

Približna konstrukcija ugla od 1 radijana

Jens Carstensen¹, Alija Muminagić¹

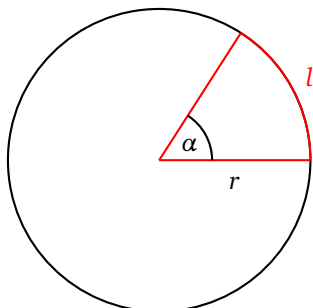
¹Kraljevina Danska

Posvećeno u čast 65. rođendana cijenjenog prof. dr. Mehmeda Nurkanovića

Sažetak: U ovom članku dajemo nekoliko približnih konstrukcija ugla od 1 rad.

1. Uvod

Radian (u oznaci rad) je mjerna jedinica za ugao. Veličina centralnog ugla α u radijanima je jednaka omjeru duljine kružnog luka l nad tim uglom i poluprečnika kružnice r , tj. $\alpha = \frac{l}{r}$.



Tako imamo da je radijanska mjera ugla, čija je mjera u stepenima jednaka 180° jednaka $\frac{L}{r}$, gdje je L obim kružnice, tj. $\frac{2r\pi}{r} = \pi$ rad ili $180^\circ = \pi$ rad.

Zato je

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 44,8''$$

$$\text{ i } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad.}$$

Dokazano je da konstrukcija ugla od 1 rad nije moguća. Međutim, urađeno je mnogo interesantnih približnih konstrukcija i nekoliko takvih dajemo u ovom članku.

Preporučujemo da obavezno pročitate članke [4] i [5].

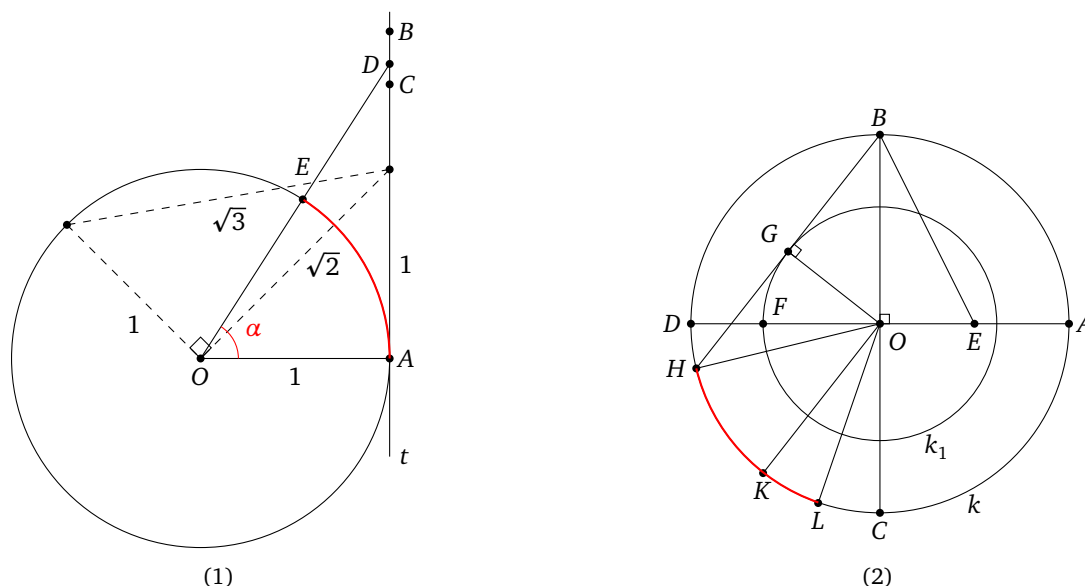
2. Prva konstrukcija

Konstruišimo kružnicu $k(O, 1)$ i u tački A konstruišimo tangentu t . Na tangenti t , s iste strane tačke A odredimo tačke B i C tako da je $AC = \frac{3}{2}$ i $AB = \sqrt{3}$. Konstrukcija duži $\sqrt{3}$ je data na Slici 11. Zatim na tangenti t odredimo tačku D takvu da je $CD = \frac{BC}{4}$. Spojimo tačke O i D i presječnu tačku kružnice i pravca kroz tačke O i D označimo sa E . Dokazat ćemo da je duljina luka $\widehat{AE}$ približno jednaka 1 rad. Imamo

