

# Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama

Mehmed Nurkanović<sup>a</sup>, Mirsad Trumić<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*

<sup>b</sup>*JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

**Sažetak:** U radu se, u nekoliko specijalno odabranih primjera, uz komparativan pristup, ispituje konvergencija nizova koji su zadani rekurentnim formulama s konstantnim koeficijentima. Koriste se metodi standardne teorije nizova iz matematičke analize koja se sluša na prvoj godini studija i metodi diferentnih jednačbi.

## 1. Uvod

Poznata je činjenica iz metodike nastave matematike da je određeni zadatak dobro riješiti na više načina, koristeći različite metode, o čemu se više govori u [3]. U nekim slučajevima jedan metod ima preimućstvo nad drugim, što ćemo pokazati u ovom radu. Kada treba ispitati konvergenciju niza koristeći metode matematičke analize, onda to uglavnom radimo tako što pokažemo da je niz monoton i ograničen. U slučaju kada je niz zadan nekom rekurentnom formulom vrlo često se pokazuje samo konvergencija niza, a samu graničnu vrijednost niza je teško ili nemoguće izračunati bez korištenja metoda diferentnih jednačbi. I kod jednog i kod drugog postupka (monotonost i ograničenost) javljaju se kognitivne prepreke, jer nailazimo na različite problemske situacije. Svaki novi zadatak podrazumijeva neke druge (nove) tehnike rješavanja. Međutim, ako problem rješavamo primjenom metoda diferentnih jednačbi, onda je postupak ponekad značajno jednostavniji (naravno, samo u situaciji kad se diferentna jednačba može riješiti, [4]). U ovom slučaju je potrebno naći opći član niza te odrediti njegov limes. Kako ćemo se, dakle, u radu baviti nizom koji je zadan rekurentnom formulom, potrebno ga je definirati.

**Definicija 1.1.** *Za niz  $x_n$  kažemo da je zadan rekurentno ako je zadano nekoliko prvih članova niza i pravilo po kojem se  $x_n$  računa pomoću nekoliko prethodnih članova niza.*

Rekurentne formule su ekvivalentne s diferentnim jednačbama, stoga navodimo definiciju i teorem koji slijede, a neophodni su nam u narednoj sekciji [1, 5, 6].

**Definicija 1.2.** *Neka su  $a$  i  $b$  proizvoljni realni brojevi. Tada se jednačba oblika*

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

*naziva linearnom diferentnom jednačbom prvog reda s konstantnim koeficijentima.*

---

*Ciljna skupina:* srednja škola

*Ključne riječi:* niz, rekurentna formula, monotonost, ograničenost, metod diferentnih jednačbi

*Kategorizacija:* Stručno-metodički rad

*Rad preuzet:* maj 2021.

**Teorem 1.3.** Linearna diferentna jednačina prvog reda s konstantnim koeficijentima (1), u slučaju  $a \neq 1$ , ima rješenje:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

## 2. Primjeri ispitivanja konvergencije nizova

**Primjer 2.1.** Data su dva niza prirodnih brojeva:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 2p_n + 3q_n, & p_1 &= 2, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n, & q_1 &= 1. \end{aligned}$$

Dokazati da je niz  $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  konvergentan.

**Rješenje:** Prvi način

Riješimo ovaj zadatak prvo metodima matematičke analize (teorija nizova). Uočimo da vrijedi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n(2p_n + 3q_n) - p_n(p_n + 2q_n)}{q_n(p_n + 2q_n)} = \frac{3q_n^2 - p_n^2}{q_n(p_n + 2q_n)} < 0$$

ako i samo ako je  $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$  za sve  $n = 1, 2, \dots$ , a što se dokazuje matematičkom indukcijom. Naime, očito je  $\frac{p_1}{q_1} = 2 > \sqrt{3}$ . Iz pretpostavke da vrijedi  $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$  za neki prirodni broj  $n > 1$ , slijedi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2p_n + 3q_n}{p_n + 2q_n} = 1 + \frac{p_n + q_n}{p_n + 2q_n} = 1 + \frac{\frac{p_n}{q_n} + 1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} = 2 - \frac{1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} > 2 - \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = \sqrt{3},$$

to jest, po principu potpune matematičke indukcije je  $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$  za svaki prirodni broj  $n$ . To znači da je niz  $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  strogo monotono opadajući i ograničen je odozdo s  $\sqrt{3}$ . Zbog toga je taj niz i konvergentan.

