EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 13 - 17

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Jednakokraki trougao sa uglom od 100°

Dragoljub Milošević[1]

[1] *Profesor u penziji, Republika Srbija*

Sažetak: U radu su navedene i dokazane neke jednakosti u vezi sa jednakokrakim trouglom čiji je jedan unutrašnji ugao jednak 100°.

1. Uvod

Već u osnovnoj školi susrećemo se s trouglom, to jest dijelom ravni koji je ograničen sa tri duži. Osnovni elementi trougla su stranice i uglovi. Trouglove klasificiramo prema stranicama (jednakostranični, jednakokraki, nejednakostranični) i prema uglovima (oštrougli, pravougli, tupougli). Najduža stranica pravouglog trougla naziva se hipotenuza, a ostale dvije nazivamo katete. Kod jednakokrakog trougla jednake stranice su kraci.

Jedno od četiri pravila (stava) podudarnosti (pravilo USU, drugi stav podudarnosti) glasi:

Teorem 1.1. *Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju jednaku po jednu stranicu i oba odgovarajuća ugla nalegla na tu stranicu.*

Takođe navedimo da Pitagorina teorema vrijedi za pravougli trougao:

Teorem 1.2. *Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad katetama.*

Saglasno euklidskoj geometriji koristit ćemo se i tvrdnjama:

Teorem 1.3. *Zbir uglova u proizvoljnom trouglu je* 180°*.*

Teorem 1.4. *Naspram jednakih uglova (stranica) u trouglu leže jednake stranice (uglovi).*

U radu ćemo koristiti i poznatu *kosinusnu teoremu*:

Teorem 1.5. *U trouglu* $\triangle XYZ$*, čije su stranice* $|YZ| = x$*,* $|ZX| = y$ *i* $|XY| = z$*, vrijedi*

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos\angle(ZXY).$$

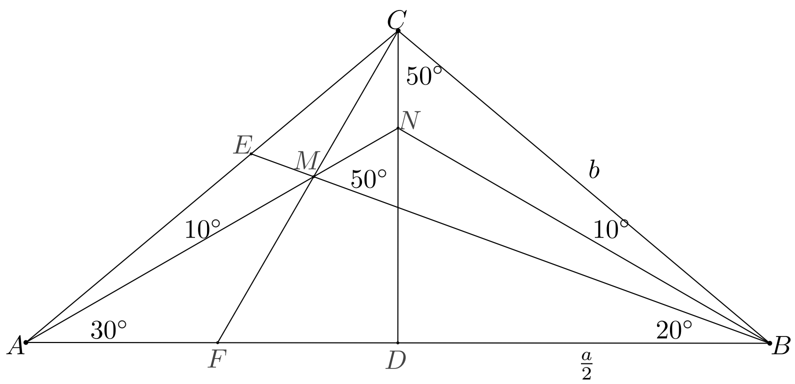
Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: trougao
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: maj 2024.

2. Jednakosti za jednakokraki trougao s uglom 100°

Prikazat ćemo po jedan dokaz za pet jednakosti koje vrijede u jednakokrakom trouglu s uglom od 100°, a za posljednju šestu jednakost dat ćemo dva dokaza.

Teorem 2.1. *U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$ u kojem je $|AB| = a$, $|AC| = |BC| = b$ i $\angle ACB = 100°$ izabrana je tačka M tako da je $\angle MAB = 30°$ i $\angle MBA = 20°$. Ako prave BM i CM presjecaju stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ respektivno u tačkama E i F, tada vrijede slijedeće jednakosti:*

1. $\angle CMB = 80°$.
2. $|AF| = |MF|$.
3. $|BE| = |BF|$.
4. $|BF| = |AF| + |CF|$.
5. $|BM| \cdot |CE| = |CM| \cdot |BE|$.
6. $a^3 + b^3 = 3ab^2$.



