

Analiza diskretnih dinamičkih sistema drugog reda uz ilustracije

Ajša Hrustić¹

¹*HIDROCIBALAE BH d.o.o Tuzla, društvo za geodetske i poslovne usluge*

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog Profesora Mehmeda Nurkanovića.

Sažetak: U radu se, kroz teorijsku analizu i ilustrativne primjere, ispituju tačke ekvilibrijuma i globalno ponašanje sistema, čime se stiče uvid u njihova kvalitativna svojstva i omogućava predviđanje njihovog dugoročnog ponašanja.

1. Uvod

Intuitivno, pojam stabilnosti vezemo za ponašanje sistema koje je otporno na male devijacije ili promjene. U matematici, stabilnost ima širok spektar primjena, a u ovom radu fokus je stavljen na stabilnost linearnih autonomnih diskretnih dinamičkih sistema drugog reda. Za stabilne sisteme očekuje se da se njihova dinamika s vremenom smiruje, odnosno da mali devijacije u blizini ravnotežnog stanja rezultiraju rješenjima koja teže tom stanju kada vrijeme teži u beskonačnost. Ovakav koncept stabilnosti ima poseban značaj u primijenjenoj matematici, kao i u fizici i inženjerstvu, gdje se brojni procesi modeliraju pomoću diskretnih dinamičkih sistema [1–5]. Prilikom modeliranja ovakvih sistema ključno je da rješenja posjeduju stabilno ponašanje, jer bi u suprotnom modeli bili neadekvatni za praktičnu primjenu. U radu će se, kroz teorijsku analizu i ilustrativne primjere, ispitivati tačke ekvilibrijuma i globalno ponašanje sistema, čime se stiče uvid u njihova kvalitativna svojstva i omogućava predviđanje njihovog dugoročnog ponašanja.

2. Stabilnost autonomnih linearnih diskretnih dinamičkih sistema drugog reda

U ovom dijelu opisat ćemo stabilnost tačaka ekvilibrijuma autonomnih sistema oblika

$$X(n+1) = AX(n), \quad (1)$$

fokusirajući se na slučaj kada je matrica A formata 2×2 .

Neka je data matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, čija je karakteristična jednačina data sa $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$, odnosno,

$$\lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + \det A = 0. \quad (2)$$

Ciljna skupina: svi - primijenjena matematika

Ključne riječi: diskretni dinamički sistemi, stabilnost, fazni portret

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 15. juni 2025.

U (2) uvedimo oznake: $p_1 = -\text{tr}A$, $p_2 = \det A$. Tada (2) ima oblik $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$, odakle zaključujemo da su svojstvene vrijednosti matrice A date sa,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}).$$

Ako je zadovoljeno da $|\lambda_{1,2}| < 1$, tada je ekvilibrijum $\bar{X} = (0, 0)$ lokalno asimptotski stabilan. Iz navedenog slijedi jednostavan kriterij za ispitivanje lokalne asimptotske stabilnosti ekvilibrijuma $\bar{X} = (0, 0)$.

Teorem 2.1. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{X} = (0, 0)$ sistema (1) je lokalno asimptotski stabilna ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta:*

1. $1 + p + q > 0$,
2. $1 - p + q > 0$,
3. $q < 1$,

što je ekvivalentno sa

$$|\text{tr}A| < 1 + \det A < 2. \quad (3)$$

Dokaz: Dovoljan uslov da tačka ekvilibrijuma $\bar{X} = (0, 0)$ bude lokalno asimptotski stabilna jeste $|\lambda_{1,2}| < 1$. Kako su svojstvene vrijednosti matrice A date sa $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$, to iz $|\frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})| < 1$ imamo da vrijede sljedeće nejednakosti

$$-1 < \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) < 1,$$

odnosno nejednakosti $p - 2 < \pm \sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$.

Posljednje nejednakosti vrijede samo u slučaju $-2 < p < 2$. Za takvo izabrano p lijeva strana nejednakosti $p - 2 < \sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$ uvijek vrijedi, odakle možemo posmatrati samo šta se dešava u slučaju $\sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$. Kvadriranjem izdvojene nejednakosti i sređivanjem dobijamo upravo uslov: $p + q + 1 > 0$.

