

Iracionalne jednačbe i nejednačbe

Mehmed Nurkanović^a, Zehra Nurkanović^b

^a*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

^b*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se detaljnije razmatraju iracionalne jednačbe i nejednačbe, sa i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednačbi i nejednačbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Praksa pokazuje da su iracionalne jednačbe i nejednačbe možda i najkompliciranije od svih jednačbi i nejednačbi elementarne algebre. Naime, razlog za to je nepostojanje općeg postupka za njihovo rješavanje. Tako je moguće riješiti samo neke jednostavne tipove iracionalnih jednačbi i nejednačbi, dok je bilo kakav pokušaj njihove klasifikacije prema načinu rješavanja relativno vrlo složen. U ovom radu bit će ipak napravljena osnovna klasifikacija ovih jednačbi prema načinu rješavanja (s parnim ili neparnim korijenima) i date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednačbama i nejednačbama s i bez parametara. Treba istaknuti da se vrlo često ove jednačbe i nejednačbe pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola i obično veoma mali broj takmičara uspije da ih riješi. Poseban problem je ako se zahtijeva diskusija rješenja iracionalne jednačbe ili nejednačbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

2. Iracionalne jednačbe

Definicija 2.1. *Jednačba u kojoj se nepoznanica javlja i pod korijenom naziva se **iracionalnom** jednačbom.*

Korijen se u tom slučaju uzima samo kao aritmetički.

Osnovni metod za rješavanje iracionalnih jednačbi je metod eliminacije korijena. Taj metod se sastoji u tome da se jednačba algebarskim transformacijama (prije svega stepenovanjem) svede na jednačbu u kojoj se nepoznanice ne pojavljuju pod znakom korijena. Međutim, stepenovanje ne dovodi uvijek do ekvivalentne jednačbe, već do jednačbe koja je samo posljedica polazne.

Primjer 2.2. a) *Jednačba $\sqrt{x} = -1$ nema rješenja (u skupu realnih brojeva), ali se nakon kvadriranja dobije $x = 1$.*

b) $\sqrt{x} = x - 2 \implies x = x^2 - 4x + 4 \implies x^2 - 5x + 4 = 0 \implies (x = 1 \vee x = 4)$. *Provjerom ustanovimo da $x = 1$ nije rješenje polazne jednačbe, već samo $x = 4$.*

a) Iracionalne jednačbe s neparnim korijenima

Pri rješavanju ovakvih jednačbi (da bismo se "oslobodili" korijena) koristimo se sljedećim teoremom.

Teorem 2.3. *Jednačbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne za neparan broj n ($n \in \mathbb{N}$).

Kada se radi s iracionalnim jednačbama s trećim korijenima ili korijenima višeg reda, postupak racionalizacije (tj. oslobađanja od korijena) obično dovodi do vrlo složenih jednačbi. Zbog toga se one često rješavaju određenim smjenama ili nekim drugim 'trikovima'. Sljedeća dva primjera to dobro ilustriraju, ali i pokazuju da se procesom racionalizacije ne dobija uvijek niz ekvivalentnih jednačbi.

Primjer 2.4. *Riješiti jednačbu*

$$\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x} = 3. \quad (1)$$

Rješenje: Definiciono područje je skup $\mathbb{R}$. Koristeći identitet

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3, \quad (2)$$

nakon stepenovanja date jednačbe s tri, dobijamo

$$\begin{aligned} (1) &\iff 3-x + 3\sqrt[3]{(3-x)(6+x)} \underbrace{\left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x}\right)}_{\stackrel{(1)}{=} 3} + 6+x = 27 \\ &\iff \sqrt[3]{(3-x)(6+x)} = 2 \iff (3-x)(6+x) = 8 \\ &\iff x^2 + 3x - 10 = 0 \iff (x=2 \vee x=-5). \end{aligned}$$

Budući da smo u prvom koraku izvršili zamjenu zbira dva kubna korijena brojem 3 (prema(1)), obavezno treba izvršiti provjeru dobijenih vrijednosti za x , tj. provjeriti da li zadovoljavaju polaznu jednačbu. Ovdje je to zadovoljeno. $\square$

