ln sin\gamma \leq 3\ln sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$

odnosno,

$$sin\alpha sin\beta sin\gamma \leq sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi za $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, a što znači da je trougao jednakostraničan, pa je $a = \frac{2s}{3}$ i $R = \frac{2s\sqrt{3}}{9}$. Odavde, prema (11), slijedi da je površina tog trougla $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}$.

3. Rješenje: Kako iz $a+b+c=2s$ slijedi $c = 2s-a-b$, posmatrajmo funkciju

$$g(a,b) = s(s-a)(s-b)(a+b-s)$$

i odredimo njenu maksimalnu vrijednost (pod istim uslovima će i funkcija $\sqrt{g(a,b)} = P$ imati maksimalnu vrijednost). Iz sistema jednačina

$$\frac{\partial g}{\partial a} = s(s-b)(2s-2a-b) = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial b} = s(s-a)(2s-a-2b) = 0,$$

[2)] Johan Ludwig Jensen (1859-1925), danski matematičar

dobijamo stacionarnu tačku $S(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3})$, što znači da je $a = b = c = \frac{2s}{3}$. Primijetiomo da $s = a$ i $s = b$ ne dolazi u obzir jer bi tada bilo $c = 0$, a to nema smisla.
S obzirom da je

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}|_{a=b=\frac{2s}{3}} = -2s(s-b)|_{a=b=\frac{2s}{3}} = -\frac{2s^2}{3},$$
$$B = \frac{\partial^2 g}{\partial ab}|_{a=b=\frac{2s}{3}} = -2s(3s-2a-2b)|_{a=b=\frac{2s}{3}} = -\frac{s^2}{3},$$
$$C = \frac{\partial^2 g}{\partial b^2}|_{a=b=\frac{2s}{3}} = -2s(s-a)|_{a=b=\frac{2s}{3}} = -\frac{2s^2}{3},$$

imamo $AC - B^2 = \dfrac{1}{3}s^2 > 0$, što znači da funkcija g (a samim tim i P) ima ekstremnu vrijednost, a zbog $A = C < 0$ u pitanju je maksimum. Pri tome je $a = b = c$, pa je trougao, datog obima $2s$, sa maksimalnom površinom $P = \sqrt{s \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{s}{3}} = \frac{s^2}{9}\sqrt{3}$, ustvari jednakostranični trougao.

3. Zadaci za vježbu

1. Od svih pravougaonika upisanih u krug poluprečnika 4, odredi onaj koji ima najveću površinu
2. Iz proizvoljne tačke M, unutar datog tetraedra $ABCD$, spuštene su normale MA_1, MB_1, MC_1 i MD_1 na stranice P_A, P_B, P_C i P_D koje čine površine plohe redom BCD, ACD, ABD i ABC. Od svih tačaka M naći takvu tačku da zbir $\dfrac{P_A}{|MA_1|} + \dfrac{P_B}{|MB_1|} + \dfrac{P_C}{|MC_1|} + \dfrac{P_D}{|MD_1|}$ bude minimalan.
3. Neka je tačka O centar opisane kružnice oko trougla ΔABC i normalna rastojanja te tačke od stranica a, b i c redom d_a, d_b i d_c. Dokazati nejednakost $d_a^n + d_b^n + d_c^n \leq 3\left(\dfrac{R}{2}\right)^n$.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2000.
[2] O. Bottema: *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.
[3] N. Karać, A. Šehanović: Neke elementarne algebarske metode u određivanju ekstremnih vrijednosti, *Evolventa*, vol. 4, no. 2 (2021), 22–23.
[4] D.S. Mitrinović: *Priručnik za takmičenje srednjoškolaca u matematici – Geometrijske nejednakosti*, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1966.
[5] T. Begenišić: *Viša matematika*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1968.
[6] T. Tadić: *Pripreme za matematička takmičenja*, Element, Zagreb, 2010.
[7] *"Tangenta"*, No. 47/3, godina 2006/07, DMS, Beograd, 2007.