EVOLVENTA (JAMTK) 7(1) (2024), 18 – 21

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Pogled iz drugog ugla

Alija Muminagić[1], Jens Carstensen[2]

[1]*penzioner, Danska*
[2]*penzioner, Danska*

Sažetak: U ovom članku pišemo o nekim razmišljanjima tokom rješavanja i nakon rješenja nekog zadatka.

1. Uvod

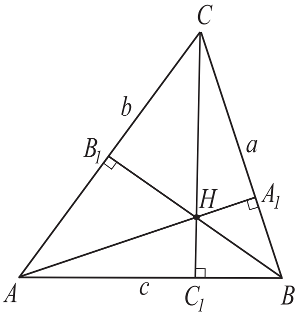
Rješavajući neki zadatak, ponekad dolazimo do nekih relacija, od kojih dobijamo rješenje nekog novog zadatka koji nema nikakve veze s polaznim. Da je to upravo tako, uvjerićemo se rješavajući Zadatak 1. koji je interesantan sam po sebi, a iz kojeg dobijamo vrlo interesantan nusprodukt. Međutim, može se desiti da rješavajući zadatak dobijemo istovremeno i rješenje još jednog novog zadatka. Takav je u našem članku Zadatak 2.2.

2. Zadaci

Zadatak 2.1. *Dokazati da u oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ vrijedi*

$$\frac{a}{|AH|}+\frac{b}{|BH|}+\frac{c}{|CH|}\geq\frac{s^2}{T},$$

gdje su a, b i c dužine odgovarajućih stranica tog trougla, s - poluobim, T - površina i H njegov ortocentar.



Slika 1.

Rješenje: Uz oznake kao na Slici 1. imamo da je

$$\triangle AA_1B\sim\triangle BC_1C\ \text{ i }\ \triangle AA_1B\sim\triangle AC_1H.$$

Odavde slijedi da je $\triangle AC_1H\sim\triangle BC_1C$, pa je $\dfrac{a}{|AH|}=\dfrac{|CC_1|}{|AC_1|}=\operatorname{tg}\alpha$ i analogno $\dfrac{b}{|BH|}=\operatorname{tg}\beta$ i $\dfrac{c}{|CH|}=\operatorname{tg}\gamma$.

Slijedi da treba dokazati da je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{s^2}{T}$.
Zbog, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, $T=r^2(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})$ i $s=r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})$ (čitaocima preporučujemo da dokažu ove jednakosti, koje vrijede u trouglu).

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: trougao, ugao, nejednakost, minimum funkcije
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: mart 2024.

Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \geq \frac{s^2}{T} &\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma \geq \frac{r^2(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})^2}{r^2(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})}\\
&\Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma \geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\\
&\Longrightarrow \left(\text{zbog}\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},\ \text{dokažite !}\right)\\
&\Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \geq \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}\\
&\quad\ \left(\text{ovdje smo primijenili da je } \operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\ \text{ i }\ \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)\\
&\Longrightarrow \frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma} \geq (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\\
&\Longrightarrow \left(\text{zbog}\quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x\right)\\
&\Longrightarrow \frac{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma} \geq (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\\
&\Longrightarrow (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \geq \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \text{ (to je naš nusprodukt).}
\end{aligned}$$

Zaista, neočekivano smo došli do dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti u oštrouglom trouglu, koju nije jednostavno direktno dokazati. Zato ćemo ovdje navesti jedan od mogućih dokaza.

Poznato je da vrijede sljedeće jednakosti (v. [1], [6]):

$$|OH|^2 = 9R^2-(a^2+b^2+c^2), \tag{1}$$

$$|IO|^2 = R^2-2Rr, \tag{2}$$

$$|IH|^2 = 2r^2-4R^2 cos\alpha cos\beta cos\gamma, \tag{3}$$

$$sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}, \tag{4}$$

gdje je O centar opisane kružnice, I centar upisane kružnice, H ortocenar, r poluprečnik upisane kružnice, R poluprečnik opisane kružnice, α, β i γ unutrašnji uglovi trougla ΔABC.
Iz (4), koristeći činjenicu $sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$, dobijamo

$$r = 4Rsin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2} = 4R\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1-cos\beta}{2}}\sqrt{\frac{1-cos\gamma}{2}},$$

odakle je

$$r^2 = 2R^2(1-cos\alpha)(1-cos\beta)(1-cos\gamma). \tag{5}$$

Iz (3) vidimo da vrijedi

$$2r^2-4R^2cos\alpha cos\beta cos\gamma \geq 0,$$

a odavde, zbog (5), imamo

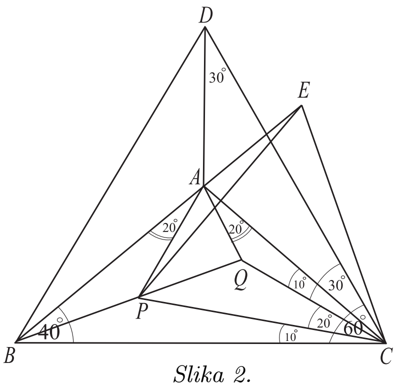
$$4R^2(1-cos\alpha)(1-cos\beta)(1-cos\gamma)-4R^2cos\alpha cos\beta cos\gamma \geq 0,$$

odnosno,

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \geq \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma,$$

