

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima

Mehmed Nurkanović¹, Mirsad Trumić²

¹*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika*

²*JU Poljoprivredna i medicinska škola Brčko distrikt BiH*

Sažetak: U radu se razmatra mogućnost primjene metoda snižavanja reda linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima kao analogona istoimenog metoda pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi. Metod je ilustriran na nekoliko odgovarajućih primjera.

1. Uvod

Pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi, bilo s konstantnim ili varijabilnim koeficijentima, uglavnom se koriste standardni metodi rješavanja: metod neodređenih koeficijenata, metod varijacije konstanti, metod generirajućih funkcija, metod stepena padajućih faktorijela, metod Z-transformacije. Međutim, osim tih metoda, moguće je koristiti metode diferencijalnih jednadžbi, kao što su: snižavanje reda jednadžbe, opći metod faktORIZACIJE operatora, metod invarijanti ili Lieve simetrije [1, 2, 4, 5, 7, 8]. Tako je u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi poznato da se pogodnom smjenom linearna diferencijalna jednadžba k -tog reda može svesti na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k - 1$, to jest moguće joj je sniziti red. Naime, ako je linearna diferencijalna jednadžba oblika

$$y^{(k)} + p_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + p_k(x)y = b(x) \quad (1)$$

i ako nam je $f(x)$ rješenje njoj odgovarajuće homogene jednadžbe, onda se smjenom $y = f(x)z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, diferencijalna jednadžba (1) svede na linearnu diferencijalnu jednadžbu reda $k - 1$. Pokazat ćemo da se isti metod može primijeniti i na slučaj obične linearne diferentne jednadžbe s varijabilnim koeficijentima [1, 7]. Uzmimo jednostavan slučaj takve jednadžbe drugog reda

$$u_{n+2} + a_n u_{n+1} + b_n u_n = r_n, \quad b_n \neq 0. \quad (2)$$

Ciljna skupina: srednja škola

Cljučne riječi: diferentne jednadžbe, metod snižavanja reda, konvergencija

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: august, 2023.

Pretpostavimo da je f_n neko rješenje odgovarajuće homogene diferentne jednačbe tako da f_n i f_{n+2} nisu nule za sve $n = 0, 1, \dots$. Zamjenom $u_n = f_n v_n$ u (2) dobijamo

$$f_{n+2}v_{n+2} + a_nf_{n+1}v_{n+1} + b_nf_nv_n = r_n, \quad (3)$$

što nije jednostavnije od diferentne jednačbe (2). Zato uvođenjem smjene $\omega_n = \Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ u (3) dobijamo

$$\begin{aligned} f_{n+2}(\omega_{n+1} + v_{n+1}) + a_nf_{n+1}v_{n+1} + b_nf_n(v_{n+1} - \omega_n) \\ = f_{n+2}\omega_{n+1} - b_nf_n\omega_n + (f_{n+2} + a_nf_{n+1} + b_nf_n)v_{n+1} = r_n. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke za f_n vrijedi

$$f_{n+2} + a_nf_{n+1} + b_nf_n = 0.$$

Time će se (3) svesti na diferentnu jednačbu

$$f_{n+2}\omega_{n+1} - b_nf_n\omega_n = r_n,$$

što je linearna diferentna jednačba prvog reda (dakle, snizili smo red jednačbe (2) za jedan), koju možemo riješiti na uobičajeni način.

Naravno da je ovdje jedan od ključnih problema pogoditi niz f_n .

2. Primjeri primjene metoda snižavanja reda

Metod snižavanja reda pri rješavanju linearnih diferentnih jednačbi s varijabilnim koeficijentima ilustrirat ćemo na par primjera koji su navedeni kao problemi za rješavanje u [1].