Slika 1:

Dokaz:

1. Neka je dat jednakokraki trougao $\triangle ABC$ u kome je $\angle ACB = 100°$. Tada je $\angle CAB = \angle ACB = (180° - 100°) : 2 = 40°$. Neka je tačka D podnožje normale iz tačke C na stranicu AB, a tačka N neka je presjek pravih AM i CD (Slika 1). Tada je $\angle BMN$ spoljašnji ugao za trougao $\triangle ABM$, pa je $\angle BMN = 30° + 20° = 50°$. Zbog simetrije je $\angle AND = \angle BND = 60°$ i $\angle CBN = \angle MAC = 10°$. Kako je $\angle BNM = \angle BNC = 120°$, $|BN| = |BN|$ i $\angle MBN = \angle CBN = 10°$, trouglovi $\triangle BMN$ i $\triangle BCN$ su podudarni (pravilo USU), te je $|BC| = |BM|$. Tada je $\triangle BCM$ jednakokraki trougao i $\angle BCM = \angle CMB = (180° - 20°) : 2 = 80°$.
2. Uočavamo da je $\angle CMN = \angle CMB - \angle BMN = 80° - 50° = 30°$. S obzirom da je $\angle MAF = \angle MAB = 30°$ i $\angle AMF = \angle CMN$ (unakrsni uglovi), zaključujemo da je $\triangle AFM$ jednakokraki trougao. Zbog toga je $|AF| = |MF|$.
3. $\angle BFM$ je spoljašnji ugao u $\triangle AFM$, pa je $\angle BFM = 2 \cdot 30° = 60°$. Također, imamo i $\angle BEC = 180° - (20° + 100°) = 60°$. Budući da je $\angle FBM = \angle CBE = 20°$, $|BM| = |BC|$ i $\angle BFM = \angle BEC = 60°$, trouglovi $\triangle BMF$ i $\triangle BCE$ su podudarni (pravilo USU), što znači da je $|BE| = |BF|$.
4. Budući da je $\angle DCF = 30°$, pravougli trougao $\triangle CFD$ je polovina jednakostraničnog trougla stranice $\overline{CF}$. Zbog toga je $|FD| = \frac{1}{2}|CF|$, a time je

$$|AF| = |AD| - |FD| = \frac{a}{2} - \frac{|CF|}{2} \tag{1}$$

i

$$|BF| = |BD| + |DF| = \frac{a}{2} + \frac{|CF|}{2}. \tag{2}$$

Najzad, oduzimanjem jednakosti 1 i 2, dobijamo

$$|BF| - |AF| = \frac{a}{2} + \frac{|CF|}{2} - \left(\frac{a}{2} - \frac{|CF|}{2}\right) = |CF|,$$

to jest $|bf| = |AF| + |CF|$.

5. Trouglovi $\triangle BMF$ i $\triangle MCE$ imaju jednake uglove, pa su slični. Na osnovu te sličnosti imamo $|BM| : |CM| = |BF| : |CE|$. Kako je $|BF| = |BE|$, slijedi tražena jednakost $|BM| \cdot |CE| = |CM| \cdot |BE|$.
6. Na stranici $\overline{AB}$ uočimo tačku G, tako da je $\angle BCG = \angle ABC = 40°$. Sada imamo da je $\angle ACG = 60°$ (Slika 2). Trougao $\triangle BCG$ je jednakoraki ($\angle GBC = \angle BCG$), što znači da je $|CG| = |BG| = x$. Tada je $|AG| = a - x$. Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle BCG$ imaju jednake uglove, te su slični. Zbog toga je $|AB| : |BC| = |AC| : |CG|$, odnosno vrijedi $a : b = b : x$. Otuda je $x = \dfrac{b^2}{a}$, pa je $|BG| = |CG| = \dfrac{b^2}{a}$ i $|AG| = a - \frac{b^2}{a}$. Neka je tačka H podnožje normale iz tačke A na stranicu $\overline{CG}$. Trougao $\triangle AHC$ je polovina jednakostraničnog trougla stranice $\overline{AC}$, što znači da je $|CH| = \dfrac{b}{2}$ i na osnovu Pitagorine teoreme je

$$|AH|^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3b^2}{4}.$$

Dakle, $|AH| = \dfrac{\sqrt{3}b}{2}$.
Nadalje imamo

$$|GH| = |CG| - |CH| = \frac{b^2}{a} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2a}(2b - a).$$

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle AGH$, dobijamo $|AG|^2 = |AH|^2 + |GH|^2$, iz čega onda imamo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2a}(2b - a)\right)^2 &\Longrightarrow \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2} = \frac{3b^2}{4} + \frac{b^2(4b^2 - 4ab + a^2)}{4a^2} \\ &\Longrightarrow 4(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 3a^2b^2 + 4b^4 - 4ab^3 + a^2b^2 \\ &\Longrightarrow 4a^4 + 4ab^3 = 12a^2b^2 \\ &\Longrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2.\end{aligned}$$