Drugi način

Rekurentne formule za nizove  $p_n$  i  $q_n$  mogu se promatrati kao sistem diferentnih jednačbi prvog reda koji se u matricnom obliku može napisati kao

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

pri čemu je

$$X_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opće rješenje sistema je  $X_n = A^n X_0$ , a matricu  $A^n$  izračunat ćemo koristeći Hamilton-Cayleyev teorem. Iz karakterističnog polinoma matrice  $A$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

dobiju se svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3} \quad i \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{3},$$

pa je

$$A^n = C_1 \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + C_2 \left(2 - \sqrt{3}\right)^n, \quad (3)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstantne matrice. Njih ćemo odrediti koristeći početne uvjete. Za  $n = 0$  imamo

$$A^0 = C_1 + C_2 \implies I = C_1 + C_2,$$

a za  $n = 1$  je

$$A = C_1 \left(2 + \sqrt{3}\right) + C_2 \left(2 - \sqrt{3}\right),$$

odakle se dobije

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zamjenom u (3), imamo

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right] & \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right] \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \left[ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right] & \frac{1}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right] \end{bmatrix}$$

Kako je  $X_n = A^n X_0$ , konačno dobijamo

$$X_n = \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right] \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right] + \frac{1}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right] \end{bmatrix},$$

odnosno

$$p_n = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (2 + \sqrt{3})^n + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (2 - \sqrt{3})^n,$$

$$q_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) (2 + \sqrt{3})^n - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) (2 - \sqrt{3})^n.$$

Sada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

□

**Primjedba 2.2.** Na ovaj drugi način dobili smo preciznu graničnu vrijednost niza, što je prednost u odnosu na prethodni, prvi način, gdje je ustanovljena samo konvergencija niza.

**Primjer 2.3.** Neka je dat niz realnih brojeva:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \dots).$$

Ispitati konvergenciju datog niza i u slučaju konvergencije izračunati  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Rješenje:** *Prvi način*

Riješimo i ovaj zadatak prvo metodima matematičke analize koja se sluša na prvoj godini studija matematike. Očito je da ovaj iterativni postupak predstavlja dobro poznati metod polovljenja intervala. Primijetimo da je za  $a = b$  niz konstantan, to jest vrijedi  $x_n = a = b$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), pa je  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = b$ . Zato pretpostavimo da je  $a < b$  (analogno bi se dokazivalo i u slučaju  $a > b$ ). Naime, ako uvedemo oznake

$$I_n = [x_n, x_{n+1}], \quad n = 1, 2, \dots,$$

onda će nam  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  predstavljati niz umetnutih (gnijezdo) zatvorenih intervala jer je

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad d(I_n) = \frac{d(I_1)}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