Primjer 2.1. ([1], Problem 1.12 (c)) Riješiti diferentnu jednačbu

$$u_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right)u_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Rješenje: Uz malo truda moguće je uočiti da je jedno rješenje odgovarajuće homogene jednačbe za datu jednačbu oblika $f_n = n+1$, budući da se homogena jednačba može napisati u pogodnijem obliku

$$nu_{n+2} - (3n+1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 0$$

Uvođenjem smjene $u_n = (n+1)v_n$ u (4) se dobije jednačba

$$(n+3)v_{n+2} - \left(3 + \frac{1}{n}\right)(n+2)v_{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)v_n = \frac{1}{n},$$

odnosno

$$(n+3)(v_{n+2} - v_{n+1}) - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1)(v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{n}.$$

Nakon smjene $\omega_n = v_{n+1} - v_n$, dobije se

$$(n+3)\omega_{n+1} - 2\frac{(n+1)(n+1)}{n}\omega_n = \frac{1}{n},$$

odakle je

$$\omega_{n+1} = \frac{2(n+1)^2}{(n+3)n}\omega_n + \frac{1}{n(n+3)}.$$

Posljednja jednačba je linearna diferentna jednačba prvog reda sa varijabilnim koeficijentima čije je opće rješenje oblika (v. [2–6])

$$\omega_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 2 \frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2 \frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \frac{1}{k(k+3)}. \quad (5)$$

Sređivanjem prvog sumanda u posljednjoj jednakosti dobijamo

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} 2 \frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \omega_1 = \frac{2^{n-1}n!n!}{\frac{(n+2)!}{3!}(n-1)!} \omega_1 = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1.$$

S druge strane, za drugi sumand vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2 \frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \frac{1}{k(k+3)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{n-k-1}(n!)^2 k!(k+3)!}{((k+1)!)^2 (n-1)!(n+2)!} \frac{1}{k(k+3)} \\ &= \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(n-1)!(n+2)!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{-k} k!(k+3)!}{((k+1)!)^2} \frac{1}{k(k+3)} \\ &= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Metodom parcijalnog sumiranja (v. [2, 4]) odredimo sumu u (6)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{-k}(k+2)}{k(k+1)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (k+2) \implies \Delta x_k = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (k+1) \\ \Delta y_k = \frac{1}{k(k+1)} = (k-1)^{(-2)} \implies y_k = -\frac{1}{k} \end{array} \right\| \\ &= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k y_{k+1} = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{k+2}{k} \right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (k+1) \frac{1}{k+1} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n+2}{n} + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n+2}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}n} + 1. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2 \frac{(i+1)^2}{(i+3)i} \right) \frac{1}{k(k+3)} &= \frac{2^{n-1}n}{(n+1)(n+2)} \left(-\frac{1}{2^{n-1}n} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

pa je

$$\omega_n = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}.$$

S obzirom da je $\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1} u_n$, dalje imamo

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{n+1} u_n &= \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} 3\omega_1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\ \implies \frac{1}{n+1} u_n &= 3\omega_1 \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \\ \implies \frac{1}{n+1} u_n &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2} \right) \Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} - \Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Koristeći činjenicu (v. [2, 4])

$$\Delta \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = a_n \implies \Delta^{-1}(a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + C,$$

i uzimajući za $C = 0$, što je moguće jer je u (8) već uključena odgovarajuća konstanta, imamo

$$\Delta^{-1} \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)},$$

odakle primjenom metoda parcijalnog sumiranja dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k k}{(k+1)(k+2)} &= \left\| \begin{array}{l} x_k = k2^k \implies \Delta x_k = (k+2)2^k \\ \Delta y_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = k^{(-2)} \implies y_k = -\frac{1}{k+1} \end{array} \right\| \\ &= [x_k y_k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k y_{k+1} = \left[-\frac{k2^k}{k+1} \right]_1^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+2)2^k}{k+2} \\ &= -\frac{n2^n}{n+1} + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = -\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1. \end{aligned}$$

S druge strane, prema definiciji padajućeg faktorijela s negativnim eksponentom (v. [2, 4]), imamo

