

Dokazivanje nejednakosti primjenom diferencijalnog računa

Jasmina Rahmanović¹

¹Behram-begova medresa u Tuzli

Rad posvećujem uvaženom profesoru i mentoru prof. dr. Mehmedu Nurkanoviću, koji me je nesebično bodrio i usmjeravao kroz studije i rad, povodom njegovog 65. rođendana

Sažetak: U ovom radu biće pokazano kako se uz pomoć diferencijalnog računa, te monotonosti i konveksnosti funkcija mogu dokazivati neke nejednakosti.

1. Uvod

Dokazivanje nejednakosti je tema kojom se najčešće bave nadareni učenici, odnosno, učenici koji se spremaju za takmičenja, kao i njihovi mentori. Rad sa nejednakostima je mnogo zahtjevniji u odnosu na jednakosti. Zato bilo koja inovativna ideja na ovu temu će vjerovatno biti korisna onima koji se bave tom problematikom. [1]

Uvedimo sada osnovne pojmove i činjenice koje ćemo koristiti pri dokazivanju nejednakosti u narednoj sekciji.

Definicija 1.1. [2],[3] Neka je funkcija f definisana na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je monotonu rastuća ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) .$$

Za funkciju f kažemo da je monotonu opadajuća ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) .$$

Teorem 1.2. [2],[3] Ako je funkcija f diferencijabilna na I i

$$f'(x) > 0, \text{ za sve } x \in I,$$

tada je funkcija f rastuća na I , dok je funkcija opadajuća na I ako je

$$f'(x) < 0, \text{ za sve } x \in I.$$

Ponekad nije tako jednostavno odrediti znak prvog izvoda funkcije, pa se tada gornja činjenica može poopćiti. Dakle, ako je n -ti izvod funkcije pozitivan na intervalu I , to jest, $f^{(n)}(x) > 0$, tada je $f^{(n-1)}(x)$ rastuća funkcija na I . Analogno, ako je n -ti izvod funkcije negativan na I , to jest, $f^{(n)}(x) < 0$, tada je $f^{(n-1)}(x)$ opadajuća funkcija na I .

Ciljna skupina: srednja škola i fakultet

Ključne riječi: nejednakosti, izvodi, monotonost, konveksnost, konkavnost, Lagrangeov teorem

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 01. decembar 2025.

Teorem 1.3. [2]/[3] (**Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti**) Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) , tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Definicija 1.4. [3] Za funkciju f kažemo da je strogo konveksna na I ako za svako λ ($0 < \lambda < 1$) vrijedi

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Za funkciju f kažemo da je strogo konkavna na I ako za svako λ ($0 < \lambda < 1$) vrijedi

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Teorem 1.5. [2],[3] Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna i ako je

$$f''(x) > 0, \text{ za sve } x \in I,$$

tada je funkcija f strogo konveksna na I , a ako je

$$f''(x) < 0, \text{ za sve } x \in I,$$

tada je funkcija f strogo konkavna na I .

Teorem 1.6. (Jensenova nejednakost) Neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konkavna (konveksna) funkcija i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Tada za sve $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ vrijedi

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \left(f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)\right). \quad (1)$$

Stroga konkavnost (stroga konveksnost) vrijedi kad se u (1) stave znaci stroge nejednakosti.

2. Dokazi nekih specifičnih nejednakosti

Primjeri koji slijede uglavnom su uzeti kao zadaci iz [4], te ovdje detaljno urađeni.

Primjer 2.1. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}, \quad n \geq 9.$$

Rješenje: Definišimo funkciju f tako da je $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ za $x > 0$. Tada je

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}},$$

pa je

$$f'(x) < 0 \iff \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0 \iff 2 - \ln x < 0 \iff \ln x > 2 \iff x > e^2.$$

Dakle, za $x > e^2$ je f opadajuća funkcija. Zato je za $n \geq 9$

$$f(n) > f(n+1)$$

pa je

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \iff \sqrt{n+1} \ln n > \sqrt{n} \ln(n+1) ,$$

odnosno,

$$\ln n^{\sqrt{n+1}} > \ln(n+1)^{\sqrt{n}} \iff n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}} ,$$

a to je i trebalo dokazati.

Napomena 1. Ideja za uzimanje u razmatranje monotonst funkcije $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ dolazi upravo iz nejednakosti

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} ,$$

koja se dobije logaritmiranjem nejednakosti koju treba dokazati.