Ukoliko posmatramo nejednakost $p - 2 < -\sqrt{p^2 - 4q} < p + 2$, nakon množenja sa (-1) , nejednakost dobija oblik: $-(p + 2) < \sqrt{p^2 - 4q} < 2 - p$. Analogno za $p \in (-2, 2)$ imamo da je lijeva strana posljednje nejednakosti uvijek zadovoljena, te opet možemo ispitati ponašanje desne strane nejednakosti, odnosno nejednakosti $\sqrt{p^2 - 4q} < 2 - p$, odakle potrebnim sređivanjem dolazimo do uslova $1 - p + q > 0$. Time smo dobili prva dva uslova teorema. Posljednji uslov direktno slijedi iz definisanosti izraza $\sqrt{p^2 - 4q}$, odakle imamo $p^2 - 4q > 0$. Kako je $p \in (-2, 2)$, to je $p^2 \in (0, 4)$, pa je $0 \leq p^2 - 4q \leq 4 - 4q$, odakle se dobije $q < 1$. $\square$

Sada ćemo dati neke jednostavne osobine tačke ekvilibrijuma, do kojih možemo doći posmatrajući ponašanje svojstvenih vrijednosti polazne matrice A sistema (1). Neka je $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ tačka ekvilibrijuma sistema (1). Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako sve svojstvene vrijednosti matrice A leže u otvorenom disku $|\lambda| < 1$, onda je ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y})$ *asimptotski stabilan*, to jest imamo *lokalno-asimptotsku stabilnost*.
2. Ako je bar jedna svojstvena vrijednost matrice A po modulu veća od jedan, tada je ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y})$ *nestabilan*.

U slučaju nestabilnog ekvilibrijuma važno je napomenuti da razlikujemo sljedeća dva slučaja:

1. ako su obje svojstvene vrijednosti matrice A po modulu veće od 1, onda takav ekvilibrijum nazivamo *repeler*,
2. ako je jedna svojstvena vrijednost matrice A po modulu veća od 1, a druga svojstvena vrijednost po modulu manja od 1, onda takav ekvilibrijum nazivamo *sedlasta tačka*.

3. Analiza sistema faznim portretima

Posmatrajmo dvodimenzionalni linearni autonomni sistem:

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) \\x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n),\end{aligned}$$

ili

$$X(n+1) = AX(n), \quad (4)$$

gdje je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Definicija 3.1. Za tačku $\bar{X}$ kažemo da je tačka ekvilibrijuma sistema (4) ako je zadovoljeno $A\bar{X} = \bar{X}$ ili $(A - I)\bar{X} = \mathbf{0}$.

Dakle, ukoliko je $(A - I)$ nesingularna matrica, tada je $\bar{X} = \mathbf{0}$ jedinstvena tačka ekvilibrijuma sistema (4). S druge strane, ako je $(A - I)$ singularna matrica, tada postoji familija tačaka ekvilibrijuma za sistem (4). Uvodeći smjenu $Y(n) = X(n) - \bar{X}$ u (4), formiramo novi sistem $Y(n+1) = AY(n)$, koji je identičan sistemu (4). Važno je napomenuti da je ispitivanje osobina stabilnosti ma koje tačke ekvilibrijuma $\bar{X} \neq \mathbf{0}$ isto kao i ispitivanje osobina stabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{X} = \mathbf{0}$. U tu svrhu, pretpostavit ćemo da je $\bar{X} = \mathbf{0}$ jedina tačka ekvilibrijuma sistema (4).

Neka je $J = P^{-1}AP$ Jordanova forma matrice A . Tada J može imati jedan od sljedećih kanonskih oblika:

1. **Slučaj:** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, kada su realne i različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
2. **Slučaj:** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, kada su realne i jednake svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;
3. **Slučaj:** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, kada su kompleksno-konjugovane svojstvene vrijednosti $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Ukoliko uzmemo da je $Y(n) = P^{-1}X(n)$ ili $X(n) = PY(n)$, tada je sistem (4) ekvivalentan sistemu

$$Y(n+1) = JY(n). \quad (5)$$

Ako je $X(0) = X_0$ početni uslov sistema (4), tada je $Y(0) = Y_0 = P^{-1}X_0$ odgovarajući početni uslov za sistem (5). Važno je naglasiti da su uslovi za ispitivanje tačke ekvilibrijuma sistema (4) i (5) identični.