Primjer 2.5. *Riješiti jednačbu*

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}. \quad (3)$$

Rješenje: Analogno prethodnom primjeru, imamo

$$\begin{aligned} (3) &\iff x+1 + 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \underbrace{\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right)}_{\stackrel{(3)}{=} \sqrt[3]{x-1}} + 3x+1 = x-1 \\ &\implies 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -3x-3 \\ &\iff (x^2-1)(3x+1) = -(x+1)^3 \\ &\iff x^2(x+1) = 0 \iff (x=0 \vee x=-1). \end{aligned}$$

Neposrednim uvrštavanjem ovih vrijednosti u datu jednačbu zaključujemo da je samo $x = -1$ njeno rješenje. $\square$

Postavlja se pitanje: u čemu se razlikuju ove dvije jednačbe iz posljednja dva primjera, bolje rečeno u čemu je razlika u rješavanju tih jednačbi kada je korišten isti metod? Odgovor je zasnovan na činjenici da smo u prvom slučaju opći izraz predstavljen lijevom stranom jednačbe zamijenili brojem, a u drugom ponovo novim izrazom (uočite da je u drugom koraku ovog primjera stavljen znak ' $\implies$ ' a ne znak ekvivalencije ' $\iff$ ', te nismo dobili niz ekvivalentnih jednačbi).

b) Iracionalne jednačbe s parnim korijenima

U slučaju iracionalne jednačbe u kojoj se pojavljuju parni korijeni treba voditi računa o definicionom području te jednačbe, to jest o skupu dopustivih vrijednosti nepoznanice za koje su nenegativne sve potkorjene veličine parnih korijena. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.6. Za paran broj n jednačbe

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne u oblasti u kojoj je

$$f(x) \geq 0 \quad i \quad g(x) \geq 0,$$

ili

$$f(x) < 0 \quad i \quad g(x) < 0.$$

Specijalno,

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Uočimo da izraz $f(x)$ pod korijenom treba da je nenegativan (tj. $f(x) \geq 0$). Međutim, to je automatski zadovoljeno, jer je

$$f(x) = g^2(x) \geq 0.$$

Primjer 2.7. Riješiti jednačbu $x + 1 = \sqrt{x + 7}$.

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} x + 1 = \sqrt{x + 7} &\iff ((x + 1)^2 = x + 7 \wedge x + 1 \geq 0) \\ &\iff [(x = 2 \vee x = -3) \wedge x \geq -1] \iff x = 2. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.8. Riješiti jednačbu

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 4.$$

Rješenje: $DP : (2x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0) \iff x \geq 3$

Budući da je lijeva strana date nejednačbe nenegativna, ona se smije kvadrirati, naravno za one vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju DP . Dakle, data jednačba je, uz uvjet DP , ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} 2x + 1 + x - 3 + 2\sqrt{(2x + 1)(x - 3)} &= 16 \iff 2\sqrt{(2x + 1)(x - 3)} = 18 - 3x \\ &\iff \begin{cases} 18 - 3x \geq 0 \\ 4(2x + 1)(x - 3) = (18 - 3x)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Prema tome, uzimajući u obzir definiciono područje, data nejednačba je ekvivalentna sa

$$(x = 4 \vee x = 84 \wedge x \geq 3 \wedge x \leq 6) \iff x = 4.$$

□

Već smo ranije napomenuli da se iracionalne jednačbe s trećim, četvrtim itd. korijenima vrlo često rješavaju određenim smjenama. Sljedeći primjer nam pokazuje kako se u određenim situacijama dobro odabranim smjenama iracionalna jednačba može efikasno riješiti.

Primjer 2.9. Riješiti jednačbu

$$\sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4.$$

Rješenje: DP: $x \in \left[-\frac{35}{2}, \frac{47}{2}\right]$. Uvedimo smjene: $u = \sqrt[4]{47-2x}, v = \sqrt[4]{35+2x}$. Tako dobijamo sljedeći sistem jednačbi

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= 82, \\ u + v &= 4. \end{aligned}$$

Transformacijom lijeve strane prve jednačbe, te uvođenjem smjene $t = uv$, dobijamo

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = [(u+v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 \\ &= (16 - 2t)^2 - 2t^2, \end{aligned}$$

odnosno dobijamo kvadratnu jednačbu

$$t^2 - 32t + 87 = 0,$$

s rješenjima $t_1 = 3, t_2 = 29$.