□

Primjer 2.2. Neka je $0 < a < b$. Dokazati da je tada

$$bx^a - ax^b < b - a, \quad x > 1.$$

Rješenje: Neka je $f(x) = bx^a - ax^b - b + a$. Tada je

$$f'(x) = abx^{a-1} - abx^{b-1} = abx^{a-1}(1 - x^{b-a}) .$$

Očigledno, za $x > 1$ je $f'(x) < 0$, pa je f opadajuća funkcija. A kako je $f(1) = 0$ i s obzirom da je f opadajuća funkcija, to je $f(x) < 0$ za $x > 1$. Dakle, imamo da vrijedi

$$bx^a - ax^b - b + a < 0 ,$$

odnosno,

$$bx^a - ax^b < b - a ,$$

za $x > 1$, što je i trebalo dokazati.

□

Primjer 2.3. Ako je $0 < x < \frac{\pi}{2}$, onda je

$$\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2} .$$

Dokazati!

Rješenje: Neka je $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \sqrt{\cos x} - \sin x \cdot \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x} - 1 = \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}} - 1 = \frac{\cos^2 x + 1}{2\cos x \sqrt{\cos x}} - 1 \\ &= \frac{\cos^2 x - 2\cos x \sqrt{\cos x} + 1}{2\cos x \sqrt{\cos x}} > \frac{(\cos x - 1)^2}{2\cos x \sqrt{\cos x}} \\ &> 0, \end{aligned}$$

za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, jer je tada $0 < \cos x < 1$.

Dakle, f je rastuća funkcija za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Kako je $f(0) = 0$, to je $f(x) > 0$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Zato imamo da vrijedi

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x > 0 \iff \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} > x \iff \frac{\sin^2 x}{\cos x} > x^2 \iff \frac{\sin^2 x}{x^2} > \cos x ,$$

za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Time je polazna nejednakost dokazana.

Napomena 2. Iz posljednjeg niza ekvivalencija u prethodnom primjeru se također vidi ideja odabira funkcije $f(x)$ kako bi se dokazala navedena nejednakost.

□

Primjer 2.4. Dokazati da je, za $x > 0$

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Rješenje: Neka je za $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x).$$

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x) - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{(1+x) - 2\sqrt{1+x} + 1}{2(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &> 0, \end{aligned}$$

za $x > 0$.

Dakle, f je rastuća funkcija. Budući da je $f(0) = 0$, to je $f(x) > 0$ za $x > 0$, pa je

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}},$$

za $x > 0$.

□

Primjer 2.5. Dokazati da vrijedi

$$\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x, \quad x > 0.$$

Rješenje: Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{x} - \ln x.$$

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1 + \sqrt{1+x^2})} + \frac{1-x}{x^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} + \frac{1-x}{x^2} = \frac{x^3 + (1-x)(\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2)} \\ &= \frac{1+x^2 + \sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} - x}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2)} = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2)} \\ &> 0, \end{aligned}$$

jer $\sqrt{1+x^2} > x$. Dakle, $f'(x) > 0$, pa je f rastuća funkcija. Kako je

$$f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) - \frac{1}{x},$$

to $f(x) \rightarrow 0$ kad $x \rightarrow \infty$. Zato je $f(x) < 0$ za svako $x > 0$, to jest

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{x} - \ln x < 0 ,$$

odnosno,

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \ln x + \frac{1}{x} .$$

□

Primjer 2.6. *Dokazati da vrijedi*

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x < e^a, \quad x > 0, a > 0 .$$

Rješenje: Posmatrajmo funkciju $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)$ na $(0, +\infty)$ i $a > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot -\frac{a}{x^2} . \\ &= \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x + a} . \end{aligned}$$

Primijetimo da je $f'(x) > 0$ ako i samo ako je

$$\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) > \frac{a}{x + a} ,$$

odnosno, ako i samo ako je

$$\ln \left(\frac{x + a}{x}\right) > \frac{a}{x + a} . \quad (2)$$

Funkcija $\ln(1 + x)$ zadovoljava pretpostavke Legrangeovog teorema (Teorem1.3) na segmentu $[0, u]$, ($u > 0$), pa psotoji $c \in (0, u)$ tako da je

$$\ln(1 + u) - \ln 1 = \frac{1}{1 + c}(u - 0) ,$$

to jest

$$\ln(1 + u) = \frac{u}{1 + c} ,$$

odakle, zbog $0 < c < u$, slijedi

$$\frac{u}{1 + u} < \ln(1 + u) < u, u > 0 .$$

Primjenom posljednje nejednakosti, nije teško zaključiti da je nejednakost (2) zadovoljena, pod uvjetima zadatka. Zaista,

$$\ln \left(\frac{x + a}{x}\right) = \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) > \frac{\frac{a}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = \frac{a}{x + a} .$$