Sada ćemo skicirati fazne prostore sistema (5) za slučajeve navedene u (3). Počevši od ishodišta u y_1y_2 ravni, $Y_0 = (y_{10}, y_{20})$, pratimo kretanje tačaka $Y_1, Y_2, \dots$. U suštini crtamo orbitu $\{Y(n, 0, Y_0) | n \geq 0\}$. Strelica na orbiti upravo označava smjer kretanja kako se n (vrijeme) povećava.

Razmotrimo navedene slučajeve pojedinačno.

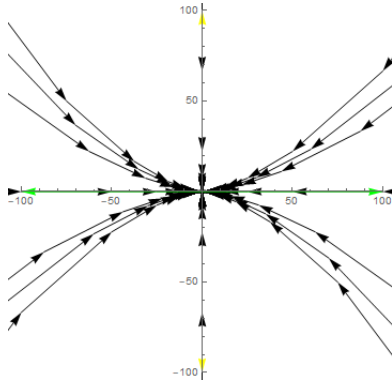
1. Slučaj: U ovom slučaju sistem $Y(n+1) = JY(n)$ postaje

$$\begin{aligned}y_1(n+1) &= \lambda_1 y_1(n), \\y_2(n+1) &= \lambda_2 y_2(n).\end{aligned}$$

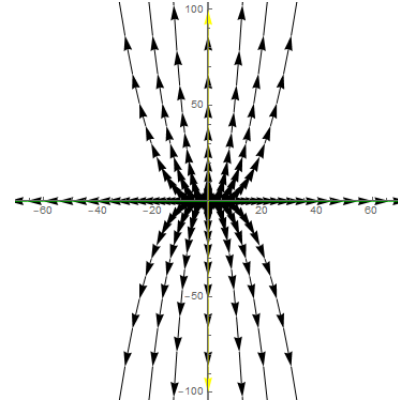
Stoga rješenje sistema ima oblik $\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_{10} \\ \lambda_2^n y_{20} \end{pmatrix}$, odakle dobijamo relaciju,

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \left(\frac{y_{20}}{y_{10}} \right).$$

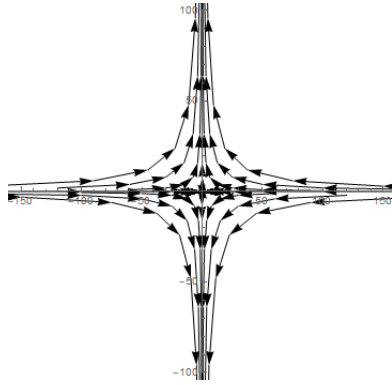
Sada imamo sljedeće situacije:



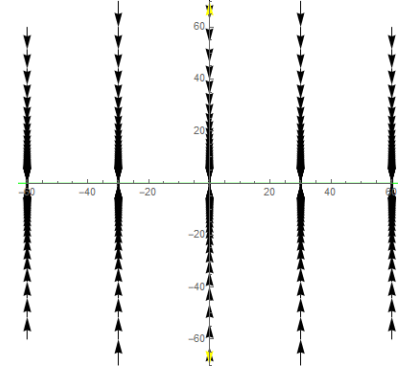
(i) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_2 = \frac{1}{3} < \lambda_1 = \frac{1}{2} < 1$, **lokalno asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma**



(ii) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $1 < \lambda_1 = 1.1 < \lambda_2 = 1.3$, **nestabilna tačka ekvilibrijuma, repeler**



(iii) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_1 = \frac{1}{2} < 1, \lambda_2 = 2 > 1$, **nestabilna tačka ekvilibrijuma, sedlo**



(iv) Fazni portret za svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_2 = \frac{6}{7} < 1, \lambda_1 = 1$, **degenerativni slučaj, nestabilna tačka ekvilibrijuma**

Slika 1: Fazni portreti za $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1. Ako je $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, tada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$ (Slika 1: (i), (iv)).
2. Ako je $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, tada $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_2(n)}{y_1(n)} \right| = \infty$ (Slika 1: (ii), (iii)).