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = n^{(-2)}$$

te koristeći osobinu inverznog delta operatora Δ^{-1} : $\Delta^{-1}(t^{(a)}) = \frac{t^{(a+1)}}{a+1}$, $a \neq -1$ i izostavljanjem dodatne konstante, dobije se da vrijedi

$$\Delta^{-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left[-\frac{1}{k+1} \right]_1^n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}.$$

Uvrštavanjem dobijenih rezultata u (8) dobijamo

$$\frac{1}{n+1}u_n = \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{n2^n}{n+1} + 2^n - 1\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2},$$

odnosno

$$\begin{aligned} u_n &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) (2^n - (n+1)) + 1 - \frac{1}{2}(n+1) \\ &= \left(3\omega_1 + \frac{1}{2}\right) 2^n - (3\omega_1 - 1)(n+1) + 1. \end{aligned}$$

Zamjenom konstante $\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{u_2}{3} - \frac{u_1}{2}$ dobijamo konačnu formu rješenja date jednačbe

$$u_n = \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}\right) 2^n - \left(u_2 - \frac{3}{2}u_1 - 1\right) (n+1) + 1.$$

□

Primjer 2.2. ([1], Problem 1.12 (a)) Riješiti diferentnu jednačbu

$$u_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2}u_{n+1} + \frac{n+1}{n+2}u_n = 1, \quad n \geq 0. \quad (9)$$

Rješenje: Pripadajuća homogena jednačba ima jedno rješenje $f_n = 1$. Uvodeći smjene $u_n = v_n$ i $\omega_n = v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, onda (9) dobija sljedeći oblik

$$u_{n+2} - u_{n+1} - \frac{n+1}{n+2}(u_{n+1} - u_n) = 1,$$

odnosno

$$\omega_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\omega_n + 1.$$

Dobili smo linearnu diferentnu jednačbu prvog reda čije je opće rješenje oblika

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{i+2}\right) \omega_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{i+1}{i+2}\right) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+2) = \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{1}{n+1} \left(\frac{(n-1)n}{2} + 2n\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\omega_0 + \frac{n(n+3)}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smjene se dobija

$$\Delta u_n = \frac{1}{n+1}(u_1 - u_0) + \frac{n(n+3)}{2(n+1)},$$

odnosno

$$u_n = (u_1 - u_0)\Delta^{-1} \left(\frac{1}{n+1}\right) + \Delta^{-1} \left(\frac{n(n+3)}{2(n+1)}\right) = (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+3)}{(k+1)}. \quad (10)$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+3)}{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k+2 - \frac{2}{k+1} \right) = \frac{n(n-1)}{2} + 2n - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{n(n+3)}{2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1},$$

iz (11) se dobija

$$u_n = (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+3)}{2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right),$$

odnosno

$$u_n = (u_1 - u_0 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{n(n+3)}{4}.$$

□

Primjer 2.3. ([1], Problem 1.12 (b)) Riješiti diferentnu jednačbu

$$u_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2} u_{n+1} + \frac{n}{n+1} u_n = 3(n+3), \quad n \geq 0. \quad (11)$$

Rješenje: Nije teško zaključiti da je $f_n = n+1$ rješenje odgovarajuće homogene jednačbe za datu jednačbu. Uvođenjem smjene $u_n = f_n v_n = (n+1)v_n$ dobija se jednačba

$$(n+3)v_{n+2} - \frac{2n+3}{n+2} (n+2)v_{n+1} + \frac{n}{n+1} (n+1)v_n = 3(n+3),$$

odnosno

$$(n+3)v_{n+2} - (2n+3)v_{n+1} + nv_n = 3(n+3).$$

To se može pisati i u obliku jednačbe po Δv_n

$$(n+3)(v_{n+2} - v_{n+1}) - n(v_{n+1} - v_n) = 3(n+3),$$

odnosno u obliku linearne diferentne jednačbe po ω_n

$$(n+3)\omega_{n+1} - n\omega_n = 3(n+3)$$

ili

$$\omega_{n+1} = \frac{n}{n+3} \omega_n + 3.$$

Njeno opće rješenje je

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+3} \right) \omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{i}{i+3} \right) \cdot 3 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2} \right) \omega_1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k+4} \cdot \frac{k+2}{k+5} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2} \right) \\ &= \frac{6(n-1)!}{(n+2)!} \omega_1 + 3 \frac{(n-1)!}{(n+2)!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+3)!}{k!} \\ &= \frac{6}{(n+2)(n+1)n} \omega_1 + \frac{3}{(n+2)(n+1)n} \sum_{k=1}^{n-1} (k+3)(k+2)(k+1). \end{aligned}$$