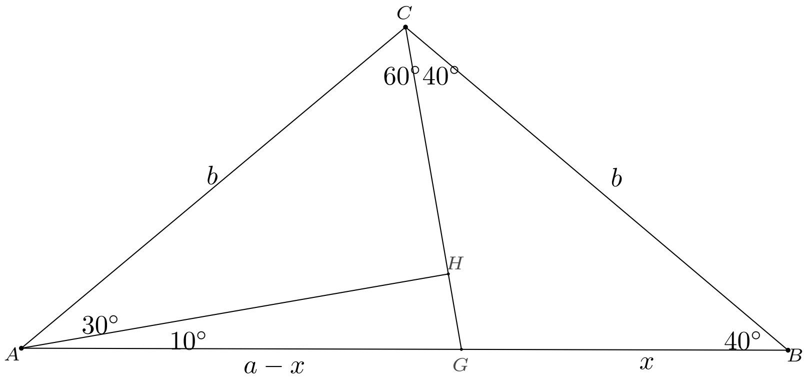
Pokažimo sada i drugačiji način dokazivanja jednakosti 6. Naime, poslužimo se trigonometrijom. Kako je $|CG| = |BG| = x$, primjenom kosinusne teoreme na $\triangle AGC$ imamo

$$(a - x)^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos 60°,$$

odakle je

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a - b}. \tag{3}$$

Iskoristimo sad pomoćno tvrđenje:
Ako u $\triangle ABC$ vrijedi $\alpha = 2\beta$, onda vrijedi jednakost $a^2 = b(b + c)$



Slika 2:

Dokaz ove tvrdnje se izvodi koristeći sličnost trouglova i Pitagorine teoreme, a jedan od dokaza se može naći u [3].
S obzirom da je $\angle AGC = 80^\circ = 2 \cdot 40^\circ = 2 \cdot \angle CAG$, možemo primjeniti navedeno pomoćno tvrđenje na $\triangle AGC$, to jest

$$|AC|^2 = |CG|(|CG| + |AG|) \iff b^2 = x(x + a - x),$$

odakle je

$$x = \frac{b^2}{a}. \tag{4}$$

Iz jednakosti 3 i 4 slijedi da je

$$\frac{a^2 - b^2}{2a - b} = \frac{b^2}{a},$$

što nam daje traženu jednakost $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

□

Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1. *Dokazati sljedeće jednakosti (v. sliku 1.):*

1. $|AF| = |EF| = |MF|$.
2. $|AM| = |AF|\sqrt{3}$.
3. $|CM| = |MN|\sqrt{3}$.
4. $b^3 + c^3 = 3b^2c$, *gdje je* $c = |CM|$.
5. $|AM| \cdot |MN| = |AF| \cdot |CM|$.
6. $|BE| = \dfrac{a}{a+b}\sqrt{b(a+2b)}$.
7. $|AM| \cdot |BN| = \dfrac{ab^2}{a+b}$.
8. $|CM| = \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+2b} + \sqrt{b}}$.
9. $\dfrac{|BC|}{|MC|} - \dfrac{|CF|}{|AF|} = 1$

Zadatak 2. *U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$, s uglom $\angle ACB = 100°$, odabrana je tačka M tako da je $\angle MAB = 10°$ i $\angle MBA = 20°$.*

1. *Odrediti veličinu ugla $\angle CMB$.*
2. *Dokazati da je $|BM| = |CM| = |AB| - |BC|$.*

Zadatak 3. *U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$ je $\angle ACB = 100°$. Krak $\overline{BA}$ je produžen do tačke D (A je između C i D) tako da je $|CD| = |AB|$. Izračunati $\angle ABD$.*

Zadatak 4. *U trouglu $\triangle ABC$ je $|AC| = |BC| = b$, $|AB| = a$ i $a^3 + b^3 = 2ab^2$. Dokazati da je $\angle ACB = 20°$ ili $\angle ACB = 100°$.*

Literatura

[1] M. Prvanović: *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.
[2] P. Stojković: *Razvijanje sposobnosti učenja*, Svjetlost, Sarajevo, 1981.
[3] D. Milošević: *Razni dokazi teoreme iz geometrije*, MAT-KOL, XVII (1), (2011.), 49-54.