i  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(I_n) = 0$ . Prema odgovarajućem teoremu (teorem o gnijezdu) postoji tačno jedan realan broj  $c$  takav da je  $c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  i pri tome su nizovi  $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$  i  $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$  monotoni (prvi monotono rastući, a drugi monotono opadajući) i, budući da svi članovi tih nizova leže u  $[a, b]$ , oni su i ograničeni, pa zbog toga i konvergentni i vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = c$ . Preostaje samo odrediti broj  $c$ . To se može postići induktivnim putem na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_1 &= a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = x_{2 \cdot 2 - 1} = \frac{a+b}{2}, \quad x_4 = x_{2 \cdot 2} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{a + (1+2)b}{2^{2 \cdot 2 - 2}}, \\ x_5 &= x_{2 \cdot 3 - 1} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a+(1+2)b}{2^2}}{2} = \frac{(1+2)a + (1+2^2)b}{2^{2 \cdot 3 - 3}}, \\ x_6 &= x_{2 \cdot 3} = \frac{\frac{a+(1+2)b}{2^2} + \frac{(1+2)a + (1+2^2)b}{2^3}}{2} = \frac{(1+2^2)a + (1+2+2^3)b}{2^{2 \cdot 3 - 2}}, \\ x_7 &= x_{2 \cdot 4 - 1} = \frac{\frac{(1+2)a + (1+2^2)b}{2^3} + \frac{(1+2^2)a + (1+2+2^3)b}{2^4}}{2} = \frac{(1+2+2^3)a + (1+2^2+2^4)b}{2^{2 \cdot 4 - 3}}, \\ x_8 &= x_{2 \cdot 4} = \frac{\frac{(1+2^2)a + (1+2+2^3)b}{2^4} + \frac{(1+2+2^3)a + (1+2^2+2^4)b}{2^5}}{2} = \frac{(1+2^2+2^4)a + (1+2+2^3+2^5)b}{2^{2 \cdot 4 - 2}}, \end{aligned}$$

iz čega se mogu naslutiti opće formule

$$\begin{aligned} x_{2k-1} &= \frac{(1+2+2^3+\dots+2^{2k-5})a + (1+2^2+\dots+2^{2k-4})b}{2^{2k-3}} = \frac{\left(1+2 \cdot \frac{(2^2)^{k-2}-1}{2^2-1}\right)a + \frac{(2^2)^{k-1}-1}{2^2-1}b}{2^{2k-3}}, \\ x_{2k} &= \frac{(1+2^2+\dots+2^{2k-4})a + (1+2+2^3+\dots+2^{2k-3})b}{2^{2k-2}} = \frac{\frac{(2^2)^{k-1}-1}{2^2-1}a + \left(1+2 \cdot \frac{(2^2)^{k-1}-1}{2^2-1}\right)b}{2^{2k-2}}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_{2k-1} &= \frac{a+2b}{3} + \frac{a-b}{3 \cdot 2^{2k-3}}, \\ x_{2k} &= \frac{a+2b}{3} - \frac{a-b}{3 \cdot 2^{2k-2}}, \end{aligned}$$

za  $k \in \{1, 2, \dots\}$ .

Primjenom potpune matematičke indukcije dokazuje se potpuna ispravnost prethodnih općenitih formula za članove nizova s parnim i s neparnim indeksima. Sada je očito da vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \frac{a+2b}{3}.$$

*Drugi način*

Jednakost  $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$  možemo napisati u obliku:  $2x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$ , što predstavlja homogenu diferentnu jednačbu drugog reda. Njena karakteristična jednačba je

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čija su rješenja  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ . Opće rješenje spomenute diferentne jednačbe je oblika:

$$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Odredimo konstante  $C_1$  i  $C_2$ , koristeći početne uvjete  $x_1$  i  $x_2$ . Za  $n = 1$  imamo

$$x_1 = C_1 + C_2 \left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow a = C_1 - \frac{C_2}{2},$$

a za  $n = 2$  je

$$x_2 = C_1 + C_2 \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \Rightarrow b = C_1 + \frac{C_2}{4}.$$

Rješavanjem posljednjeg sistema dobijemo  $C_1 = \frac{a+2b}{3}$  i  $C_2 = \frac{4(b-a)}{3}$ , pa je rješenje diferentne jednačbe:

$$x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Sada možemo naći limes niza  $x_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right) = \frac{a+2b}{3}$$

□

**Primjedba 2.4.** Prethodni primjer u najboljoj mjeri pokazuje da je ponekad metod diferentnih jednačbi znatno jednostavniji od metoda standardne matematičke analize.

**Primjer 2.5.** Dokazati da je niz zadat rekurentnom relacijom:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{3+a_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverentan.