$$AD = AC + CD = AC + \frac{BC}{4} = AC + \frac{1}{4}(AB - AC) = \frac{3}{4}AC + \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 1,558012702.$$

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
 Ključne riječi: radijan, ugao
 Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
 Rad preuzet: 01. juli 2025.

U $\triangle OAD$ je $\tan \alpha = \frac{AD}{1}$ pa je $AD = \tan \alpha \approx 1,558012702$, odakle je $\alpha \approx 1$ rad. Kako je $\tan 1 = 1,557407725$, čitaoci sami mogu ocijeniti grešku.



Slika 1

3. Druga konstrukcija

U kružnici $k(O, 1)$ konstruišemo dva međusobno normalna prečnika $AD \perp BC$, (Slika 12). Tačka E polovi dužinu OA a tačka F leži na prečniku AD , tako da je $EF = EB$. Konstruišemo kružnicu $k_1(O, OF)$ i tangentu na tu kružnicu iz tačke B . Dodirnu tačku te tangente i kružnice k_1 označimo sa G . Pravac kroz tačke B i G siječe kružnicu k u tački H . Primjenom Pitagorinog teorema na trougao OEB dobijamo

$$BE^2 = OE^2 + OB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow BE = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Osim toga, vrijedi

$$GO = FO = EF - EO = BE - EO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

U pravouglom trouglu OBG je $\sin \sphericalangle OBG = \frac{OG}{OB} = \frac{OG}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ pa je $\sphericalangle OBG = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0,666239$ ili $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx \frac{2}{3}$ rad. Dalje je $\sphericalangle HOC = 2 \cdot \sphericalangle HBC = 2 \cdot \sphericalangle OBG = 2 \cdot \frac{2}{3} \text{ rad} = \frac{4}{3} \text{ rad}$, gdje prva jednakost vrijedi zbog odnosa centralnog i periferijskog ugla nad istim lukom a druga jer je trougao OBH jednakostraničan.

Povucimo paralelu kroz tačku O sa dužinom BH i presječnu tačku te paralele s kružnicom k označimo sa K . Vrijedi $\sphericalangle HOK = \frac{2}{3} \text{ rad} = \sphericalangle KOC$. Simetrala $\sphericalangle KOC$ siječe kružnicu k u tački L i sa slike vidimo da je

$$\sphericalangle HOL = \sphericalangle HOK + \sphericalangle KOL = \frac{2}{3} \text{ rad} + \frac{1}{3} \text{ rad} = 1 \text{ rad}.$$

Ovdje je dakle približna vrijednost za 1 rad data sa $\frac{3}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0.9993591$ rad.

Napomena: Iz jednog dijela ove konstrukcije možemo dobiti i približnu konstrukciju broja π . Zaista, Pitagorina teorema primijenjena na trougao OBG daje

$$BG^2 = OB^2 - OG^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{4-6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034$$

što je ekvivalentno sa

$$BG = \sqrt{0.618034} \approx 0.786151 \approx \frac{\pi}{4}$$

i lako konstruišemo $\pi = 4 \cdot BG$.

4. Treća konstrukcija

Konstruišemo kružnicu $k(O, OA)$ i neka tačke B, C i D leže na kružnici k tako da je $BC = CD = DA = OB$, (Slika 21). Neka je tačka P središte dužine OA . Nacrtajmo sada kružnicu $k_1(P, PA)$ a u tački O konstruišemo normalu na AB i presječnu tačku te normale i kružnice k označimo sa E . Neka pravci provučeni kroz tačke P i E te P i C sijeku kružnicu k_1 u tačkama F i G . Na kružnici k odredimo tačke I i H tako da je $EI = EF$ i $CH = HG$. Presječnu tačku pravca kroz H i O sa kružnicom k označimo sa J , a projekciju tačke C na prečnik AB sa Q .