Na taj način dobijamo sljedeća dva sistema jednačbi

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 3, \end{cases} \quad \text{ i } \quad \begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 29. \end{cases}$$

Rješenja prvog sistema su uređeni parovi $(1, 3)$ i $(3, 1)$, odakle slijedi $x_1 = -17, x_2 = 23$. Drugi sistem nema realnih rješenja. Uočimo da oba rješenja pripadaju definicionom području date jednačbe, tako da su to ujedno njena rješenja. $\square$

b1) Iracionalne jednačbe s parametrima

Istaknimo da su iracionalne jednačbe s parametrima posebno komplicirane. Ilustrirat ćemo to sljedećim primjerima.

Primjer 2.10. Diskutirati rješenje jednačbe

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x, \tag{4}$$

u ovisnosti o realnom parametru p .

Rješenje: DP: $x^2 - p \geq 0 \wedge x^2 - 1 \geq 0$, pa razlikujemo sljedeće slučajeve

$$i) p \leq 1 \implies DP : x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty),$$

$$ii) p > 1 \implies DP : x \in \langle -\infty, -\sqrt{p} \rangle \cup [\sqrt{p}, +\infty)$$

No, uočimo sljedeće: $L \geq 0 \implies D = x \geq 0$ (L označava lijevu stranu, a D desnu stranu date jednačbe), pa zbog toga i zbog DP u obzir dolaze sljedeće vrijednosti za x :

$$p \leq 1 \implies x \in [1, +\infty), \tag{5}$$

$$p > 1 \implies x \in [\sqrt{p}, +\infty). \tag{6}$$

Uz uvjete (5) ili (6) imamo:

$$\begin{aligned} (4) &\iff x^2 - p + 4x^2 - 4 + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = x^2 \\ &\iff 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = p + 4 - 4x^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Desna strana posljednje jednadžbe (7) mora biti nenegativna, to jest mora biti

$$x^2 \leq \frac{p+4}{4}. \quad (8)$$

Uz uvjet (8) imamo

$$\begin{aligned} (7) \iff 16(x^2 - p)(x^2 - 1) &= p^2 + 8p + 16 - 8(p+4)x^2 + 16x^4 \\ \iff 8(2-p)x^2 &= (p-4)^2 \iff x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)}, \end{aligned}$$

odakle neposredno slijedi da mora biti $p < 2$. Provjerimo sada uvjet (8):

$$x^2 \leq \frac{p+4}{4} \iff \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \leq \frac{p+4}{4} \iff 3p^2 - 4p \leq 0 \iff p \in \left[0, \frac{4}{3}\right].$$

Zbog toga preostaje provjeriti još samo uvjete (5) i (6) za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq p \leq 1 &\implies \left(x^2 \geq 1 \iff \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geq 1 \iff p^2 \geq 0\right), \\ p \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right] &\implies \left(x^2 \geq p \iff \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geq p \iff (3p-4)^2 \geq 0\right), \end{aligned}$$

što je zadovoljeno u oba slučaja.

Rezultat: $x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$ za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$; za ostale vrijednosti parametra p jednadžba nema rješenja. $\square$

Primjer 2.11. *Diskutirati rješenje jednadžbe*

$$\sqrt{x-2} = x + a$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Rješenje: Jasno je da treba biti $x \geq 2$ i $x \geq -a$. Razlikujemo dva slučaja:

$$-a < 2, \text{ tj. } a > -2: \quad x \geq 2 \quad (9)$$

i

$$-a \geq 2, \text{ tj. } a \leq -2: \quad x \geq -a. \quad (10)$$

Uz te uvjete data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} x-2 &= x^2 + 2ax + a^2 \iff x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0 \\ \iff x_{\pm} &= \frac{1}{2}(1-2a \pm \sqrt{-4a-7}). \end{aligned}$$

Odavde slijedi da data jednadžba nema rješenja kada je $-4a-7 < 0$, to jest kada je $a > -\frac{7}{4}$. U slučaju kada je $a = -\frac{7}{4}$, polazna jednadžba ima rješenje $x = \frac{9}{4}$, a za $a < -\frac{7}{4}$, imamo da je $x_{\pm} \in \mathbb{R}$. Treba vidjeti samo kada te vrijednosti zadovoljavaju uvjete (9) i (10).