Slučaj 2: U ovom slučaju sistem $Y(n+1) = JY(n)$ ima oblik

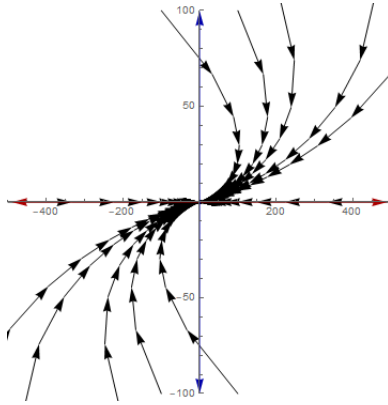
$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \lambda y_1(n) + y_2(n), \\ y_2(n+1) &= \lambda y_2(n). \end{aligned}$$

Kako je $J = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$, dolazimo do rješenja sistema

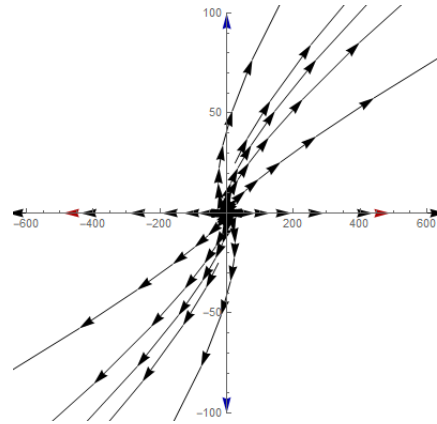
$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20} \\ \lambda^n y_{20} \end{pmatrix},$$

odakle slijedi $\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{\lambda^n y_{20}}{\lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20}}$, te zaključujemo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0.$$



(v) Fazni portret za jednake svojstvene vrijednosti $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3} < 1$, **asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma**



(vi) Fazni portret za jednake svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2} > 1$, **nestabilna tačka ekvilibrijuma**

Slika 2: Fazni portreti za $\lambda_1 = \lambda_2$.

Slučaj 3: U ovom slučaju matrica A ima dvije kompleksno-konjugovane svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, pri čemu je $\beta \neq 0$.

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ dat je sa $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ i rješenje je dato sa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\alpha + i\beta)^n &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} |\lambda_1|^n (\cos n\omega + i \sin n\omega) \\ &= |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \cos n\omega \\ -\sin n\omega \end{pmatrix} + i |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \sin n\omega \\ \cos n\omega \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdje je $\omega = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$. Opšte rješenje sistema u ovom slučaju je dato sa

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} c_1 \cos n\omega + c_2 \sin n\omega \\ -c_1 \sin n\omega + c_2 \cos n\omega \end{pmatrix}.$$

S obzirom na početne vrijednosti $y_1(0) = y_{10}$ i $y_2(0) = y_{20}$, može se dobiti $c_1 = y_{10}$ i $c_2 = y_{20}$, pa je rješenje oblika

$$\begin{aligned} y_1(n) &= y_{10} \cos n\omega + y_{20} \sin n\omega, \\ y_2(n) &= -y_{10} \sin n\omega + y_{20} \cos n\omega. \end{aligned}$$

Primjer 3.2. U DDS-u $X_{n+1} = AX_n$ za $n = (0, 1, \dots)$ ispitati lokalnu i eventualnu globalnu stabilnost za

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Karakteristična jednačina date matrice A je $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$, odakle dobijamo da su svojstvene vrijednosti za dati sistem: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Kako je zadovoljeno $|\lambda_{1,2}| < 1$, imamo da je tačka ekvilibrijuma **lokalno asimptotski stabilna**. Pri tome se tačka ekvilibrijuma za dati sistem dobija iz uslova

$$\bar{X} = A\bar{X},$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Odavde je $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Kako je fundamentalni skup rješenja za dati sistem $FS := \{\frac{1}{2^n}, n\frac{1}{2^n}\}$, to matricu A^n možemo zapisati kao linearnu kombinaciju $A^n = C_1\frac{1}{2^n} + nC_2\frac{1}{2^n}$. Odredimo konstantne matrice C_1 i C_2 . Naime,