Dokazat ćemo da je $\angle IJH = 1$ rad.

Možemo uzeti da je $OA = OB = 1$. Tada je $OP = \frac{1}{2}$, pa Pitagorina teorema primijenjena na trougao OPE daje

$$PE^2 = OP^2 + OE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow PE = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

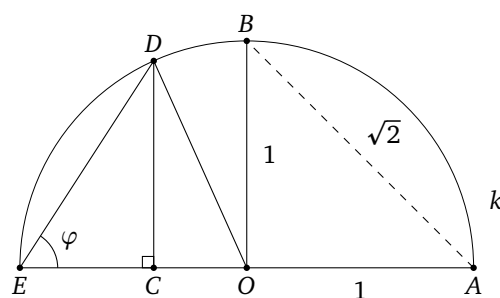
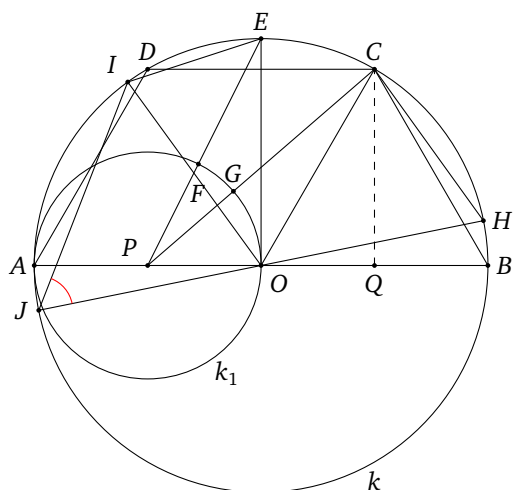
Zato je $EI = EF = EP - PF = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Trougao OBC je jednakostranični sa dužinom stranice 1, a CQ je njegova visina, pa imamo $CQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pitagorina teorema za trougao PQC daje

$$CP^2 = CQ^2 + PQ^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow CP = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Sada je

$$CH = CG = CP - PG = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}.$$



Slika 2

Dalje je trougao OIE jednakokraki i vrijedi $EI = 2 \sin \frac{\angle IOE}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \sin \frac{\angle IOE}{2}$ i odavdje slijedi $\frac{\angle IOE}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\pi}{10}$. Imamo da je $\angle EOC = \frac{\pi}{6}$ i trougao OCH jednakokraki, pa je $CH = 2 \cdot \sin \frac{\angle COH}{2}$, tj. $\frac{\sqrt{7}-1}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\angle COH}{2}$, odakle je $\frac{\angle COH}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4}$.

Sa slike vidimo da je $\angle IOH = \angle IOE + \angle EOC + \angle COH$ i zbog $\angle IJH = \frac{\angle IOH}{2}$, dobijamo:

$$\angle IJH = \frac{\angle IOH}{2} = \frac{\angle IOE}{2} + \frac{\angle EOC}{2} + \frac{\angle COH}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{12} + \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} = \frac{11\pi}{60} + \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} \approx 0,999987 \text{ rad.}$$

Primijetimo da je ova približna konstrukcija dosta dobra, ali je poprilično komplikovana.