i) Za $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$ imamo

$$x_+ \geq 2 \iff \sqrt{-4a-7} \geq 3+2a,$$

što je za sve promatrane vrijednosti od a zadovoljeno (naime, $3+2a < 0$, za sve $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$), pa je x_+ rješenje date jednačbe. Također,

$$x_- \geq 2 \iff -3-2a \geq \sqrt{-4a-7} \iff (a+2)^2 \geq 0$$

$$(\text{jer je } -3a-2 > 0 \text{ za } a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle),$$

što je uvijek zadovoljeno, pa je i x_- rješenje.

ii) Za $a \in \langle -\infty, -2] \text{ imamo}$

$$x_+ \geq -a \iff 1 + \sqrt{-4a-7} \geq 0,$$

što je očito uvijek zadovoljeno, pa je x_+ rješenje date jednačbe. Također,

$$x_- \geq -a \iff 1 \geq \sqrt{-4a-7} \iff a \geq -2.$$

Pošto je $a \leq -2$, to znači da je x_- rješenje samo za $a = -2$.

Rezime:

1° Za $a \in \langle -\infty, -2 \rangle$ jednačba ima jedinstveno rješenje $x_+ = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-7}}{2}$.

2° Za $a \in \left[-2, -\frac{7}{4}\right]$ jednačba ima dva rješenja $x_{\pm} = \frac{1}{2} (1 - 2a \pm \sqrt{-4a-7})$.

3° Za $a = -\frac{7}{4}$ jednačba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{9}{4}$.

4° Za $a \in \left\langle -\frac{7}{4}, +\infty \right\rangle$ jednačba nema rješenja.

□

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće jednačbe:

1. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$

2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$

3. $\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-37} = 6.$

4. $\sqrt[3]{4x^2+10x+4} + \sqrt[3]{2x^2-5x-3} = \sqrt[3]{2x+1}.$

5. $x - \sqrt[3]{x^2-x-1} = 1.$

6. $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}.$

7. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}.$

8. $x + \sqrt{1 - 15x} = 3.$

9. a) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 5,$

b) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = 7.$

10. $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x+5} = \sqrt{x-7}.$

11. $\sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{2(x^2+4x+6)}.$

12. $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 34.$

13. $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$

14. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

15. $\sqrt{3x^2+5x-8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1.$

16. a) $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5.$

b) $\sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8.$

Diskutirati rješenja sljedećih jednačbi u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$:

17. $\sqrt{2-x} = -\frac{x}{2} + a.$

18. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = (a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

19. $\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1-\sqrt{x}} = a.$

20. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x.$

3. Iracionalne nejednadžbe

Definicija 3.1. *Nejednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi i pod korijenom zove se **iracionalna** nejednadžba.*

Problematika rješavanja iracionalnih nejednadžbi slična je problematici rješavanja iracionalnih jednačbi. Zbog toga su i metodi za njihovo rješavanje dosta slični, ali ima i bitnih razlika o kojima itekako valja voditi računa. Tu se prije svega misli na poteškoće koje se javljaju kao rezultat množenja nejednadžbe negativnim brojem, što prouzrokuje promjenu smisla nejednakosti. Naročito je opasno izvoditi neoprezno i nekritički množenje nejednadžbe brojnim izrazom u kojem figurira nepoznanica. Zato se preporučuje da se to nikad i ne radi, osim u slučaju kada za brojni izraz znamo da je pozitivan ili negativan za sve dozvoljene vrijednosti nepoznanice. S druge strane, posebnu pažnju moramo posvetiti i kvadriranju date nejednadžbe u cilju oslobađanja od kvadratnog korijena. To se smije raditi samo u slučaju kada su i lijeva i desna strana nejednadžbe nenegativne. Da je kvadriranje nedozvoljeno u slučaju kad su obje strane nejednadžbe negativne pokazuje sljedeći primjer: ako tačnu nejednakost $-4 < -2$ kvadiramo, dobit ćemo nejednakost $16 < 4$, koja je netačna. Slično će se dogoditi i u slučaju $-3 < 2$. S druge strane, nakon kvadriranja nejednakosti $-1 < 2$, dobit ćemo tačnu nejednakost. Dakle, ako je barem jedna strana nejednakosti negativna, nismo sigurni da li ćemo nakon kvadriranja dobiti tačnu nejednakost. Prema tome, treba strogo voditi računa o sljedećem pravilu:

$$(L < D \wedge L \geq 0 \wedge D \geq 0) \iff L^2 < D^2. \quad (11)$$

Pri tome se nejednakost $<$ može zamijeniti bilo kojom od nejednakosti: $>$, $\geq$ ili $\leq$.