1. $n = 0$:

$$A^0 = I = C_1 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. $n = 1$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = C_1\frac{1}{2} + C_2\frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nakon uvrštavanja dobijenih vrijednosti C_1 i C_2 dobijamo da je matrica A^n oblika

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

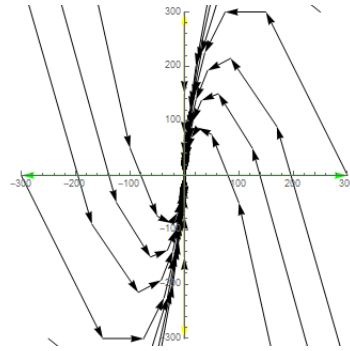
Konačno rješenje sistema bi bilo oblika $X_n = A^n X_0$, gdje je $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, pri čemu su α, β proizvoljni, odnosno

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 2n\alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

Također zadovoljeno je $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, te zaključujemo da je tačka ekvilibrijuma globalni atraktor.

Kako je $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ globalni atraktor i lokalno asimptotski stabilna, to je onda ona i globalno asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma.

Na Slici 3 prikazan je fazni portret sistema za slučaj iz ovog primjera.



Slika 3: Fazni portret za slučaj jednakih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, globalno-asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma

□

Primjer 3.3. U DDS-u $X_{n+1} = AX_n$ za $n = (0, 1, \dots)$ ispitati lokalnu i eventualnu globalnu stabilnost za

$$A = \begin{pmatrix} -4.5 & 5 \\ -7.5 & 8 \end{pmatrix}$$

Rješenje: Odgovarajuće svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dakle imamo $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$. Zaključujemo da je tačka ekvilibrijuma, što je za ovaj sistem upravo tačka $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nestabilna,

štaviše sedlo. Matrica A^n je oblika

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n} & 2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}} \\ -3^{n+1} + \frac{3}{2^n} & 3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix},$$

pa je, za proizvoljne $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, rješenje datog sistema dato sa

$$X_n = A^n \cdot X_0 = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n} & 2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}} \\ -3^{n+1} + \frac{3}{2^n} & 3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha + (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \\ (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha + (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} x_n &= (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha + (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta, \\ y_n &= (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha + (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta. \end{aligned}$$

Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

1. Neka je $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Tada je:

$$\begin{aligned} x_n &= (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \beta < 0, \end{cases} \\ y_n &= (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \beta < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Neka je $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Tada je

$$\begin{aligned} x_n &= (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \alpha < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \alpha > 0, \end{cases} \\ y_n &= (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \alpha < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Neka je $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Tada je

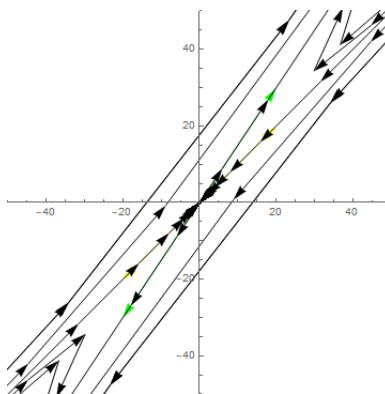
$$\begin{aligned} x_n &= (-2 \cdot 3^n + \frac{3}{2^n})\alpha + (2 \cdot 3^n - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \alpha < \beta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \alpha > \beta, \end{cases} \\ y_n &= (-3^{n+1} + \frac{3}{2^n})\alpha + (3^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \alpha < \beta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \alpha > \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Na Slici 4 prikazan je fazni portret sistema iz ovog primjera. □

Primjer 3.4. U DDS-u $X_{n+1} = AX_n$ za $n = (0, 1, \dots)$ ispitati lokalnu i eventualnu globalnu stabilnost za

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Odgovarajuće svojstvene vrijednosti date matrice su $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = 9$. Dakle imamo $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| > 1$. Zaključujemo da je tačka ekvilibrijuma $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nestabilna, štaviše sedlo.