5. Četvrta konstrukcija

Neka je EA prečnik polukružnice $k(O, OA = 1)$, $OB \perp OA$ i tačka C na prečniku $EA = 2$ takva da je $AC = AB = \sqrt{2}$, (Slika 22). U tački C konstruišemo normalu na OE i presječnu tačku te normale i polukružnice k označimo sa D . Jasno je da je $OD = 1$ i $OC = AC - AO = \sqrt{2} - 1$. Pitagorina teorema u trouglu OCD daje

$$CD^2 = OD^2 - OC^2 = 1^2 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

zatim imamo $CE = AE - AC = 2 - \sqrt{2}$, a u trouglu DEC je

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$$

i konačno iz trougla DEC slijedi $\sin \varphi = \frac{DC}{DE}$, odakle je

$$\sin^2 \varphi = \frac{DC^2}{DE^2} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pa je $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,9989 \text{ rad.}$ Jednostavna konstrukcija i mala greška.

6. Još nekoliko konstrukcija

Prvo ćemo dati približnu konstrukciju ugla od 3 rad. Kvadrat $ABCD$ je upisan u kružnicu $k(O, 1)$ i smješten u pravougli koordinatni sistem xOy kao na Slici 31. Pri tome su tačke M i N središta stranica BC i AD upisanog kvadrata. Povucimo pravac kroz tačke A i M i presjek tog pravca i kružnice k označimo sa P , a presjek pravca kroz O i N sa Q . Dokazat ćemo da je $\angle QOP = \alpha \approx 3 \text{ rad.}$

Lako pokazujemo da tačka M ima koordinate $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, a da je jednačina pravca AM

$$y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (1)$$

S druge strane kružnica k ima jednačinu

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

pa rješavanjem sistema jednačina (1) i (2), dobijamo koordinate tačke $P\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$.

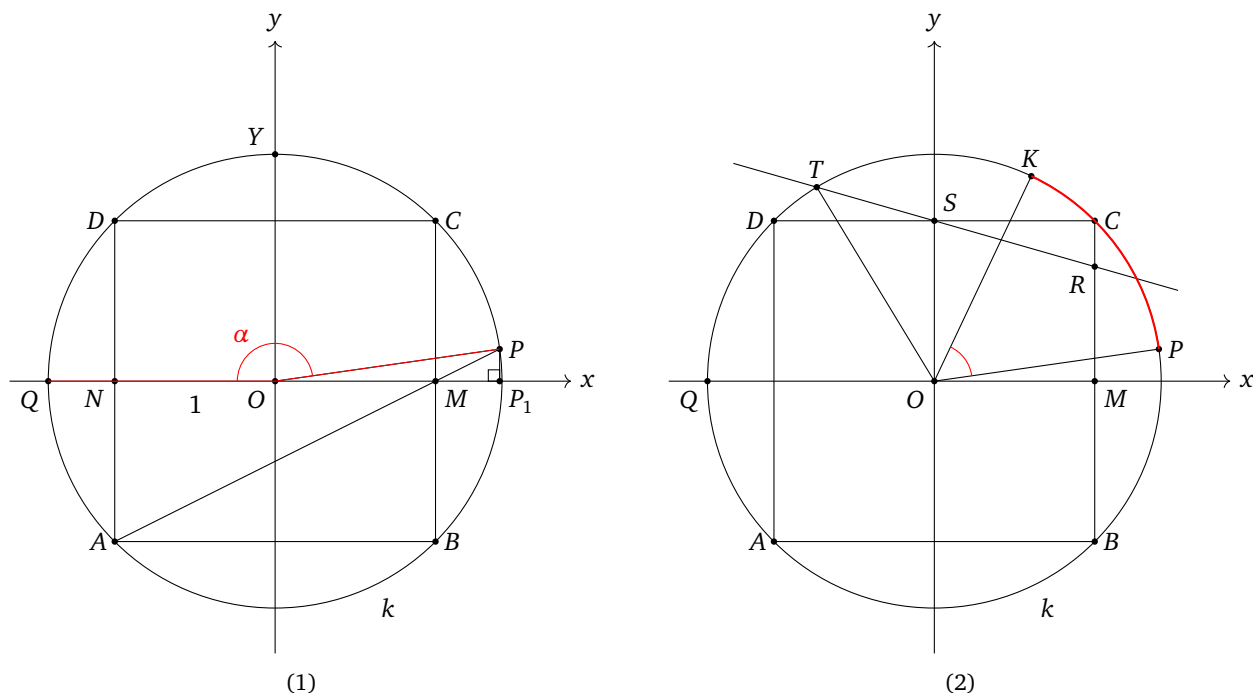
Neka je P_1 projekcija tačke P na x -osu. Tada u pravouglom trouglu OP_1P vrijedi