**Rješenje:** *Prvi način*

Primijetimo prvo da će niz biti strogo monotono rastući (jer je  $a_1 = 0$ ) ako i samo ako vrijedi

$$2(a_{n+1} - a_n) = 3 - a_n > 0 \iff a_n < 3 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Matematičkom indukcijom dokažimo da je zaista  $a_n < 3$  za  $n = 1, 2, \dots$ . Naime, za  $n = 1$  nejednakost je očito tačna. Koristeći pretpostavku da vrijedi  $a_n < 3$  za neko  $n > 1$ , imamo

$$a_{n+1} = \frac{3 + a_n}{2} < \frac{3 + 3}{2} = 3,$$

pa je na osnovu principa potpune matematičke indukcije tačna nejednakost  $a_n < 3$  za sve  $n = 1, 2, \dots$ . To ujedno znači da je niz i ograničen odozgo s 3. Zbog toga je on i konvergentan.

*Drugi način*

Jednadžba  $a_{n+1} = \frac{3 + a_n}{2}$ , možemo napisati i kao

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{2},$$

što predstavlja nehomogenu linearnu diferentnu jednačinu prvog reda s konstantnim koeficijentima, čije je opće rješenje dato u obliku (prema Teoremu 1.3)

$$a_n = \left( \alpha - \frac{b}{1-a} \right) a^n + \frac{b}{1-a},$$

gdje je  $\alpha = a_0 = 0$  početni uvjet. Zbog toga je

$$a_n = -3 \left( \frac{1}{2} \right)^n + 3,$$

iz čega neposredno slijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -3 \left( \frac{1}{2} \right)^n + 3 \right) = 3.$$

□

**Primjedba 2.6.** I u ovom slučaju, metodom matematičke analize (prvi način) ustanovili smo samo konvergenciju datog niza, a metodom diferentnih jednačina (drugi način) izračunali smo tačnu graničnu vrijednost niza.

**Primjer 2.7.** Neka je dat niz formulom

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{4}$$

pri čemu su početni uvjeti  $a_1 = a_2 = 1$  (dobro poznati Fibonaccijev niz, [1, 2, 5, 6]). Naći

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ,  
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

**Rješenje:** Jednakost (4) možemo napisati u obliku diferentne jednačine

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad n \geq 3. \tag{5}$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina jednačine (5) je

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čija su rješenja  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  i  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Zato opće rješenje date jednačine (5) ima oblik

$$a_n = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Konstante  $C_1$  i  $C_2$  odredit ćemo koristeći početne uvjete

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_2 = 1, \\ n = 2 &\implies a_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 C_1 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 C_2 = 1, \end{aligned}$$

odakle se dobija da je  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  i  $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ , pa je rješenje

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

Pošto smo našli opći član niza (4), sada možemo izračunati tražene limese

a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left[ 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left[ \left(1 - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{(1 + \sqrt{5})^n}\right)^{-\frac{(1 + \sqrt{5})^n}{(1 - \sqrt{5})^n}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{(1 + \sqrt{5})^n} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{n(1 + \sqrt{5})^n}} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) e^0 \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

b) (v. sličan postupak u [2, 5, 6])

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

□

**Primjedba 2.8.** Vidimo da smo u oba slučaja kao rezultat izračunavanja limesa dobili konstantu  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  poznatu kao **zlatni presjek**.

**Primjedba 2.9.** Iz teorije nizova u matematičkoj analizi poznato je da, ukoliko postoji limes b), postoji i limes a) i oni su međusobno jednaki. Naime, koristeći Stolzov teorem, imamo

$$\begin{aligned} \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(\ln a_n)}{\Delta(n)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

U prethodnom primjeru smo to samo dodatno potvrdili.

**Primjer 2.10.** Ispitati konvergenciju niza zadanog rekurentnom formulom

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

uzimajući da je  $0 \leq x_0 < 2$ .