što je i trebalo dokazati. Pri tome jednakost vrijedi samo u slučaju kada je $|IH|=0$, to jest kad je $I\equiv H$, a to znači da je u pitanju jednakostranični trougao. ■

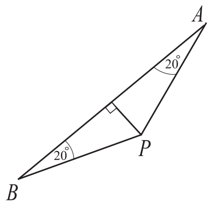
Zadatak 2.2. *U trouglu $\triangle ABC$ su uglovi $\beta = \gamma = 40°$, a tačke P i Q su u unutrašnjosti tog trougla, takve da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ = 20°$ i $\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 10°$. Dokazati da tačke B, P i Q leže na istoj pravoj.*



Slika 2.

Rješenje 1. Neka je tačka D u ravni trougla $\triangle ABC$ (Slika 2), takva da je trougao $\triangle DBC$ jednakostraničan i tačke D i A leže s iste strane stranice $\overline{BC}$. Tada je $\sphericalangle QCD = \sphericalangle CDA = 30°$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAQ = 20°$ i zato je četverougao $\square AQCD$ jednakokraki trapez, tj. $|QC| = |AD|$. Posmatrajmo sada trouglove $\triangle BDA$ i $\triangle BCQ$.
Imamo da je $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCQ = 30°$, $|DA| = |QC|$ i $|DB| = |CB|$, pa je $\triangle BDA \cong \triangle BCQ$ i iz te podudarnosti slijedi da je $|BA| = |BQ|$. Dakle trougao $\triangle BAQ$ je jednakokraki. Kako je $\sphericalangle BAC = \alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (40° + 40°) = 100°$, dobijamo da je $\sphericalangle BAQ = \alpha - \sphericalangle CAQ = 100° - 20° = 80° = \sphericalangle BQA$ i $\sphericalangle ABQ = 180° - 2 \cdot 80° = 20°$. $(*)$
Produžimo stranicu $\overline{BA}$, preko tačke A, do E tako da je $|BE| = |BC|$,
Lako vidimo da je $\sphericalangle CEB = \sphericalangle BCE = 70° = \sphericalangle APC$.
Dalje je $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCE - \sphericalangle BCA = 70° - 40° = 30° = \sphericalangle PCA$.
Tako je $\triangle ACP \sim \triangle ACE$ (jer je $\sphericalangle ACE = 30° = \sphericalangle PCA$ i $\sphericalangle AEC = \sphericalangle CEB = 70° = \sphericalangle APC$), a zbog zajedničke stranice ta dva trugla su i podudarna i iz te podudarnosti proizilazi da je $|AP| = |AE|$ i $|CP| = |CE|$. Osim toga je $\sphericalangle PCE = \sphericalangle BCE - \sphericalangle BCP = 70° - 10° = 60°$ i kako je $|CP| = |PE|$ trougao $\triangle PCE$ je jednakostraničan, to jest $|CP| = |PE|$.
Posmatrajmo trouglove $\triangle BPC$ i $\triangle BPE$. Ovdje je $\sphericalangle BCP = 10° = \sphericalangle BEP$ i $|BE| = |BC|$, $|PC| = |CE|$, što povlači da su ti trouglovi podudarni. Sada imamo $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PBE = \frac{1}{2} \cdot 40° = 20°$ i $\sphericalangle ABQ = 20°$ (v. $(*)$), pa slijedi da tačke B, P i Q leže na istoj pravoj. ■

Pogledajmo šta možemo dobiti nakon što smo riješili ovaj zadatak.



Slika 3.

Vidimo da je trougao $\triangle ABP$ jednakokraki sa uglovima na osnovici $\overline{AB}$, $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PAB = 20°$ (Slika 3). Tako je

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| = |BP| \cdot \cos 20° \Leftrightarrow |BP| = \frac{|AB|}{2\cos 20°} \tag{4}$$

a u jednakorakom trouglu $\triangle ABC$ je

$$\frac{1}{2}|BC| = |AB| \cdot \cos 40° \Leftrightarrow |BC| = 2 \cdot |AB| \cdot \cos 40°. \tag{5}$$

Sinusna teorema primijenjena na trougao $\triangle PBC$ daje

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{\sin 150°}{\sin 10°}. \tag{6}$$