$$\tan \angle P_1OP = \tan \angle MOP = \frac{PP_1}{OP_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{10}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{1}{7}$$

tj. $\angle MOP = \arctan \frac{1}{7}$ i konačno

$$\alpha = \angle QOP = \pi - \angle MOP = \pi - \arctan \frac{1}{7} = 2.999656 \approx 3 \text{ rad.}$$

Pokušajmo sada koristeći Sliku 31 konstruisati ugao od 1 rad.



Slika 3

6.1. Peta konstrukcija

Kako je $Y(O, 1)$, dobijamo da je

$$\frac{1}{2} \angle POY + 2 \cdot \angle POM = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \angle POM \right) + 2 \cdot \angle POM = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \angle POM = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} (\pi - 3) = \frac{7\pi}{4} - \frac{9}{2} \approx 1 \text{ rad.}$$

6.2. Šesta konstrukcija

Neka je tačka R na BC takva da je $CR : RB = 1 : 7$. Povucimo pravac kroz tačke R i S (S je središte duži CD) i presjek tog pravca i kružnice k označimo sa T . Jednačina tog pravca je $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$, a jednačina kružnice k je $x^2 + y^2 = 1$. Rješavanjem tog sistema jednačina dobijamo koordinate tačke $T \left(\frac{4-12\sqrt{2}}{17\sqrt{2}}, \frac{16+3\sqrt{2}}{17\sqrt{2}} \right)$, (Slika 32).

Ugao između vektora $\vec{OT} = \left(\frac{4-12\sqrt{2}}{17\sqrt{2}}, \frac{16+3\sqrt{2}}{17\sqrt{2}} \right)$ i $\vec{OP} = \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{10} \right)$ određen je sa $\cos \beta = \vec{OT} \cdot \vec{OP} = \frac{22\sqrt{2}-81}{85\sqrt{2}}$, tj. $\beta = 1.99875$.