Slika 4: Fazni portret za slučaj kada su svojstvene vrijednosti $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$, tačka ekvilibrijuma je nestabilna (sedlo)

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ je $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 9$ je $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} \\ 1 \end{pmatrix}$. Kako je fundamentalni skup rješenja za dati sistem $FS := \{\frac{1}{2^n}, 9^n\}$, to matricu A^n možemo zapisati kao linearnu kombinaciju $A^n = C_1 \frac{1}{2^n} + C_2 9^n$. Dalje imamo:

1. $n = 0$:

$$A^0 = I = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - C_2$$

2. $n = 1$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = C_1 \frac{1}{2} + 9C_2 \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{17} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakon uvrštavanja dobijenih vrijednosti C_1 i C_2 dobijamo da je matrica A^n oblika

$$A^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n) \\ 0 & 9^n \end{pmatrix}.$$

Konačno rješenje sistema bi bilo oblika $X_n = A^n X_0$, gdje je $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, pri čemu su α, β proizvoljni početni uvjeti, odnosno

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n) \\ 0 & 9^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n \alpha + \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n) \beta \\ 9^n \beta \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha + \frac{2}{17} \left(9^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \beta, \\ y_n &= 9^n \beta. \end{aligned}$$

Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

1. Neka je $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Tada je:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2}{17}(9^n - (\frac{1}{2})^n)\beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \beta < 0, \end{cases} \\ y_n &= 9^n \beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \beta < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Neka je $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Tada je

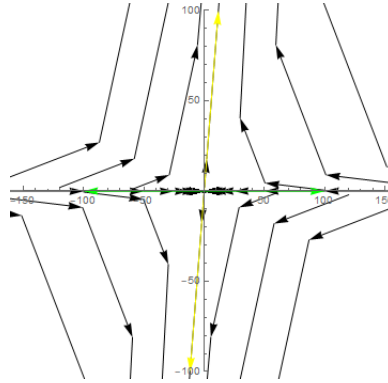
$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha \text{ i } y_n = 0 \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, & \alpha \in \mathbb{R}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Neka je $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Tada je

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha + \frac{2}{17}(9^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n) \beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, & \beta < 0, \end{cases}$$

$$y_n = 9^n \beta \text{ i vrijedi } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, & \beta > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty, & \beta < 0. \end{cases}$$

Na Slici 5 prikazan je fazni portret sistema iz ovog primjera.



Slika 5: Fazni portret za slučaj kada su svojstvene vrijednosti $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| > 1$, tačka ekvilibrija je nestabilna (sedlo)

Također bitno je napomenuti da u ovom slučaju svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima za ovaj sistem jesu ose novog koordinatnog sistema (označene žutom, odnosno zelenom bojom), budući da matrica A nije dijagonalna. Zbog toga je i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_2(n)}{y_1(n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} \right| = \frac{17}{2}.$$

□

4. Jedna od primjena linearnih sistema diferentnih jednačina

Primjer 4.1. Dio pustinje u sjeverozapadnom Meksiku naseljen je uglavnom sa dvije vrste životinja: kojota i ptica trkačica. Želimo modelirati populacije c_t i r_t kojota i ptica trkačica, redom, za t godina od sada ako su trenutne populacije c_0 i r_0 poznate. Ako imamo da sljedeće jednačine modeliraju transformaciju ovog sistema iz godine u godinu, s vremena t na vrijeme $(t+1)$:

$$\begin{aligned} c_{t+1} &= 0.86c_t + 0.08r_t, \\ r_{t+1} &= -0.12c_t + 1.14r_t, \end{aligned}$$

ispitati stabilnost sistema.

Rješenje: Dati sistem se može zapisati u matricnom obliku na sljedeći način

$$\begin{pmatrix} c_{t+1} \\ r_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_t \\ r_t \end{pmatrix}.$$

Vektor $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} c_t \\ r_t \end{pmatrix}$ zovemo vektor stanja polaznog sistema diferentnih jednačina, jer u potpunosti opisuje sistem u trenutku t .