Ako se ne držimo ovog pravila, mogu nastupiti različite problematične situacije. Pokazuje nam to sljedeći jednostavni primjer.

Primjer 3.2. Riješiti sljedeće nejednadžbe:

$$a) \sqrt{x} < 2; \quad b) \sqrt{x} < -2; \quad c) \sqrt{x} > 2; \quad d) \sqrt{x} > -2.$$

Rješenje: Uočimo da je definiciono područje svake od nejednadžbi $x \geq 0$.

a) Obje strane ove nejednadžbe su nenegativne, pa se može primijeniti gornje pravilo kvadriranja nejednadžbe, nakon čega dobijemo $x < 4$. Uzimajući u obzir definiciono područje, vidimo da mora biti $x \in [0, 4)$ i to je traženi skup rješenja nejednadžbe.

b) Desna strana nejednadžbe je negativan broj, pa se ne smije kvadrirati. No, budući da je lijeva strana nejednadžbe nenegativna, jasno je da taj broj ne može biti manji od negativnog broja na desnoj strani. Dakle, u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja.

c) Kao i u slučaju a) smijemo kvadrirati nejednadžbu, nakon čega dobijemo $x > 4$. Upoređujući to s DP , dobijamo skup rješenja nejednadžbe $\langle 4, +\infty \rangle$.

d) Ni ovdje ne smijemo kvadrirati nejednadžbu, jer je desna strana negativna. Kako je, međutim, lijeva strana nenegativna, ona je uvijek veća od desne strane. Zato je skup rješenja skup svih vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju DP , tj. $x \in [0, +\infty)$.

□

Vrlo je bitno promatrati sljedeća četiri tipa iracionalnih nejednadžbi:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x), \quad \sqrt[n+1]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[n+1]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (12)$$

Posljednja dva tipa su jednostavna, dok su prva dva kompliciranija i zato obratimo posebnu pažnju na njih.

U prvoj nejednadžbi je $DP : f(x) \geq 0$ i lijeva strana je nenegativna. Zbog navedenog pravila kvadriranja nejednakosti (11) i stroge nejednakosti desna strana nejednadžbe mora biti pozitivna, tj. $g(x) > 0$. Uz ta dva uvjeta, nakon stepenovanja sa $2n$, dobijamo $f(x) < [g(x)]^{2n}$. Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

Primjedba 3.3. Naravno, u svim slučajevima treba uključiti i definiciona područja funkcija f i g , što u daljem tekstu nećemo posebno isticati, ali će se podrazumijevati.

Teorem 3.4. Nejednadžba

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je sistemu nejednadžbi i to:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < [g(x)]^{2n} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Primjer 3.5. Riješiti nejednadžbu $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3$.

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3 &\iff \left[0 \leq x^2 - 5x + 4 < (x - 3)^2 \wedge x - 3 > 0 \right] \\ &\iff \{x \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup [4, +\infty) \wedge x < 5 \wedge x > 3\} \\ &\iff x \in [4, 5). \end{aligned}$$

□

I u drugoj nejednadžbi u (12) je $DP : f(x) \geq 0$ i lijeva strana je nenegativna. Ovdje su moguća dva slučaja: da je desna strana negativna ili da je nenegativna. Ako je $g(x) < 0$, tada je rješenje svako x iz DP . Dakle, u ovom slučaju skup rješenja R_1 nejednadžbe ima oblik

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0 \wedge g(x) < 0\}.$$

Ako je $g(x) \geq 0$, tada smijemo nejednadžbu spepenovati sa $2n$, jer su joj obje strane nenegativne, pa dobijamo $f(x) > [g(x)]^{2n}$. Uočimo da je uvjet DP u ovom slučaju automatski ispunjen, budući da je $f(x) > [g(x)]^{2n} \geq 0$, za sve realne vrijednosti nepoznanice x . Prema tome, u ovom slučaju skup rješenja R_2 nejednadžbe je predstavljen skupom

$$R_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > [g(x)]^{2n} \wedge g(x) \geq 0 \right\}.$$

Na taj način dobijamo skup rješenja R nejednadžbe kao $R = R_1 \cup R_2$, a što se može iskazati i sljedećim teoremom.