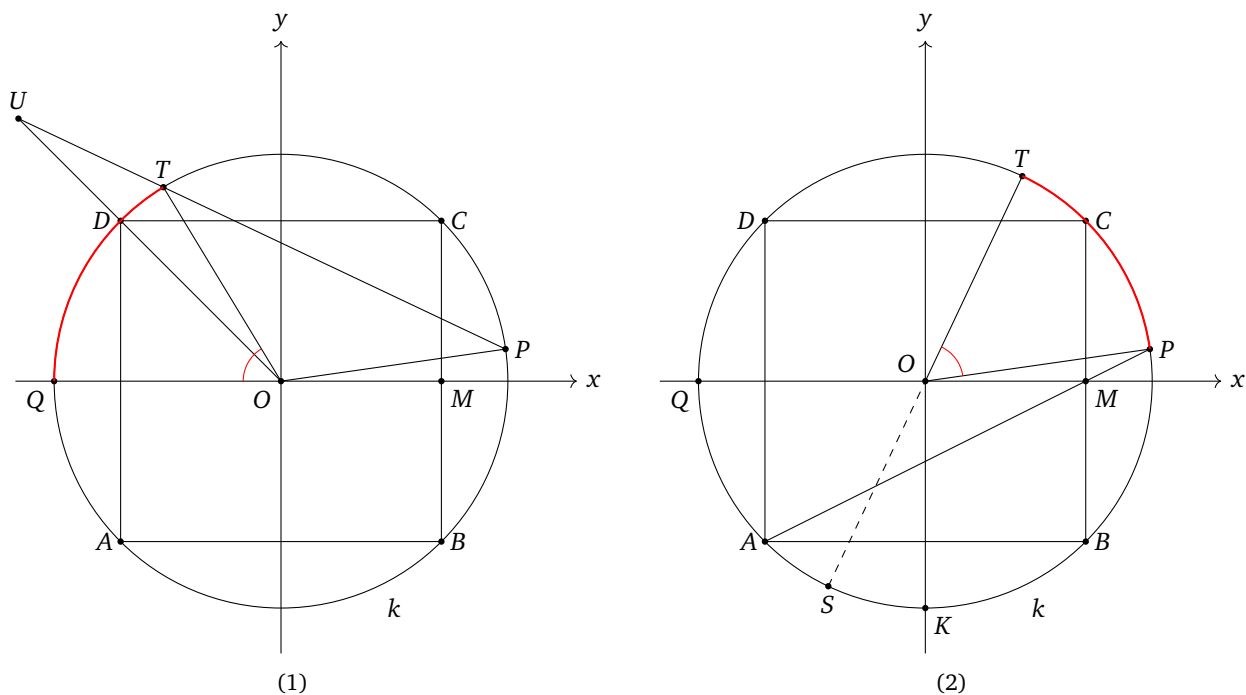
Simetrala ugla $\beta = \angle POT$ je OK i polovi luk $\widehat{TP}$, pa svaki od dijelova luka $\widehat{TP}$ (tj. $\widehat{TK} = \widehat{KP}$) ima dužinu $\frac{1}{2}\beta = 0.999375 \approx 1 \text{ rad.}$

6.3. Sedma konstrukcija

Na produžetku duži OD , preko tačke D , konstruišimo tačku U , tako da je $OU = \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot OD = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot 1$. Tako dobijamo koordinate tačke $U \left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \right)$. Presječnu tačku pravca kroz tačke P i U označimo sa T . Tada je $\angle TOQ \approx 1 \text{ rad}$, čiji dokaz prepuštamo čitaocima, (Slika 41).

6.4. Osmu konstrukcija

Neka je $K(0, -1)$ i neka tačka S leži na kružnici takva da je $\angle POS = \frac{5}{4} \angle POK$, (Slika 42). neka je tačka T dijametralno suprotna tački S na kružnici. Tada je $\angle POT \approx 1 \text{ rad.}$



Slika 4

Imamo $\sphericalangle POK = \sphericalangle POM + \frac{\pi}{2}$, pa je

$$\sphericalangle POS = \frac{5}{4} \sphericalangle POK = \frac{5}{4} \left(\sphericalangle POM + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{5}{4} \sphericalangle POM + \frac{5\pi}{8}.$$

Sada je

$$\sphericalangle POT = \pi - \sphericalangle POS = \pi - \frac{5}{4} \sphericalangle POM - \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} - \frac{5}{4} \sphericalangle POM = \frac{3\pi}{8} - \frac{5}{4} \cdot 0,141897 \approx 1,000726 \text{ rad.}$$

Literatura

- [1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Konstruktion af 1 radian*, Matematik Magasinet, 25, s. 69.
- [2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Konstruktion af 1 radian*, 2, Matematik Magasinet, 78, s. 2868.
- [3] J. Dickson, N. Lord: *Approximate constructions of 1 radian*, The Mathematical gazette, vol. 98, number 542, July, 2014.
- [4] D. Kamber-Hamzić: *Pojam radijana u nastavi trigonometrije*, Evolventa Vol. 5, No. 1, s. 18-22, Tuzla, 2022.
- [5] Š. Jusić: *Približne konstrukcije broja π* , Evolventa Vol. 5, No. 2, s. 37-44, Tuzla, 2022.
- [6] Problem Corner, 93H, The mathematical gazette, Vol. 94, No. 529, March 2010.