Kako je koristeći osobinu djelovanja inverznog delta operatora na stepen padajućeg faktoriijela (v. [2, 4])

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+3)(k+2)(k+1) = \Delta^{-1}(k+3)^{(3)} \Big|_1^n = \frac{1}{4}(k+3)^{(4)} \Big|_1^n = \frac{1}{4}(n+3)^{(4)} - 6,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{6}{(n+2)(n+1)n} \omega_1 + \frac{3}{(n+2)(n+1)n} \left[\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} - 6 \right] \\ &= \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3). \end{aligned}$$

Zamjenom

$$\omega_n = \Delta v_n = \Delta \frac{1}{n+1} u_n$$

iz posljednje jednakosti slijedi

$$\Delta \frac{1}{n+1} u_n = \frac{6\omega_1 - 18}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4}(n+3),$$

odakle je

$$\frac{1}{n+1} u_n = (6\omega_1 - 18) \Delta^{-1} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} + \frac{3}{4} \Delta^{-1} n + \frac{9}{4} \Delta^{-1} 1. \quad (12)$$

Kako je (v. [2, 4])

$$\Delta^{-1} \frac{1}{(n+2)(n+1)n} = -\frac{1}{2}(k-1)^{(-2)} \Big|_1^n = -\frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{4},$$

$$\Delta^{-1} n = \frac{1}{2} n(n-1),$$

$$\Delta^{-1} 1 = n-1,$$

zamjenom u (12) dobije se

$$\frac{1}{n+1} u_n = -(6\omega_1 - 18) \left(\frac{1}{2(n+1)n} - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + \frac{9}{4} (n-1),$$

odnosno

$$u_n = -(6\omega_1 - 18) \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}(n+1) \right) + \frac{3}{8} (n+1)n(n-1) + \frac{9}{4} (n+1)(n-1).$$

Imajući na umu da je

$$\omega_1 = v_2 - v_1 = \frac{1}{3} u_2 - \frac{1}{2} u_1,$$

konačno dobijamo traženo rješenje

$$u_n = (2u_2 - 3u_1 - 18) \frac{(n-1)(n+2)}{4n} + \frac{3}{8} (n+1)n(n-1) + \frac{9}{4} (n+1)(n-1).$$

□

Primjedba 2.4. Uočimo da za nizove koji su rješenja jednadžbi u prethodnim primjerima možemo zaključiti da divergiraju ka $+\infty$.

Literatura

- [1] P.E. Hydon, *Difference Equations by Differential Equation Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [2] M. Nurkanović: *Diferentne jednačbe: teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
- [3] M. Nurkanović: Diracov problem, *Evolventa*, vol. 1, no. 1 (2018), 2-5.
- [4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednačbe: teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.
- [5] M. Nurkanović, M. Trumić: Različiti metodi u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama, *Evolventa*, vol. 4, no. 1 (2021), 25-37.
- [6] M. Nurkanović, M. Trumić: Computing indefinite integrals by difference equations. *The Mathematical Gazette*, vol. 107, no. 570 (2023), 474-487. <https://doi.org/10.1017/mag.2023.99>
- [7] M. Trumić: *Primjena diferentnih jednačbi u nastavi matematike*, Doktorska disertacija, PMF Sarajevo, 2023.
- [8] M. Trumić: Uloga invarijanti u ispitivanju konvergencije nizova zadanih rekurentnim formulama s varijabilnim koeficijentima, *Evolventa*, vol. 4, no.2 (2021), 2-11.