Teorem 3.6. *Za nejednadžbu oblika*

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

vrijedi

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \iff \left(\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) > [g(x)]^{2n} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \right).$$

Primjer 3.7. *Riješiti nejednadžbu $\sqrt{1-4x^2} \geq 1-3x$.*

Rješenje: Koristeći prethodni teorem imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x^2} \geq 1-3x &\iff \left(\begin{cases} 1-4x^2 \geq 0 \\ 1-3x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-4x^2 \geq (1-3x)^2 \\ 1-3x \geq 0 \end{cases} \right) \\ &\iff \left(\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{6}{13} \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \right) \\ &\iff \left(\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \vee 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \right) \iff x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

□

Primjer 3.8. *Riješiti nejednadžbu*

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$$

Rješenje: DP: $\left(x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \wedge x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0 \right) \iff x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$.

Za ove vrijednosti nepoznanice x , desna strana nejednadžbe je nenegativna, pa rješenje nejednadžbe postoji ako je lijeva strana nejednadžbe pozitivna, tj. ako je

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \sqrt{1 - \frac{1}{x}},$$

što je zadovoljeno za $x > 1$. Uz taj uvjet datu nejednadžbu smijemo kvadrirati pa imamo

$$x - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} > \left(\frac{x-1}{x} \right)^2,$$

odnosno

$$x - \frac{2}{x} + 1 - 2\frac{x-1}{x}\sqrt{x+1} > 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Sada, množenjem sa x^2 i dijeljenjem sa $x - 1$ (što je dozvoljeno za $x > 1$) dobijamo

$$(x^2 + x + 1 > 2x\sqrt{x+1} \wedge x > 1) \iff \left[(x^2 + x + 1)^2 > 4x^2(x+1) \wedge x > 1 \right],$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} & \left[x^4 + 2x^2(x+1) + (x+1)^2 > 4x^2(x+1) \wedge x > 1 \right] \\ \iff & \left[x^4 - 2x^2(x+1) + (x+1)^2 > 0 \wedge x > 1 \right] \\ \iff & \left[(x^2 - x - 1)^2 > 0 \wedge x > 1 \right] \\ \iff & \left(x > 1 \wedge x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Za posljednja dva tipa iracionalnih nejednadžbi iz (12), tj. za nejednadžbe s neparnim korijenima vrijede sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.9. *Nejednadžba oblika*

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x) < [g(x)]^{2n+1}.$$

Nejednadžba oblika

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x) > [g(x)]^{2n+1}.$$

I ovdje moramo istaknuti da su posebno komplicirane **iracionalne nejednadžbe s parametrima**. Ilustriraćemo to sljedećim primjerom.

Primjer 3.10. *Diskutirati rješenje nejednadžbe*

$$2\sqrt{x+a} > x+1$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Rješenje: Prema Teoremu 3.6 imamo

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+a} > x+1 & \iff \left(\left\{ \begin{array}{l} x+a \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} 4(x+a) > (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \end{array} \right\} \right) \\ & \iff \left(\left\{ \begin{array}{l} x \geq -a \\ x < -1 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geq -1 \end{array} \right\} \right). \end{aligned}$$

Primijetimo da u prvoj nejednadžbi drugog sistema vrijedi

$$x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \iff x \in \langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \rangle \quad \text{za } a > 0,$$

dok za $a \leq 0$ slijedi $x \in \emptyset$. No, također, za $a \leq 0$, ni prvi sistem nema rješenja (jer je $-1 < 0 \leq -a$). To znači da data nejednadžba nema rješenja za $a \leq 0$. Zbog toga preostaje da promatramo oba sistema u slučaju $a > 0$. Kako broj $-a$ može biti ili s lijeve ili s desne strane broja -1 , imamo sljedeće slučajeve.

i) Za $0 < a \leq 1$, sistem nejednadžbi $x \geq -a \wedge x < -1$ nema rješenja, dok je

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geq -1 \end{array} \right\} \iff x \in \langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \rangle,$$

što i predstavlja skup rješenja R nejednadžbe za ove vrijednosti parametra a .

ii) Za $a > 1$ imamo

$$\begin{aligned} (x \geq -a \wedge x < -1) &\iff x \in [-a, -1], \\ &\vee \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geq -1 \end{array} \right\} &\iff x \in [-1, 1 + 2\sqrt{a}]. \end{aligned}$$

Dakle, skup rješenja nejednadžbe za $a > 1$ je:

$$R = [-a, -1] \cup [-1, 1 + 2\sqrt{a}] = [-a, 1 + 2\sqrt{a}].$$

Rezime:

- 1° Za $0 < a \leq 1$ rješenje nejednadžbe je $\langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \rangle$.
- 2° Za $a > 1$ rješenje nejednadžbe je $[-a, 1 + 2\sqrt{a}]$.
- 3° Za $a \leq 0$ data nejednadžba nema rješenja.