Iz (4) i (5) dobijamo

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{2 \cdot |AB| \cdot \cos 40°}{\dfrac{|AB|}{2 \cdot \cos 20°}} = 4 \cdot \cos 20° \cos 40° \tag{7}$$

i konačno, uvažavajući (6) i (7), imamo

$$4 \cdot \cos 20° \cos 40° = \frac{\sin 150°}{\sin 10°} \Leftrightarrow 8 \cdot \cos 20° \cos 40° \sin 10° = 1 \Leftrightarrow \cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$$

(primijenili smo da je $\sin 10° = \cos 80°$ i $\sin 150° (= \sin 30°) = \frac{1}{2}$). Dobili smo lijep novi zadatak. ■

Rješenje 2. Dokažimo prvo da u trouglu $\triangle ABC$, sa dužinama stranica $|AC| = b$ i $|AB| = c$ i $\sphericalangle BAC = A$ i $\sphericalangle ABC = B$, vrijedi identitet

$$\operatorname{ctg} B = \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\sin A} - \operatorname{ctg} A.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} B &= \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\sin A} - \operatorname{ctg} A \quad \left(\text{zbog } \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} \text{ prema sinusnoj teoremi i } \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{sinz}\right)\\
&= \frac{\sin C}{\sin B} \cdot \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin C - \cos A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B}\\
&= \big(\text{zbog } A+B+C = 180^\circ \Longleftrightarrow C = 180^\circ - (A+B), \text{ tj. } \sin C = \sin[180^\circ - (A+B)] = \sin(A+B)\big)\\
&= \frac{\sin(A+B) - \cos A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B} = (\text{primjena adicione formule})\\
&= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B - \cos A \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} = \operatorname{ctg} B\,.
\end{aligned}$$

Primijenimo sada ovaj identitet za rješavanje našeg zadatka.

Tačke B, P i Q leže na istoj pravoj ako je $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABQ$. Neka je $|AC| = b = |AB|$. Sinusna teorema primijenjena na trougao $\triangle APC$ daje

$$\frac{|AP|}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ} \Longleftrightarrow |AP| = \frac{b \cdot \frac{1}{2}}{\cos 20^\circ} = \frac{b}{2 \cdot \cos 20^\circ}.$$

U trouglu $\triangle ABP$ je (prema dokazanom identitetu gore) vrijedi

$$\operatorname{ctg} \sphericalangle ABP = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \cdot \frac{1}{\sin 20^\circ} - \operatorname{ctg} 20^\circ = \frac{b}{\frac{b}{2 \cdot \cos 20^\circ}} \cdot \frac{1}{\sin 20^\circ} - \operatorname{ctg} 20^\circ = 2 \cdot \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} - \operatorname{ctg} 20^\circ = \operatorname{ctg} 20^\circ.$$

S druge strane, u trouglu $\triangle AQC$ je $\dfrac{\overline{AQ}}{\sin 10^\circ} \cdot \dfrac{b}{\sin 150^\circ} \Longleftrightarrow \overline{AQ} = \dfrac{b \cdot \sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot b \cdot \sin 10^\circ$, a u trouglu $\triangle ABQ$ (identitet gore) je

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} \sphericalangle ABQ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{1}{\sin 80^\circ} - \operatorname{ctg} 80^\circ = \frac{b}{2 \cdot b \cdot \sin 10^\circ} \cdot \frac{1}{\cos 10^\circ} - \operatorname{tg} 10^\circ = \frac{1}{2 \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} - \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&= \frac{1 - 2\sin^2 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = (\text{zbog } 1 - 2sin^2 x = \cos 2x \text{ i } 2 \sin x \cos x = \sin 2x) = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \operatorname{ctg} 20^\circ.
\end{aligned}$$

Dakle, $\sphericalangle ABQ = 20^\circ = \sphericalangle ABP$ i dokaz je završen.

Dalje, kao i u Rješenju 1, dobijamo jednakost

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8},$$

koju preporučujemo čitaocima da je dokažu i na neke druge načine.

Nadamo se da smo vas uvjerili u tačnost navoda iz uvoda.

Literatura

[1] Š. Arslanagić: *O udaljenosti nekih značajnih tačaka trougla*, Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] D. Bottema, i dr.: *Geometric Inequalities*, Wolters–Nordhoff Publishing, Gröningen, 1969.
[3] J. Carstesen, A. Muminagić: *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle, Vol.1 (1997), No.2, 87-88.
[4] J. Carstesen, A. Muminagić: *Matematiske juveler*, 1. oplag 2006, Frederiksburg.
[5] A. Muminagić, J. Carstesen: *Geometrijski dokazi trigonometrijskih jednakosti*, Evolventa (JAMTK) 6(1)(2023), 10-17.
[6] R. Ibrahimefendić: *Osvrt na jedan zadatak sa više načina rješavanja*, Evolventa (JAMTK) 4(2)(2021), 12-21.
[7] D. Palman: *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
[8] Pavković – Veljan: *Elementarna matemaika* 2., Školska knjiga, Zagreb, 1995.