Dakle, $f'(x) > 0$ za svako $x > 0$, što znači da je posmatrana funkcija rastuća na $(0, +\infty)$. Ako pustimo da $x \rightarrow \infty$, imaćemo da vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = a .$$

Prema tome, funkcija f je rastuća i $f(x) \rightarrow a$ kad $x \rightarrow \infty$, pa je $f(x) < a$ za svako $x > 0$, to jest,

$$x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) < a ,$$

ili,

$$\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x < a ,$$

odnosno,

$$\left(1 + \frac{a}{x} \right)^x < e^a ,$$

za svako $x > 0$, što je i trebalo dokazati.

Napomena 3. I u prethodnom primjeru se vidi da je ideja uzimanja funkcije f u navedenom obliku posljedica logaritmiranja nejednakosti koja se dokazuje.

□

Primjer 2.7. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$e^x - 1 - x < x^2 e^x, \quad x > 0.$$

Rješenje: Neka je

$$f(x) = x^2 e^x - e^x + x + 1 .$$

Tada je

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x - e^x + 1 = e^x(x^2 + 2x - 1) + 1 .$$

Dalje je

$$f''(x) = e^x(x^2 + 2x - 1) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 1) .$$

Očigledno je $f''(x) > 0$ za sve $x > 0$, pa je f' rastuća funkcija. Kako je $f'(0) = 0$, to je onda $f'(x) > 0$ za $x > 0$, pa je f rastuća funkcija. S druge strane, zbog $f(0) = 0$ je $f(x) > 0$, za $x > 0$. Dakle,

$$e^x - 1 - x < x^2 e^x .$$

□

Primjer 2.8. Za $x \in (0, \pi)$, dokazati da je

$$\ln(1 + \cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4} .$$

Rješenje: Neka je

$$f(x) = \ln(1 + \cos x) - \ln 2 + \frac{x^2}{4} .$$

Tada je

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{x}{2} .$$

Dalje je

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} + \frac{1}{2} = \frac{-1 - \cos x}{(1 + \cos x)^2} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x - 1}{2(1 + \cos x)^2} \\ &< 0, \end{aligned}$$

za $x \in (0, \pi)$. To znači da je f' opadajuća funkcija, a kako je $f'(0) = 0$, to je $f'(x) < 0$, za $x \in (0, \pi)$. Sada zaključujemo da je f opadajuća funkcija, a zbog $f(0) = 0$, slijedi $f(x) < 0$, za $x \in (0, \pi)$. Dakle,

$$\ln(1 + \cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4}.$$

□

Primjer 2.9. *Dokazati da je*

$$\ln(1 + x^2) < x \arctan x < x^2, \quad x > 0.$$

Rješenje: Prvo ćemo dokazati lijevu nejednakost. U tu svrhu posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - x \arctan x.$$

Sada je

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - \arctan x - \frac{x}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2} - \arctan x.$$

Dalje imamo

$$f''(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{-2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Očigledno je $f''(x) < 0$ za $x \neq 0$. Zato je f' opadajuća funkcija, a kako je $f'(0) = 0$, to je $f'(x) < 0$ za $x > 0$. Dakle, f je opadajuća funkcija za $x > 0$, pa zbog $f(0) = 0$ je $f(x) < 0$ za $x > 0$, to jest

$$\ln(1 + x^2) < x \arctan x.$$

Dokažimo sada desnu nejednakost. Neka je

$$g(x) = \arctan x - x.$$

Tada je

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1 + x^2},$$

pa je $g'(x) < 0$ za $x \neq 0$. Dakle, funkcija g je opadajuća, a zbog $g(0) = 0$, imamo da je $g(x) < 0$ za $x > 0$. Zato je

$$\arctan x < x,$$

odakle, nakon množenja sa $x > 0$, slijedi

$$x \arctan x < x^2.$$

Sada možemo zaključiti da, za $x > 0$, vrijede nejednakosti

$$\ln(1 + x^2) < x \arctan x < x^2.$$

□

Primjer 2.10. Dokazati da za proizvoljno $x > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}(e^x - 1) .$$