□

Primjer 3.11. *Diskutirati rješenja nejednadžbe*

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} < \sqrt{2a+x}. \quad (13)$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Rješenje: DP: $a+x \geq 0, a+x \neq 0, 2a+x \geq 0$, odnosno $x > -a, x \geq -2a$.

Kako

$$\begin{aligned} a &\geq 0 \implies -a \geq -2a, \\ a &< 0 \implies -a < -2a, \end{aligned}$$

to je

$$\text{DP: } \left\{ \begin{array}{ll} x \geq -2a & \text{za } a < 0, \\ x \geq -a & \text{za } a \geq 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Uzimajući u obzir da je $a+x > 0$ i

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} -a & \text{za } a < 0, \\ 0 & \text{za } a = 0, \\ a & \text{za } a > 0, \end{cases}$$

imat ćemo da je

$$\sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \frac{|a|}{\sqrt{a+x}} = \begin{cases} -\frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za } a < 0, \\ 0 & \text{za } a = 0, \\ \frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za } a > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Dakle, imamo tri kvalitativno različita slučaja.

1) Za $a < 0$, koristeći (15), nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x} + \frac{a}{\sqrt{a+x}} < \sqrt{2a+x}, \quad (16)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} (16) & \iff a+x+a < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x} \\ & \iff 2a+x < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}. \end{aligned}$$

Sada, zbog $2a+x \geq 0$, smijemo kvadrirati obje strane posljednje nejednakosti, pa je

$$\begin{aligned} (16) & \iff (2a+x)^2 < (a+x)(2a+x) \iff (2a+x)^2 - (a+x)(2a+x) < 0 \\ & \iff (2a+x)(2a+x-a-x) < 0 \iff (2a+x)a < 0 \stackrel{a < 0}{\iff} 2a+x > 0 \\ & \iff x > -2a. \end{aligned}$$

Imajući na umu (14) zaključujemo da za $a < 0$ nejednadžba (13) ima rješenje $x > -2a$, odnosno

$$R_1 = \langle -2a, +\infty \rangle \quad \text{za } a < 0.$$

2) Za $a = 0$ vrijedi

$$(13) \iff \sqrt{x} < \sqrt{x} \iff 1 < 1,$$

što nije tačno. Dakle, $R_2 = \emptyset$ za $a = 0$.

3) Za $a > 0$ nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x} - \frac{a}{\sqrt{a+x}} < \sqrt{2a+x}.$$

odnosno

$$\begin{aligned} (16) & \iff a+x-a < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x} \\ & \iff x < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Posljednja nejednakost je sigurno tačna za $x \leq 0$, tj. za

$$x \in R_3 = \langle -\infty, 0] \cap DP = \langle -\infty, 0] \cap \langle -a, +\infty \rangle = \langle -a, 0] .$$

S druge strane, za $x > 0$, kvadriranjem (17) dobijamo da je

$$\begin{aligned} (16) & \iff x^2 < (a+x)(2a+x) \\ & \iff 0 < a(2a+3x), \end{aligned}$$

što je uvijek tačno za $a > 0$ i $x > 0$, tj. $x \in R_4 = \langle 0, +\infty \rangle$. Dakle, u slučaju $a > 0$ rješenje je

$$R_5 = R_3 \cup R_4 = \langle -a, 0] \cup \langle 0, +\infty \rangle = \langle -a, +\infty \rangle .$$

Rezime:

1° Za $a < 0$ rješenje date nejednadžbe je $\langle -2a, +\infty \rangle$.

2° Za $a = 0$ data nejednadžba nema rješenja.

3° Za $a > 0$ rješenje date nejednadžbe je $x \in \langle -a, +\infty \rangle$.

□