Ako je $A = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix}$, imamo da je polazni sistem zapravo dat u obliku

$$\vec{x}_{t+1} = A\vec{x}_t.$$

Transformacija koju sistem prolazi u periodu od godinu dana je linearna, predstavljena matricom A :

$$\vec{x}_t \xrightarrow{A} \vec{x}_{t+1}.$$

Pretpostavimo da je poznato početno stanje: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$. Cilj je pronaći $\vec{x}_t$, za proizvoljno pozitivno t :

$$\vec{x}_0 \xrightarrow{A} \vec{x}_1 \xrightarrow{A} \vec{x}_2 \xrightarrow{A} \dots \xrightarrow{A} \vec{x}_t \xrightarrow{A} \dots$$

Poznato je da ćemo rješenje polaznog sistema $\vec{x}_t$ pronaći primjenom transformacije t puta na početno stanje $\vec{x}_0$:

$$\vec{x}_t = A^t \vec{x}_0.$$

Odgovarajuće svojstvene vrijednosti za dati sistem su $\lambda_1 = 1.1$ i $\lambda_2 = 0.9$. Dakle imamo $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$.

Zaključujemo da je tačka ekvilibrija $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nestabilna, štaviše sedlo.

Da bismo razumjeli dugoročno ponašanje ovog sistema i kako ono zavisi od početne vrijednosti, bilo bi korisno da pronađemo formule za c_t i r_t , izražavajući ove veličine kao funkcije od vremena t . Uradit ćemo to za određene (pažljivo odabrane) početne vektore stanja, kroz sljedeće slučajeve.

- Slučaj 1** Neka su početne vrijednosti: $c_0 = 100$ i $r_0 = 300$. Tada je početni vektor oblika: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$ i vrijedi

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 330 \end{pmatrix} = 1.1 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} = 1.1\vec{x}_0 = \lambda_1\vec{x}_0.$$

Jednakost $A\vec{x}_0 = 1.1\vec{x}_0$ nam govori da je $\vec{x}_0$ svojstveni vektor matrice A za odgovarajuću svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 1.1$. Može se zaključiti da će sa ovako datim početnim uvjetima svaka populacija porasti za 10% u toku naredne godine. Nastavljajući postupak množenjem matrice A svaki put množimo $\vec{x}_0$ sa svojstvenom vrijednošću 1.1, te je konačno rješenje dato sa

$$\vec{x}_t = A^t \vec{x}_0 = (1.1)^t \vec{x}_0.$$

Zaključujemo da je $c_t = 100(1.1)^t$ i $r_t = 300(1.1)^t$, odakle vidimo da obje populacije rastu eksponencijalno, za 10% više svake godine.

- Slučaj 2** Neka su početne vrijednosti: $c_0 = 200$ i $r_0 = 100$. Tada je početni vektor oblika: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, pa je

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix} = 0.9 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = 0.9\vec{x}_0 = \lambda_2\vec{x}_0.$$

Jednakost $A\vec{x}_0 = 0.9\vec{x}_0$ nam govori da je $\vec{x}_0$ svojstveni vektor matrice A za odgovarajuću svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 0.9$. Može se zaključiti da će sa ovako datim početnim uvjetima svaka populacija opadati za 10% u toku svake naredne godine. Nastavljajući postupak množenjem matrice A svaki put množimo $\vec{x}_0$ sa svojstvenom vrijednošću 0.9, te je konačno rješenje dato sa

$$\vec{x}_t = A^t \vec{x}_0 = (0.9)^t \vec{x}_0.$$

Zaključujemo da je $c_t = 200(0.9)^t$ i $r_t = 100(0.9)^t$, odakle vidimo da obje populacije opadaju, za 10% svake godine. Početne populacije su neusklađene: previše kojota lovi premalo ptica trkačica, što je loše stanje za obje vrste jer obje teže izumiranju.

3. **Slučaj 3** Neka je sada $c_0 = 100$ i $r_0 = 100$. Tada je početni vektor oblika: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ i vrijedi

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.08 \\ -0.12 & 1.14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 102 \end{pmatrix}.$$