**Rješenje:** *Prvi način*

Upotrijebimo prvo metode iz teorije nizova. Očito je da vrijedi

$$x_1 = \sqrt{2 + x_0} < \sqrt{2 + 2} = 2,$$

$$x_2 = \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2 + 2} = 2,$$

$$\vdots$$

i ako pretpostavimo da je za neki prirodni broj  $n > 1$  tačna nejednakost  $x_n < 2$ , tada je

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Dakle, primjenom principa potpune matematičke indukcije zaključujemo da je niz  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  ograničen odozgo s 2. S druge strane, iz (6) slijedi

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n > x_n^2,$$

ako je

$$x_n^2 - x_n - 2 < 0,$$

a što je sigurno zadovoljeno za  $0 \leq x_n < 2$ . Dakle,  $x_{n+1} > x_n$  za sve  $n = 0, 1, 2, \dots$ , što znači da je niz  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  strogo monotono rastući, pa je, zbog ograničenosti odozgo s 2, ujedno i konvergentan niz.

*Drugi način*

Jednakost (6) možemo razmatrati kao nelinearnu diferentnu jednadžu prvog reda. Uvedimo smjenu:  $x_n = 2 \cos(2z_n)$ . Tada (6) poprima oblik

$$2 \cos(2z_{n+1}) = \sqrt{2 + 2 \cos(2z_n)},$$

odnosno,

$$\cos(2z_{n+1}) = \cos(z_n),$$

odakle je

$$z_{n+1} = \pm \frac{1}{2} z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Razmotrimo ove slučajeve odvojeno.

$$\text{i) } z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opće rješenje ove jednačbe je, prema (2),

$$z_n = (z_0 - 2k\pi) \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pri tome je

$$x_0 = 2 \cos(2z_0) \implies z_0 = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{x_0}{2}\right),$$

što implicira

$$z_n = \left(\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - 2k\pi\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Konačno je opće rješenje polazne jednačbe

$$x_n = 2 \cos\left(\left(\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - 4k\pi\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4k\pi\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odavde je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \cos(4k\pi) = 2 \cdot 1 = 2,$$

što znači da je niz konvergentan.

$$\text{ii) } z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opće rješenje ove jednačbe je, prema (2),

$$z_n = \left(z_0 - \frac{2k\pi}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

odnosno

$$z_n = \left(\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{2k\pi}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Konačno je opće rješenje polazne jednačbe

$$x_n = 2 \cos\left(\left(\arccos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{4k\pi}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4k\pi}{3}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odavde je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

ili

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) = 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Zbog činjenice da je  $x_n > 0$  za sve  $n = 1, 2, \dots$ , u obzir dolazi samo slučaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

□

**Primjer 2.11.** Neka je dat niz

$$a_{n+1} = a + b - \frac{ab}{a_n} \quad n = (1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Rješenje:** Jednakost (7) možemo napisati u obliku

$$a_{n+1} = \frac{(a+b)a_n - ab}{a_n} \quad n = (1, 2, 3, \dots), \quad (8)$$

što je ustvari Riccatijeva diferentna jednačba. Uvođenjem smjene  $a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , ta se jednačba transformira u linearnu jednačbu oblika

$$b_{n+2} - (a+b)b_{n+1} + abb_n = 0. \quad (9)$$

Jednačba (9) ima karakterističnu jednačbu

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0,$$

čiji su korijeni  $\lambda_1 = a$ ,  $\lambda_2 = b$ , pa je njeno opće rješenje

$$b_n = C_1 a^n + C_2 b^n.$$

Vraćanjem u smjenu dobijamo rješenje polazne jednačbe

$$a_n = \frac{C_1 a^{n+1} + C_2 b^{n+1}}{C_1 a^n + C_2 b^n}, \quad (10)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  proizvoljne konstante. Potrebno je razmatrati dva slučaja

i)  $C_2 \neq 0$

Tada je

$$a_n = \frac{Ca^{n+1} + b^{n+1}}{Ca^n + b^n},$$

gdje je  $C = \frac{C_1}{C_2}$ . U zavisnosti od toga da li je  $a$  jednako, manje ili veće od  $b$  razlikujemo sljedeće situacije.