Rješenje: Lijeva strana je očigledna (jer je $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$). Stavimo

$$f(x) = \frac{x}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \geq 0.$$

Tada je

$$f'(x) = \frac{1}{n}e^x + \frac{x}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!},$$

odnosno,

$$f'(x) = \frac{x+1}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} .$$

Dalje je

$$f''(x) = \frac{x+2}{n}e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!},$$

te zaključujemo induktivno da je

$$f^{(n)}(x) = \frac{x+n}{n}e^x - e^x + 1, x \geq 0 .$$

Pri tome je

$$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{n}, f''(0) = \frac{2}{n}, \dots, f^{(n-1)}(0) = \frac{n-1}{n} .$$

Još je

$$f^{(n)}(x) > 1, x > 0 .$$

Sada, iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti (Teorem 1.3), vrijedi

$$f^{(n-1)}(x) > \frac{n-1}{n} + x, x > 0 .$$

Naime, funkcija $f^{(n-1)}(x)$ zadovoljava pretpostavke Lagrangeovog teorema na segmentu $[0, x]$, ($x > 0$), pa postoji $c \in (0, x)$ tako da je

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) = f^n(c)(x - 0) ,$$

to jest,

$$f^{(n-1)}(x) - \frac{n-1}{n} = f^n(c)x ,$$

odnosno,

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{n-1}{n} + f^n(c)x > \frac{n-1}{n} + x ,$$

jer je $f^n(c) > 1$ za $c > 0$.

Analogno je

$$f^{(n-2)}(x) > \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n}x, x > 0 ,$$

jer i $f^{(n-2)}(x)$ zadovoljava uvjete Teorema 1.3, pa postoji $c_1 \in (0, x)$ tako da je

$$f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(c_1)x ,$$

odnosno,

$$f^{(n-2)}(x) = \frac{n-2}{n} + f^{(n-1)}(c_1)x > \frac{n-2}{n} + \left(\frac{n-1}{n} + c_1 \right) x > \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n}x .$$

Induktivno, zaključujemo da je

$$f'(x) > \frac{1}{n} + \frac{2}{n}x, x > 0$$

$$f(x) > \frac{x}{n}, x > 0 .$$

Prema tome,

$$\frac{x}{n}e^x - \frac{x}{n} > e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x > 0.$$

□

Primjer 2.11. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \quad x > 0, y > 0.$$

Rješenje: Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x \ln x, x > 0 .$$

Tada je

$$f'(x) = \ln x + 1 \text{ i } f''(x) = \frac{1}{x} .$$

Jasno je da je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, pa je posmatrana funkcija strogo konveksna na $(0, +\infty)$. Zato je

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) ,$$

što slijedi iz Definicije 1.4, uzimajući $\lambda = \frac{1}{2}$.

Dakle,

$$x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \quad x > 0, y > 0 .$$

□

Primjer 2.12. Dokazati da za bilo koje $n \in \mathbb{N}$ i $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (0, \pi)$ vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \sin x_k} \leq \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) .$$

Rješenje: Posmatraćemo funkciju

$$f(x) = \ln \sin x$$

na intervalu $(0, \pi)$. Tada je

$$f'(x) = \cot x \text{ i } f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0 .$$

To znači da je funkcija f strogo konkavna na $(0, \pi)$, pa je, prema Jensenovoj nejednakosti za konkavne funkcije (uzimajući $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$)

$$f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) ,$$

odnosno,

$$\ln \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sin x_k ,$$

ili,

$$\ln \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \ln \left(\prod_{k=1}^n \sin x_k \right)^{\frac{1}{n}} ,$$

to jest,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \sin x_k} \leq \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Zadaci za samostalan rad

Dokazati da vrijede sljedeće nejednakosti.

1. $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 > 0, x > 1$
2. $\frac{x}{e} > \ln x, x > 0, x \neq 0$
3. $xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1, x > 0$
4. $e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 > 0, x > 1$
5. $e^x < (1+x)^{1+x}, x > 0$
6. $\left(\frac{x+1}{2} \right)^{x+1} \leq x^x, x > 0$

Literatura

- [1] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Sarajevo, Bosanska riječ, 2004.
- [2] M. P. Ušćumlić, P. M. Miličić, M. N. Trifunović: *Uvod u višu matematiku 2*, Beograd, Univerzitet u Beogradu, 1983.
- [3] M. Nurkanović: *Matematička analiza 2 (skripta)*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, 2025.
<https://mehmed.nurkanovic.com>
- [4] A. Y. Dorogovcev: *Matematičeskij analiz - Sbornik zadač*, Višća škola, Kiev, 1987.