Ovdje stvari ne funkcionišu tako dobro kao u prva dva slučaja koja smo razmatrali: vektor početnog stanja $\vec{x}_0$ ne može biti svojstveni vektor matrice A u ovom slučaju, tako da za rješenja $c(t)$ i $r(t)$ moramo tražiti drugi pristup. Ideja je da se koriste svojstveni vektori $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$ i $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, koji su dobijeni u prva dva slučaja. Svaki vektor u $\mathbb{R}^2$ može se jedinstveno napisati kao linearna kombinacija svojstvenih vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Specijalno, za vektor početnog stanja $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ imamo $\vec{x}_0 = C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2$. Nakon odgovarajućeg izračunavanja dobijamo $C_1 = \frac{1}{5}$ i $C_2 = \frac{2}{5}$, pa je $\vec{x}_0 = \frac{1}{5}\vec{v}_1 + \frac{2}{5}\vec{v}_2$. Ukoliko se prisjetimo, u prva dva slučaja dobili smo da je

$$A^t\vec{v}_1 = (1.1)^t\vec{v}_1 \text{ i } A^t\vec{v}_2 = (0.9)^t\vec{v}_2.$$

Upravo iz tog razloga imamo da je konačno rješenje polaznog sistema dato sa:

$$\vec{x}_t = A^t\vec{x}_0 = A^t \left(\frac{1}{5}\vec{v}_1 + \frac{2}{5}\vec{v}_2 \right) = (1.1)^t \frac{1}{5}\vec{v}_1 + (0.9)^t \frac{2}{5}\vec{v}_2 = (1.1)^t \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} + (0.9)^t \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

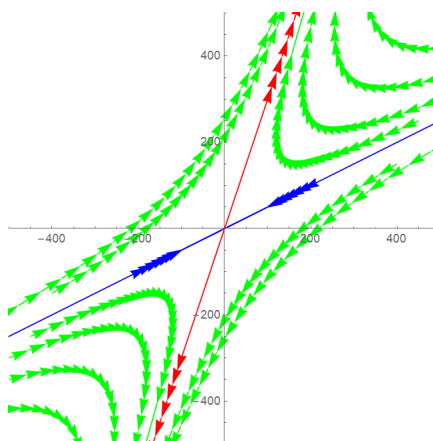
Uzimajući u obzir komponente ove vektorske jednadžbe, sada možemo pronaći zatvorene formule za $c(t)$ i $r(t)$:

$$\begin{aligned} c(t) &= 20(1.1)^t + 80(0.9)^t, \\ r(t) &= 60(1.1)^t + 40(0.9)^t. \end{aligned}$$

Pošto se članovi koji uključuju $(0.9)^t$ približavaju nuli kako se t povećava, obje populacije na kraju rastu za oko 10% godišnje, a njihov omjer $\frac{r(t)}{c(t)}$ se stabilizira oko vrijednosti $\frac{60}{20} = 3$.

Putanja koja predstavlja ponašanje populacija ovisno o vremenu t za naš sistem kojot ptice trkačice prema slučaju **3** prikazan je na Slici 6 zelenom putanjom. Da bismo stekli uvid u dugoročno ponašanje ovog sistema i kako ono ovisi o početnom stanju, možemo nacrtati grubu skicu koja prikazuje niz različitih trajektorija, koje predstavljaju različite kvalitativne tipove ponašanja. Tako je grafičkim prikazom na Slici 6 dat uvid u ponašanje populacija ovisno o početnim uvjetima koje smo razmatrali u slučajevima **1**, **2**, **3** za dati primjer. Vidimo da će obje populacije (kojoti i ptice trkačice) napredovati dugoročno ako omjer $\frac{r_0}{c_0}$ početnih populacija prelazi $\frac{1}{2}$. Ukoliko to nije zadovoljeno, imat ćemo izumiranje obje populacije. Plava putanja predstavlja ponašanje populacija prema slučaju **2**, dok crvena putanja predstavlja ponašanje populacija prema slučaju **1**.

□



Slika 6: Fazni portret koji prikazuje ponašanje populacija kojota i ptica trkačica, ovisno o vremenu t i različitim početnim uvjetima.

Literatura

- [1] O. Bretscher: *Linear Algebra with applications - 5th ed.*, PEARSON, Boston etc., 2013.
- [2] S. Elaydi: *An introduction to difference equations - 3rd ed.*, Springer, New York, 2005.
- [3] M.R.S. Kulenović, O. Merino: *Discrete Dynamical Systems and difference equations with Mathematica*, CHAPMAN & HALL/CRC, Boca Raton etc., 2002.
- [4] M. Nurkanović: *Diferentne jednačbe - Teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
- [5] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednačbe - Teorija i zadaci s primjenama*, Printcom, Tuzla, 2016.