1° Ako je  $a = b$ , tada imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(C+1)a^{n+1}}{(C+1)a^n} = a = b.$$

2° Ako je  $a < b$ , tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{aC(\frac{a}{b})^n + b}{C(\frac{a}{b})^n + 1} = b.$$

3° Ako je  $a > b$ , onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{aC + b(\frac{b}{a})^n}{C + (\frac{b}{a})^n} = a.$$

ii)  $C_2 = 0$

U ovom slučaju se dobije još jedno rješenje date jednačbe, konstantan niz

$$a_n = a \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a.$$

□

**Primjer 2.12.** Nizovi  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  i  $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ , zadani su rekurentnim formulama

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje su  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ ,  $c_0 = c$ .

Izračunati:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

**Rješenje:** Dati sistem se može napisati u matičnom obliku

$$X_{n+1} = AX_n,$$

gdje je

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Pošto vrijedi

$$X_n = A^n X_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

to je dovoljno naći matricu  $A^n$ . Problem ćemo riješiti korištenjem Hamilton-Cayleyevog teorema, prema kojem je

$$k(A) = \mathbf{0},$$

gdje je  $k(\lambda)$  karakteristični polinom matrice  $A$ , a  $\mathbf{0}$  nula matrica. Kako je

$$k(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{-4\lambda^3 + 3\lambda + 1}{4},$$

prema Hamilton-Cayleyevom teoremu imamo

$$4A^3 - 3A - I = 0,$$

odnosno,

$$4A^{n+3} - 3A^{n+1} - A^n = 0,$$

što predstavlja linearnu diferentnu jednadžbu trećeg reda s konstantnim koeficijentima. Svojstvene vrijednosti matrice  $A$  su  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$ , odakle je onda,

$$A^n = C_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (C_2 + C_3 n), \quad (11)$$

gdje su  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  konstantne matrice koje treba naći koristeći početne uvjete.

Za  $n = 1$  imamo,

$$A = C_1 - \frac{1}{2}C_2 - C_3 \frac{1}{2}.$$

Za  $n = 2$  je

$$A^2 = C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{2}C_3,$$

dok je za  $n = 3$

$$A^3 = C_1 - \frac{1}{8}C_2 - \frac{3}{8}C_3.$$

Odavde se dobija

$$C_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanjem  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  u (11), imamo,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Konačno je

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \\ (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \\ (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \left[ (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \right], \\ b_n &= \frac{1}{3} \left[ (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \right], \\ c_n &= \frac{1}{3} \left[ (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \right]. \end{aligned}$$

Tražene granične vrijednosti su

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[ (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \right] = \frac{1}{3}(a + b + c), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[ (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \right] = \frac{1}{3}(a + b + c), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[ (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)a + (1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n)b + (1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n)c \right] = \frac{1}{3}(a + b + c). \end{aligned}$$

□

**Zadaci za samostalan rad**

1. Dokazati da je niz zadan s

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n + 4}{4a_n + 5}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

konvergentan.

2. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = \frac{ab}{a + b - a_n} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdje je  $a_1 = \frac{ab}{a+b}$ .

a) Naći opći član niza  $a_n$ .

b) Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

3. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdje je  $a_1 = 1$ . Izračunati  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

4. Neka je dat niz

$$a_{n+1} = \frac{1}{4(1 - a_n)} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdje je  $a_1 = 0$ . Naći  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Literatura**

- [1] S. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations* (3rd ed.), Springer, New York, 2005.
- [2] A. Nurkanović, A. Muminagić: Nestandardni dokazi nekih osobina Fibonaccievih brojeva, *Evolventa*, 1(2), 20-26, 2018.
- [3] A. Muminagić: Jedan zadatak s više načina rješavanja, *Evolventa*, 2(1), 2-11, 2019.
- [4] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, 1(1), 2-5, 2018.
- [5] M. Nurkanović: *Diferentne jednačbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
- [6] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednačbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.